Exercice 1 (4 points)

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ».
   Montrer que p(R) = 0,15.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la **partie A,** dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit x un entier naturel non nul.
Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x-2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.

2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.

3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\mathrm{E(G)} \geq 0$?

Partie A

1) Faire un arbre. Lorsqu'on réalise le "1" au dé, la boule rouge ne peut provenir que de A et ....

D'après la loi de probabilité totale, on a:

$$P(R) = P(\text{"faire 1"} \cap R) + P(\text{"faire 2 à 6"} \cap R) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{60} = 0{,}15$$

2) On compare $P_R(A)$ et $P_R(B)$

$$P_R(A) = ... = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{10}}{\frac{9}{60}} = \frac{4}{9}$$

$$P_R(B) = ... = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{10}}{\frac{9}{60}} = \frac{5}{9}$$

$P_R(A) < P_R(B)$

Partie B

La répétition de l'épreuve dans les mêmes conditions avec remise mène a une loi binomiale de paramètre $\mathscr{B}(2; 0{,}15)$.

Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de boules rouges: on a:

$P(X=2) = 0{,}15^2$, $P(X=1) = 2\times 0{,}15\times 0{,}85$ et $P(X=0) = 0{,}85^2$

Remarquer: $0{,}15^2 + 2\times 0{,}15\times 0{,}85 + 0{,}85^2 = (0{,}15 + 0{,}85)^2$

La variable aléatoire G est définie par $(G = 2x) = (X = 2)$, $(G = x - 2) = (X = 1)$ et $(G = -4) = (X = 0)$

Couleurs	R et R	R et N	N et N
G	$2x$	$x - 2$	-4
P	$0{,}15^2$	$2\times 0{,}15\times 0{,}85$	$0{,}85^2$

$E(G) = 0{,}15^2\times 2x + 2\times 0{,}15\times 0{,}85\times(x-2) + 0{,}85^2\times(-4) = 0{,}3x - 3{,}4$

$E(G) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant \dfrac{34}{3}$ et $x \in \mathbb{N}$, d'où, $x \geqslant 12$.

Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$.

   Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\frac{z}{1-z}\right|=1$.

   Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».

3. Soit r la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1+i\sqrt{3}$.

   Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$ ».

4. On considère l'équation (E) suivante : $z^2+2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z+1=0$.

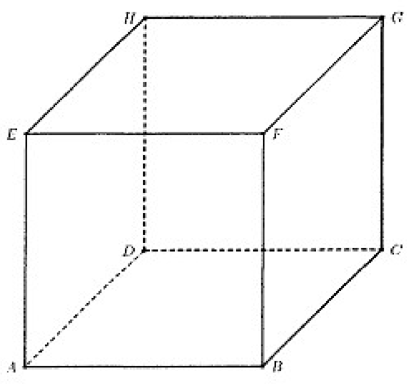
   Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Partie B

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, représenté ci-dessous.

Proposition 5 : « le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) ».

Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ».



PARTIE A

1) Proposition 1 : FAUSSE

Une écriture de z est $z = |z| \times e^{i\frac{\pi}{3}}$, d'où,

$$z^{100} = (|z|)^{100}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{100} = (|z|)^{100}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{99}\times\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = -\ (|z|)^{100}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

2) Proposition 2 : FAUSSE

Notons I le point d'affixe 1 (sur l'axe des réels)

$\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1$ si et seulement si $\dfrac{OM}{IM} = 1$ si et seulement si $OM = IM$ si et seulement si M est sur la médiatrice de $[OI]$.

E est une droite parallèle **à l'axe des ordonnées.**

3) Proposition 3 : VRAIE

L'image du point O d'affixe 0 par r est le point d'affixe:

$z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(0-(1+i\sqrt{3}))+1+i\sqrt{3} = i-\sqrt{3}+1+i\sqrt{3} = ...$

4) Proposition 4 : VRAIE

$z^2 + 2\cos(\frac{\pi}{5})z + 1 = 0$

Calcul de Δ: $\Delta = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 - 4 = ... = -4\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 = \left(2i\times\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2$

L'équation a donc pour solutions les complexes conjugués:

$$\frac{-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2} = -\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = -e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\frac{-4\pi}{5}}$$

et $\dfrac{-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2} = -\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = e^{i\frac{4\pi}{5}}$

PARTIE B

Proposition 5: VRAIE

Une méthode

A est équidistant de B et de D, G est équidistant de B et de D, donc (AG) est dans le plan médiateur de $[BD]$.

A est équidistant de B et de E, G est équidistant de B et de E, donc (AG) est dans le plan médiateur de $[BE]$.

(BD) et (BE) sont donc orthogonales à (AG)

Une autre méthode

Choisir un repère orthonormé : par exemple: $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

On a: $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, puis, produit scalaire ...

Proposition 6: FAUSSE

Dans le repère précédent

$\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et produit scalaire ...

Exercice 3 (6 points)

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
« une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A »

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe, page 6. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique de l'annexe, page 6.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la courbe (C) est située au dessus de la droite (T).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur **N** par :

$u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique de l'annexe, page 6).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?
3. a) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   c) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

   d) En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie A:

Puisque la suite (u_n) n'est pas majorée, pour tout A réel, il existe un indice n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant A$.

