Index

EXERCICE 1 3 points

Pour chacune des trois questions. une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.

Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.

On sait que $p(A\cup B) = \frac{4}{5}$ *et* $p(\overline{A}) = \frac{3}{5}$.

La probabilité de l'évènement B est égale à :

a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{2}{3}$ VRAI c. $\frac{3}{5}$ FAUX d. $\frac{1}{2}$ FAUX

En effet: A et B sont deux évènements **indépendants,** d'où, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Or, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{2}{5}$

On a donc: $\frac{4}{5} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{2}{5} \times P(B)$

$\frac{3}{5} P(B) = \frac{2}{5}$,

$P(B) = \frac{2}{3}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.

On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$, *notée* $p(X \leqslant t)$, *est donnée par*

$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$

La valeur approchée de $p(X > 5)$ *à* 10^{-2} *près par excès est égale à :*

a. 0,91 FAUX b. 0,18 FAUX c. 0,19 FAUX d. 0,82 VRAI

En effet, $p(X > 5) = 1 - p(X \leqslant 5) = 1 - \int_0^5 0{,}04\, e^{-0{,}04\, x} \mathrm{d}x$.

Or une primitive de la fonction $x \mapsto 0{,}04\ \mathrm{e}^{-0{,}04\, x}$ est $x \mapsto -\mathrm{e}^{-0{,}04\, x}$

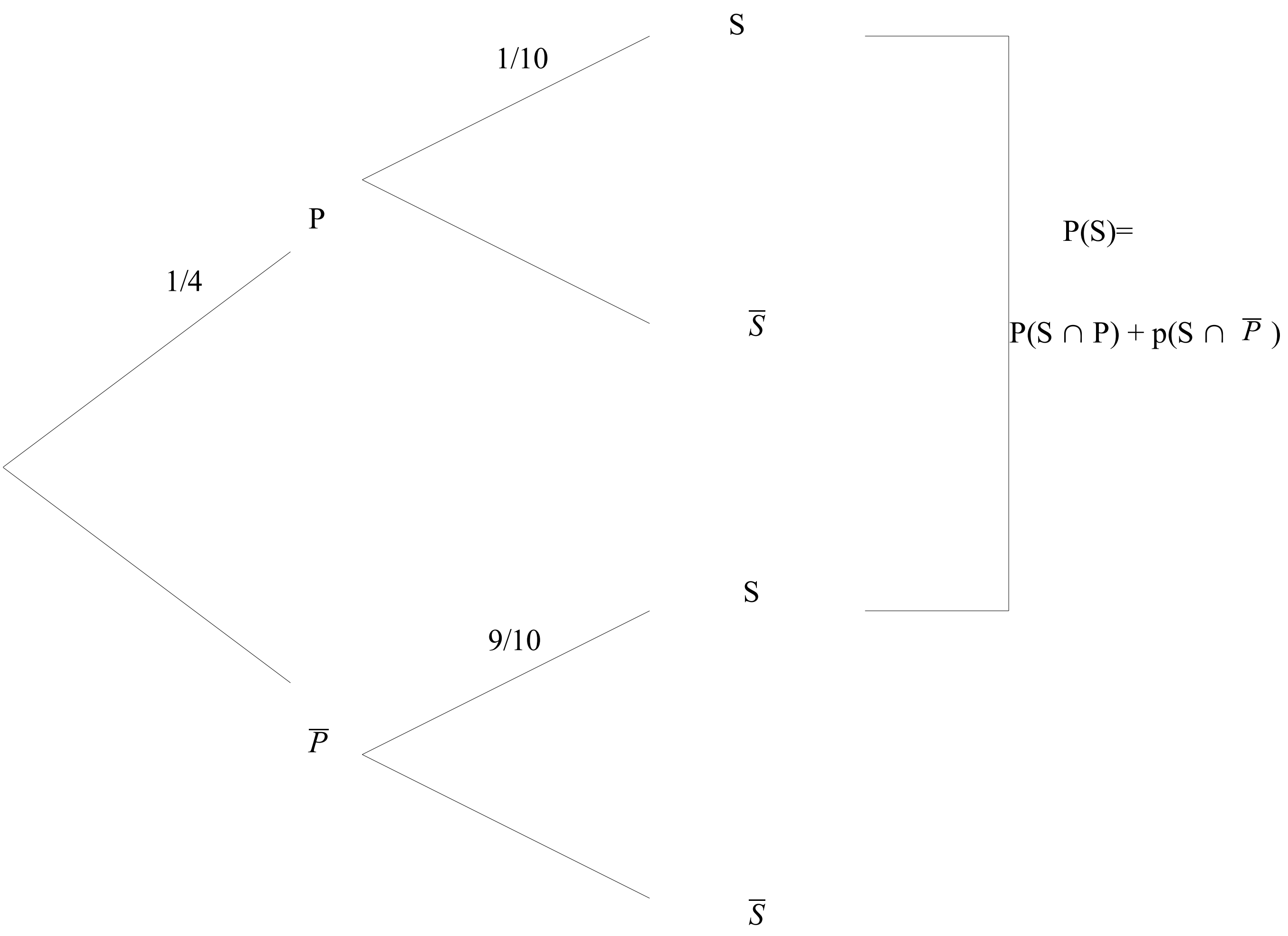
$$p(X > 5) = 1 - \int_0^5 0{,}04\, e^{-0{,}04\, x}\, \mathrm{d}x \ = 1 + \left[\mathrm{e}^{-0{,}04\, x}\right]_0^5 \ = \ \mathrm{e}^{-0{,}2}$$

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$ *; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à* $\frac{9}{10}$.

Je sors mon chien; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

Ne pas hésiter à faire un arbre de probabilité.



a. $\frac{9}{10}$ FAUX. b. $\frac{27}{40}$ FAUX c. $\frac{3}{4}$ FAUX d. $\frac{27}{28}$ VRAI

En effet, soit S l'événement "je sors mon chien" et P " il pleut"

p(P)= $\frac{1}{4}$, p_P (S) = $\frac{1}{10}$, $p_{\overline{P}}$ (S) = $\frac{9}{10}$.

On cherche p_S ($\overline{P}$) = $\dfrac{p(S \cap \overline{P})}{p(S)}$

$p(S \cap \overline{P}) = p_{\overline{P}}(S) \times p(\overline{P}) = p_{\overline{P}}(S) \times (1 - p(P)) = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{27}{40}$

$P(S) = P(S \cap P) + p(S \cap \overline{P}) = p_P(S) \times p(P) + p_{\overline{P}}(S) \times p(\overline{P}) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{27}{40} = \dfrac{28}{40}$

$p_S(\overline{P}) = \dfrac{27}{40} \times \dfrac{40}{28} = \dfrac{27}{28}$

EXERCICE 2 8 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \dfrac{1}{3}x$.

La courbe ($\mathcal{C}$) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

D'où, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-x} = 1$. (Limite d'une somme)

Or, la fonction ln est continue en 1, d'où, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \ln 1 = 0$ (limite de fonction composée)

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3}x = +\infty$, il vient: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. (limite d'une somme)

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ *est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$). Tracer (D).*

On vient de montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$, ce qui prouve que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$).

Tracé: La droite (D) passe par l'origine du repère et par le point de coordonnées (3; 1)

c. Étudier la position relative de (D) et de ($\mathcal{C}$).

la position relative de (D) et de ($\mathcal{C}$) est donnée par le signe de la différence $d(x) = f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$

Or, pour tout X réel, $e^X > 0$, d'où, $1 + e^{-x} > 1$, et, comme ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$, on obtient: $\ln(1 + e^{-x}) > \ln 1$

Conclusion: Pour tout x réel, $d(x) > 0$.

($\mathcal{C}$) est strictement au-dessus de (D).

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(e^x + 1) - \dfrac{2}{3}x$.