Puisque (u_n) croissante, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$

D'après le prérequis, pour tout réel A, ...;

Partie B

f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x + 1) + \frac{1}{2}x^2$

1) f est définie et dérivable sur ..., car, ...

et $f'(x) = \frac{1}{x+1} + x$ qui est strictement positif sur $[0; +\infty[$, donc, f est strictement croissante ...

2) Une équation de T ... est: $y = f'(0)(x -+ f(0) = x$.

3) Tracé ...

Partie C

1) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, construction ...

2) On peut conjecturer que (u_n) est croissante et divergente vers $+\infty$.

3 a) ***Initialisation***: $u_0 = 1$, d'où, $u_0 \geqslant 1$ est vraie

Hérédité: Supposons un entier n tel que $u_n \geqslant 1$.

Comme f est croissante, on a $f(u_n) \geqslant f(1)$, or, $f(1) = \ln(2) + \dfrac{1}{2} > 1$, d'où, $u_{n+1} > 1$

Conclusion: Pour tout n de $\mathbb{N}$, ...

b) (u_n) est croissante

Par récurrence:

Initialisation: $u_0 \leqslant u_1$

Hérédité: Supposons un entier n tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$

Comme f est croissante, on obtient ..... $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$

Conclusion: Pour tout n de $\mathbb{N}$, ...

c) (u_n) est non majorée.

On a de façon évidente: Si $x \geqslant 0, f(x) \geqslant \dfrac{1}{2}x^2$

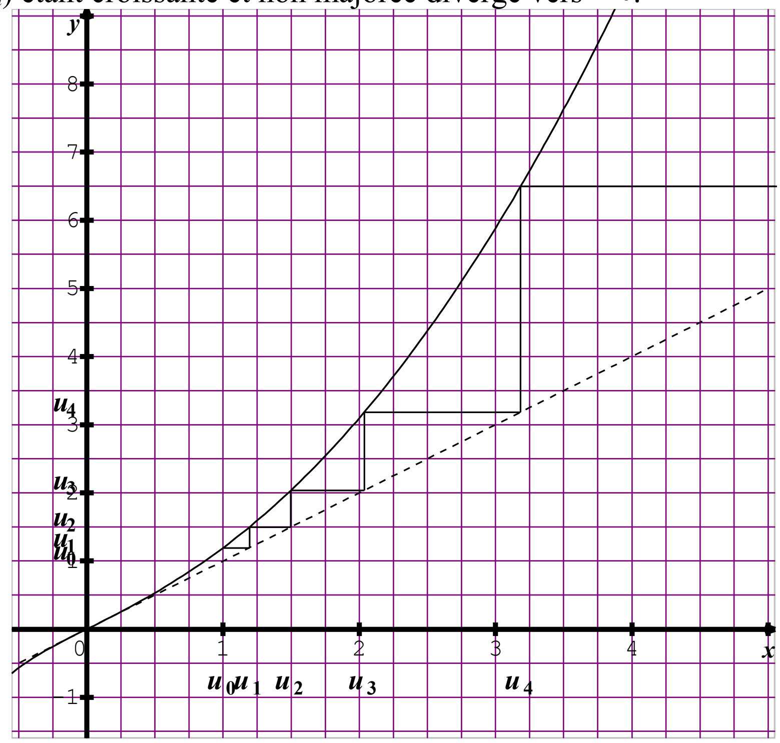
Or, $\dfrac{1}{2}x^2 \geqslant x + 1$ si $x \geqslant 3$.

Par exemple: $u_5 \geqslant 5$, d'où, il existe un indice n tel que $u_n \geqslant n$

On a alors $f(u_n) = u_{n+1}$ supérieur ou égal à $n + 1$

La suite (u_n) est minorée par la suite des entiers naturels qui n'est pas majorée.

d) D'après la partie A, (u_n) étant croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.



Exercice 4 (5 points)

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.
On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+e^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

Partie A

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe (C) susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

2. a) Interpréter graphiquement $g(2)$.
b) Montrer que $0 \leq g(2) \leq 2{,}5$.

3. a) Soit x un réel supérieur à 2.
Montrer que $\int_2^x f(t)\,dt \geq x-2$. En déduire que $g(x) \geq x-2$.
b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

Partie B

On admet que pour tout réel t, $f(t)=(t-1)e^{-t}+1$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt$.