Pour tout x réel, $1 + e^{-x} = 1 + \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$

Or, pour $a > 0$ et $b > 0$, $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

$\ln(1 + e^{-x}) = \ln \dfrac{e^x+1}{e^x} = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) = \ln(e^x + 1) - x$.

$f(x) = (\ln(e^x + 1) - x) + \dfrac{1}{3}x = \ln(e^x + 1) - \dfrac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, il vient comme pour l'étude en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \ln 1 = 0$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{2}{3}x = +\infty$, on obtient: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque et complément:

on a montré en m^me temps que la droite (D′) d'équation $y = -\dfrac{2}{3}x$ est une asymptote à ($\mathscr{C}$) et

puisque $\ln(1 + e^x) > 0$, ($\mathscr{C}$) est au-dessus de (D′)

2. a. On note f ' la fonction dérivée de la fonction f .

Montrer que pour tout x réel, f ' (x) = $\dfrac{e^x-2}{3(e^x+1)}$.

f est la somme de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

u: $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$ et $x \mapsto \dfrac{1}{3}x$.

u est la composée des fonctions $x \mapsto 1 + e^{-x} \mapsto \ln(1 + e^{-x})$

D'où, $u'(x) = -e^{-x} \times \dfrac{1}{1+e^{-x}} = -\dfrac{1}{e^x+1}$, puis $f'(x) = -\dfrac{1}{e^x+1} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-3+e^x+1}{3(e^x+1)} = \dfrac{e^x-2}{3(e^x+1)}$

b. En déduire les variations de la fonction f .

Le signe de $f'(x)$ est celui de $e^x - 2$, puisque $3(e^x + 1) > 0$

$e^x - 2 = 0$ si et seulement si $x = \ln 2$

$e^x - 2 > 0$ si et seulement si $x > \ln 2$

$e^x - 2 < 0$ si et seulement si $x < \ln 2$

f est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2]$, est strictement croissante sur $[\ln 2; +\infty[$.
f atteint son minimum en ln 2 et ce minimum vaut

$m = f(\ln 2) = \ln(1 + \dfrac{1}{2}) + \dfrac{1}{3}\ln 2 = \ln(\dfrac{3}{2}) + \dfrac{1}{3}\ln 2 = \ln 3 - \dfrac{2}{3}\ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln(1+e^{-x})\,dx$.

On a montré à la partie A/1c) que $d(x) = f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1+e^{-x})$ est positif, d'où, l'intégrale de 0 à n ($n > 0$) est l'aire en unités d'aire du domaine décrit.

$d_n = \int_0^n \ln(1+e^{-x})\,dx$

2. On admet que pour tout réel x, $\ln(1+e^{-x}) \leqslant e^{-x}$.

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$. La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$, est-elle convergente ?

Remarque:

$\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$ se démontre par exemple en étudiant la variation sur $[0; +\infty[$ de la fonction

$\phi : x \mapsto \ln(1+x) - x$.

Comme $\phi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$, l'étude du signe de $-x$ montre que ϕ est décroissante sur $[0; +\infty[$.

ϕ admet un maximum $\phi(0) = 0$, d'où, pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) - x \leqslant 0$

Les fonctions $x \mapsto \ln(1+e^{-x})$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues sur $[0; n]$.

Comme l'intégration conserve l'ordre, $\int_0^n \ln(1+e^{-x})\,dx \leqslant \int_0^n e^{-x}\,dx$

Une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$, donc, $\int_0^n e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^n = -e^{-n} - (-1) = 1 - e^{-n}$

Comme $e^{-n} > 0$, on a: $1 - e^{-n} < 1$.

Finalement: $d_n \leqslant \int_0^n e^{-x}\,dx \leqslant 1$

D'autre part, $d_{n+1} - d_n = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-x})\,dx - \int_0^n \ln(1+e^{-x})\,dx = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\,dx$ (Chasles)

Comme $\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) > 0$, la différence est positive et la suite (d_n) est croissante.

La suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$ étant croissante et majorée par 1 est convergente.

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe ($\mathscr{C}$).