2. En déduire que pour tout réel x, $g(x)=x(1-e^{-x})$.

3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Partie A

1) Respecter les unités données
Dessiner une courbe qui passe par l'origine du repère représentative d'une fonction croissante sur $]-\infty; 2]$, qui atteint son maximum de valeur $1 + e^{-2}$ en 2 avec une tangente horizontale puis décroissante sur $[2; +\infty[$ avec une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2) a) Comme f est positive sur $[0;2]$, $\int_0^2 f(x)\,dx = g(2)$ est la mesure de l'aire en u.a. = 1×2 = 2 cm² sous la courbe limitée par les droites d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées), $x = 2$ et l'axe des abscisses.

b) $g(2) \geqslant 0$ (mesure d'aire)
Le domaine décrit au a) est contenu dans le rectangle de dimensions 2 unités en abscisse et $1 + e^{-2}$ unités en ordonnée.
Ce rectangle a pour aire en u.a; $A = 2\times(1 + e^{-2}) \leqslant 2{,}5$
$0 \leqslant g(2) \leqslant 2{,}5$

c) Si $x \geqslant 2$ alors $f(x) \geqslant 1$ et comme l'intégrale conserve l'ordre pour $x \geqslant 2$, on a: $\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_2^x 1\,\mathrm{d}t$

Or, $\int_2^x 1\,\mathrm{d}t = x - 2$

$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$

D'où, $g(x) \geqslant x - 2$
b) $\lim_{x\to+\infty} x - 2 = +\infty$ et $g(x) \geqslant x - 2$ d'où, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
4) Par définition de g, on a: $g'(x) = f(x)$.
Or, $f(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty; 0]$, d'où, g est décroissante sur $]-\infty ; 0]$
et $f(x) \geqslant 0$ sur $[0; +\infty[$ d'où g est croissante sur $[0; +\infty[$

Partie B
$f(t) = (t-1)\,e^{-t} + 1$

1) Calcul de $\phi(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Posons $\begin{cases} u(t) = t-1 \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont continues sur $\mathbb{R}$, d'où,

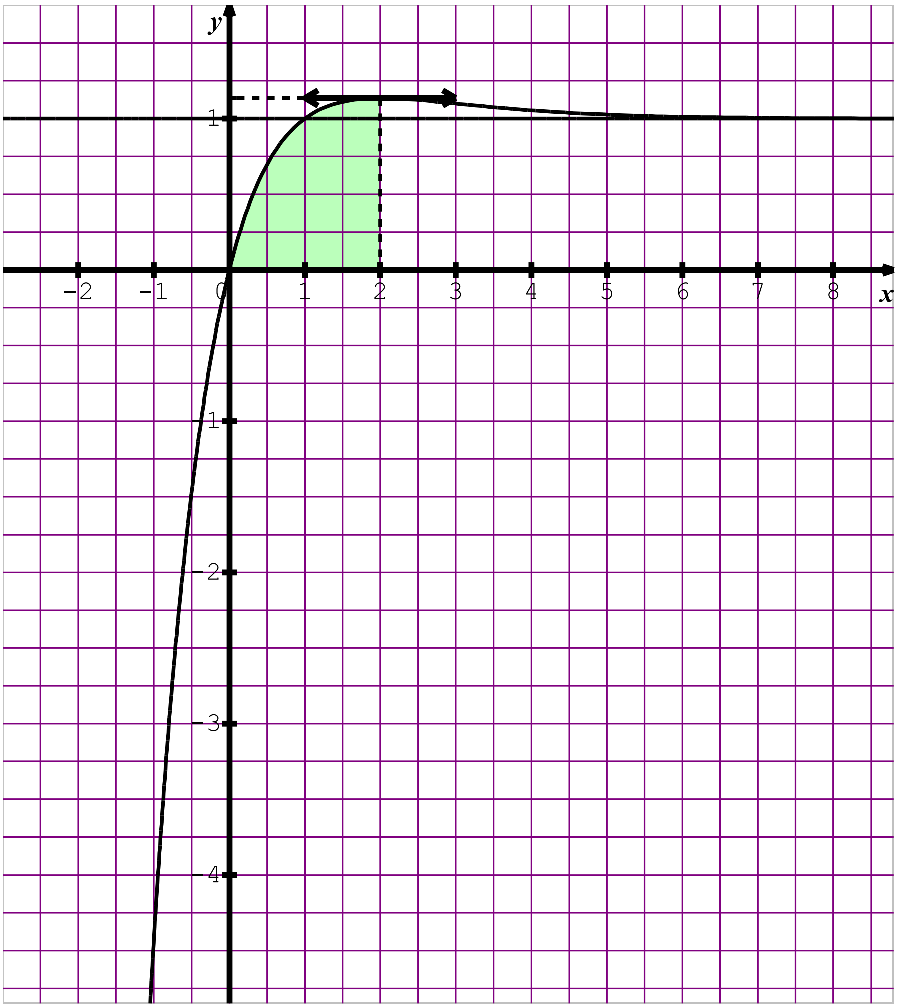
$\phi(x) = \left[(t-1)(-e^{-t})\right]_0^x - \int_0^x 1\times(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = -(x-1)\,e^{-x} - 1 - \left[e^{-t}\right]_0^x = -x\,e^{-x} + e^{-x} - 1 - e^{-x} + 1 = -x\,e^{-x}$

2) $g(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^x 1\,\mathrm{d}t$ par linéarité de l'intégrale.

$\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$

$g(x) = \phi(x) + x = x(1 - e^{-x})$

3) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$.
On a donc: $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} 1 - e^{-x} = -\infty$, en faisant le produit, il vient: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.


y
1
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x
-1
-2
-3
-4