On note (T) la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

Le coefficient directeur de (T) est le nombre dérivé $f'(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0-2}{3(\mathrm{e}^0+1)} = \dfrac{-1}{6}$

Pour construire (T), on repère le point de ($\mathscr{C}$) sur l'axe des ordonnées et on trace la droite de pente $-\dfrac{1}{6}$ ...

2. Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soient M et N deux points de la courbe ($\mathscr{C}$) d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

Soit a un réel non nul et, M et N les points de ($\mathscr{C}$) d'abscisses opposées a et $-a$.

On cherche le coefficient directeur de la droite (MN): $\dfrac{y_M-y_N}{x_N-x_M} = \dfrac{f(a)-f(-a)}{2a}$

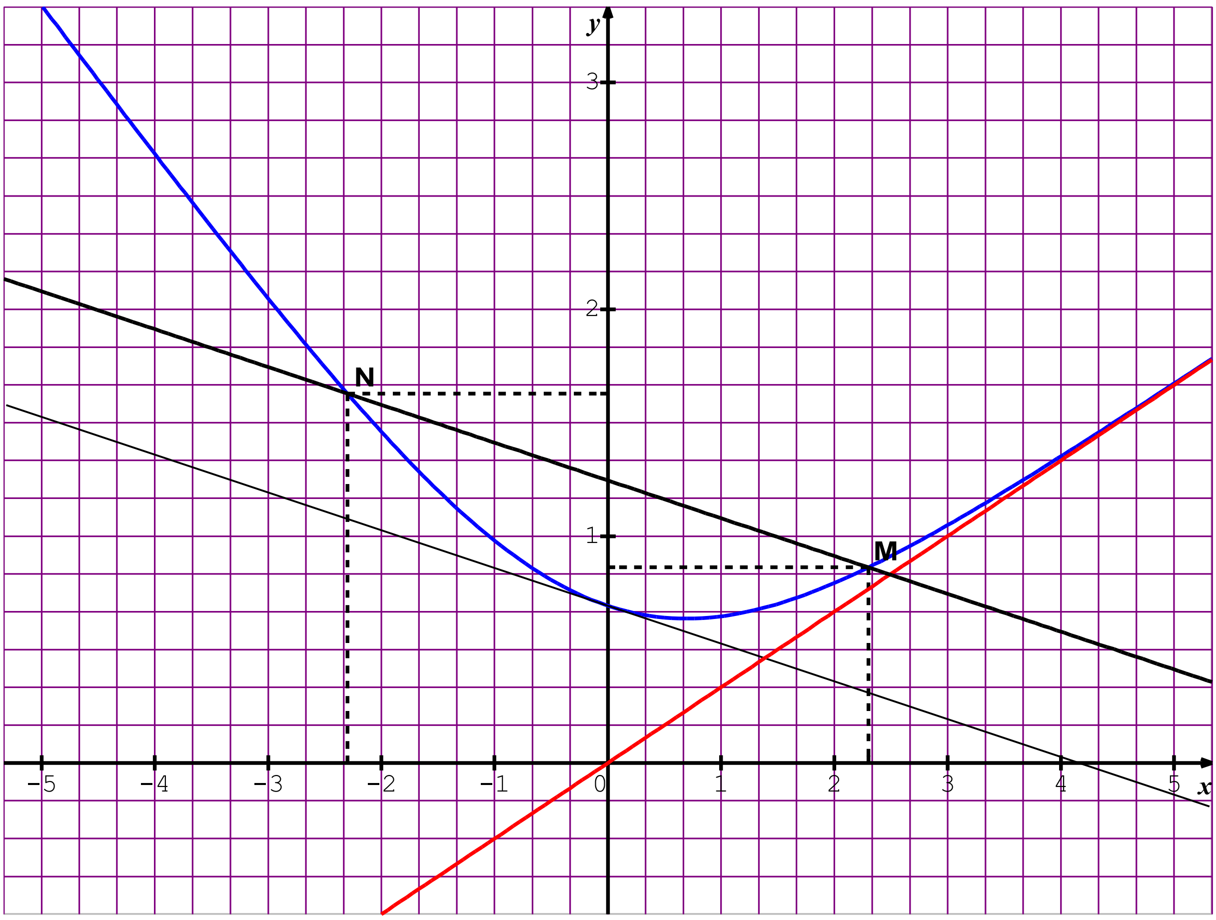
$f(a)-f(-a) = \ln(\mathrm{e}^a+1)-\dfrac{2}{3}a-\left(\ln(1+\mathrm{e}^{-a})-\dfrac{2}{3}(-a)\right) = \ln \dfrac{\mathrm{e}^a+1}{1+\mathrm{e}^{-a}} - \dfrac{4}{3}a$

Or, $\dfrac{\mathrm{e}^a+1}{1+\mathrm{e}^{-a}} = \mathrm{e}^a$, car, $1+\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{\mathrm{e}^a+1}{\mathrm{e}^a}$

On obtient, $f(a)-f(-a) = \ln \dfrac{\mathrm{e}^a+1}{1+\mathrm{e}^{-a}} - \dfrac{4}{3}a = \ln(\mathrm{e}^a) - \dfrac{4}{3}a = a - \dfrac{4}{3}a = -\dfrac{1}{3}a$

le coefficient directeur de la droite (MN): $\dfrac{y_M-y_N}{x_N-x_M} = \dfrac{f(a)-f(-a)}{2a} = -\dfrac{1}{3}a \times \dfrac{1}{2a} = -\dfrac{1}{6} = f'(0)$

Ce qui prouve que la droite (MN) est parallèle à (T).



EXERCICE 3 4 points

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

1. a. Déterminer les coordonnées des points I et J.

I milieu de [EF], donc, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$. Or, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$, d'où, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

$I(\frac{1}{2}\,; 0; 1)$

J symétrique de E par rapport à F, d'où, F milieu de [EJ].

Par conséquent: $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AJ})$, soit: $\overrightarrow{AJ} = 2\,\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

$J(2\,; 0; 1)$

b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ *est un vecteur normal au plan (BGI).*

Évaluons les produits scalaires $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI}$.

$\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 0 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0$

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + 1\times 1 = 0$

Les produits scalaires étant nuls, le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (*BGI*), d'où, le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

Pour tout point $M(x; y; z)$ de (*BGI*), $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$.

Or, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$, donc, $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BM} = 2(x-1) - y + z$

Une équation du plan (*BGI*) est: $2(x-1) - y + z = 0$ ou encore $2x - y + z - 2 = 0$

d. Calculer la distance du point F au plan (BGI).

La distance de F au plan (*BGI*) est égale à $\frac{|2x_F - y_F + z_F - 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|2\times 1 - 0 + 1 - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

(Δ) étant orthogonale au plan (*BGI*), un vecteur directeur de (Δ) est $\overrightarrow{DJ}$.

Pour tout point $M(x; y; z)$ de (Δ), $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont colinéaires.

Il existe donc un réel t tel que $\overrightarrow{FM} = t\,\overrightarrow{DJ}$

$\begin{cases}x-1=t\times 2\\y=t\times(-1)\\z-1=t\times 1\end{cases}$, soit, $\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.

Il suffit de montrer que les cordonnées de K vérifient le système précédent du a)

Comme K est le milieu de [AH], on a: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$

$K\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

On cherche s'il existe t tel que $\begin{cases}0=1+2t\\\frac{1}{2}=-t\\\frac{1}{2}=1+t\end{cases}$.

$t = -\dfrac{1}{2}$ est la solution des trois équations, ce qui prouve que K appartient à (Δ).

c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{5}{6}\right)$.

Le point L s'il existe a ses coordonnées qui vérifient les équations du plan (BGI) et de (Δ).

$\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$. On en déduit: $2(1 + 2t) - (-t) + 1 + t - 2 = 0$.

Soit $6t = -1$.

$t = -\dfrac{1}{6}$.

$x = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$; $y = \dfrac{1}{6}$, $z = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$ et comme $2\times\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6} - 2 = 0$,

la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en L de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{5}{6}\right)$.

d. Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

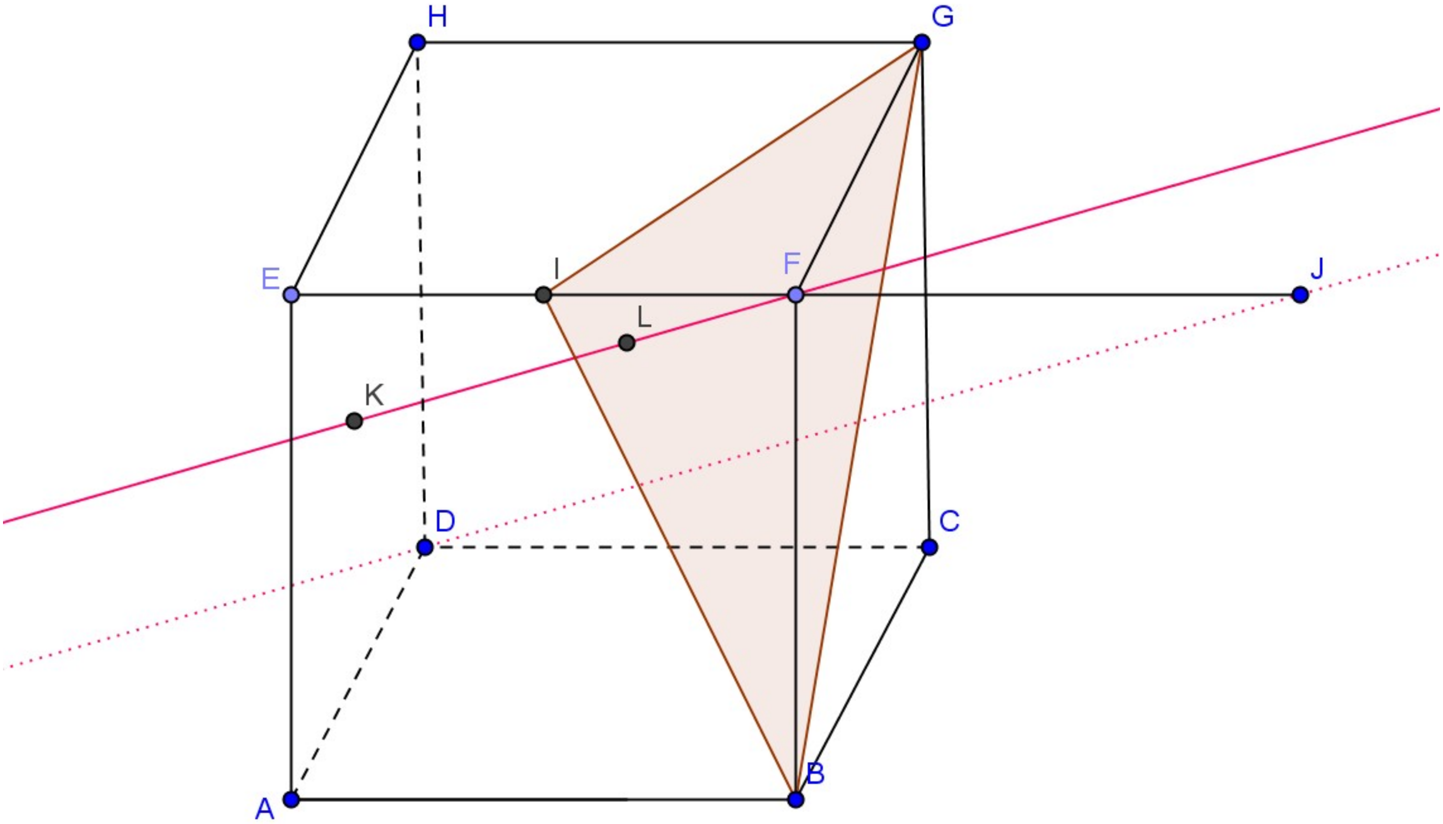
Il suffit de chercher si le point L est sur deux des hauteurs du triangle BGI.

On peut évaluer les produits scalaires: $\overrightarrow{GL}\cdot\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BL}\cdot\overrightarrow{GI}$.

$\overrightarrow{GL}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{5}{6} \\ -\dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{GL}\cdot\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{6} + 0 - \dfrac{1}{6} = 0$

$\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{5}{6} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{BL}\cdot\overrightarrow{GI} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6} + 0 = 0$

Ce qui prouve que L est l'orthocentre du triangle BGI.



EXERCICE 4 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ *(unité graphique : 2 cm).*

On considère les points A, B et C d' affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \overline{z_A}$ *et* $z_C = -3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

$$|z_A| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \text{ et } \theta_A \text{ vérifie } \cos\theta_A = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\theta_A = \frac{1}{2}, \text{ d'où } \theta_A = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$$

$z_A = \sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $z_B = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

Remarque : $z_C = 3\, e^{i\pi}$

2. Placer les points A, B et C.

Voir figure ci-dessous

3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -i\sqrt{3}$, d'où, $AB = \left|-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = z_B$, d'où, $AC = \sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = z_A$, d'où, $BC = \sqrt{3}$

Ce qui prouve que ABC est un triangle équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'afillée z, associe le point M' d'affixe z' = $\frac{1}{3}iz^2$.

On note O' , A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

$$z_{A'} = \frac{1}{3}\,\mathrm{i}\left(\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{i\frac{13\pi}{6}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_{B'} = \frac{1}{3}\,\mathrm{i}\left(\sqrt{3}e^{i-\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \mathrm{e}^{i-\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{i\frac{-7\pi}{6}} = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$$

z_{C'} = $\frac{1}{3}\,\mathrm{i}\,(-3)^2 = 3\,\mathrm{i} = 3\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$

b. Placer les points A', B' et C'.

Voir figure ci-dessous

c. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

D'après les écritures exponentielles des affixes de *A* et de *B'*, on a: $\arg(z_A) = \arg(z_B{}') \ [2\pi]$

Ce qui prouve que les points *O, A* et *B'* sont alignés.

D'après les écritures exponentielles des affixes de *A'* et de *B*, on a: $\arg(z_{A'}) = \arg(z_B) + \pi \ [2\pi]$

Ce qui prouve que les points *O, A'* et *B* sont alignés.

d. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f .

Déterminer les affixes des points G et G'.

Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C'?

G isobarycentre des points *O, A, B* et *C* équivaut à 4 $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$z_G = \frac{1}{4}(z_O + z_A + z_B + z_C) = \frac{1}{4}(3-3) = -\frac{3}{2}$.

G', l'image de *G* par *f* a pour affixe $z_{G'} = \frac{1}{3}\,\mathrm{i}\,\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\,\mathrm{i}$.

L'isobarycentre des points *O', A', B'* et *C'* a pour affixe: $\frac{1}{4}\left(0+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)+3\,\mathrm{i}\right) = \mathrm{i}$

G' n'est pas l'isobarycentre des points *O', A', B'* et *C'*

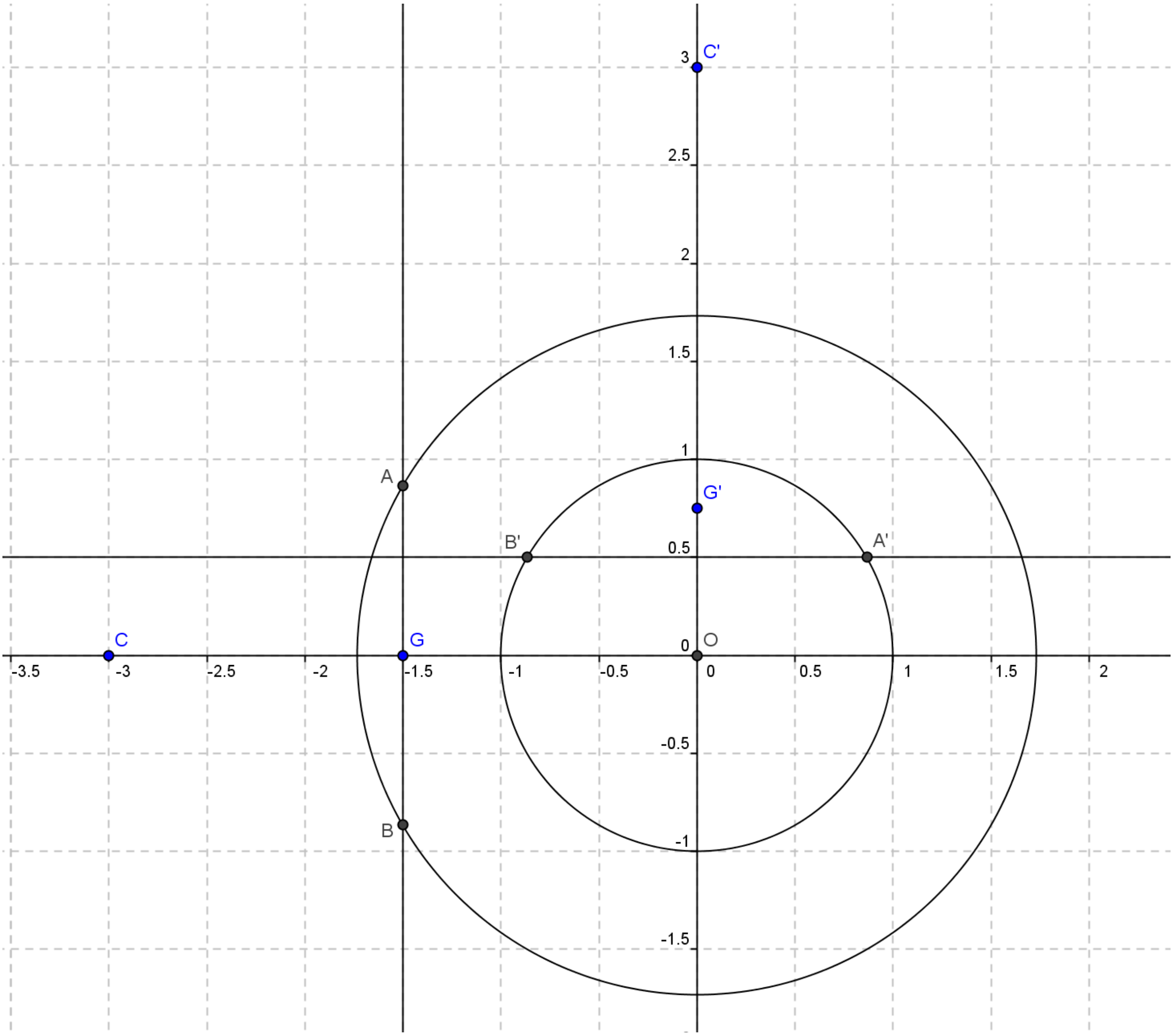
2. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. *(On ne demande pas de tracer cette parabole)*

M appartient à la droite (*AB*) si et seulement si $z = -\frac{3}{2} + b\mathrm{i}$ où *b* est un réel.

Son imagé *M'* par *f* a donc pour affixe $z' = \frac{1}{3}\,\mathrm{i}\,\left(-\frac{3}{2}+bi\right)^2 = \frac{1}{3}\,\mathrm{i}\left(\frac{9}{4} - 3b\mathrm{i} - b^2\right) = b + \mathrm{i}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}b^2\right)$

Les coordonnées de *M'* sont $\left(b;\ \frac{3}{4} - \frac{1}{3}b^2\right)$ et par conséquent l'équation de la parabole est vérifiée.

$\begin{cases} x_{M'} = b \\ y_{M'} = -\frac{1}{3}b^2+\frac{3}{4} \end{cases}$ où $b \in \mathbb{R}$.



C'
G'
A
B'
A'
C
G
O
B
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5