Index

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats............................1
EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats............................3
EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire 5
EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats............................8

EXERCICE 1 ***5 points*** ***Commun à tous les candidats***

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$*, on donne les trois points : A(1 ; 2 ; −1), B(−3 ; −2 ; 3) et C(0 ; −2 ; −3)*

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB}$ (–4 ; –4 ; 4) et $\overrightarrow{AC}$ (–1 ; –4 ; –2).

Comme il n'existe aucun réel t tel que $-4\times t = -1$ et $-4\times t = -4$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion : les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ *(2 ; −1 ; 1) est un vecteur normal au plan (ABC).*

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -4\times2 + (-4)\times(-1) + 4\times1 = -8 + 4 + 4 = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont donc orthogonaux.

et $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = -1\times2 + (-4)\times(-1) + (-2)\times1 = -2 + 4 - 2 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{n}$ sont donc orthogonaux.

Conclusion : Le vecteur $\vec{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est un vecteur normal de ce plan.

2. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est x + y −z +2 = 0.

Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

Un vecteur normal à (P) est $\vec{n_P}$ (1 ; 1 ; –1)

Comme $\vec{n_P}\cdot\vec{n} = 1\times2 + 1\times(-1) + (-1)\times1 = 2 - 1 - 1 = 0$, es vecteurs $\vec{n_P}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Conclusion : les plans (ABC) et (P), ayant leurs vecteurs normaux orthogonaux, sont perpendiculaires.

3. On appelle G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, −1) et (C, 2).

a. Démontrer que le point G a pour coordonnées (2 ; 0 ; −5).

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1\times x_A-1\times x_B+2\times x_C}{1-1+2} \\ y_G=\dfrac{1\times y_A-1\times y_B+2\times y_C}{1-1+2} \\ z_G=\dfrac{1\times z_A-1\times z_B+2\times z_C}{1-1+2} \end{cases}, \text{ d'où, } \begin{cases} x_G=\dfrac{1+3+0}{2}=2 \\ y_G=\dfrac{2+2-4}{2}=0 \\ z_G=\dfrac{-1-3-6}{2}=-5 \end{cases}$$

b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).

$\overrightarrow{CG}$ (2 – 0 ; 0 – (–2) ; - 5 – (–3)), d'où $\overrightarrow{CG}$ (2 ; 2 ; –2)

On en déduit $\overrightarrow{CG} = 2\ \overrightarrow{n_P}$.

Conclusion : Le vecteur $\overrightarrow{CG}$ étant un vecteur non nul colinéaire au vecteur normal à (P), la droite (CG) est orthogonale au plan (P).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

M(x ; y ; z) ∈ $\overrightarrow{CG}$ si et seulement si $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{n_P}$ sont colinéaires

On a donc : il existe un réel t tel que $\overrightarrow{CM} = t\ \overrightarrow{n_P}$.

$$\begin{cases} x-0=t\times1 \\ y-(-2)=t\times1 \\ z-(-3)=t\times(-1) \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Conclusion : une représentation paramétrique de la droite (CG) est $\begin{cases} x=t \\ y=-2+t \\ z=-3-t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).

Les coordonnées de H sont solutions du système : $\begin{cases} x=t \\ y=-2+t \\ z=-3-t \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$

On a donc : t + (– 2 + t) – (–3 – t) + 2 = 0, soit : 3t = –3, puis : t = –1

On a donc : H est le point de la droite (CG) de paramètre –1

Conclusion : H(–1 ; –3 ; –2)

4. Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|$ = 12 est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.

G, étant le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, −1) et (C, 2), on a :

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\ \overrightarrow{MC} = (1 - 1 + 2)\ \overrightarrow{MG} = 2\ \overrightarrow{MG}$

d'où,

$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|$ = 12 équivaut à 2 MG = 12, soit : MG = 6

(S) est la sphère de centre G et de rayon 6.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).

La distance de G à P est égale à GH puisque H est le point d'intersection de la perpendiculaire à (P) passant par G et de (P).

GH = $\sqrt{(-1-2)^2+(-3-0)^2+(-2-(-5))^2}$ = $\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+3^2}$ = 3 $\sqrt{3}$

Comme 3 $\sqrt{3}$ < 6, le plan P coupe la sphère selon un cercle de centre H et de rayon r vérifiant $r^2 = 6^2 - 27 = 9$

Conclusion : l'intersection du plan (P) et de la sphère (S) est le cercle de centre H et de rayon 3.

EXERCICE 2 ***3 points*** ***Commun à tous les candidats***

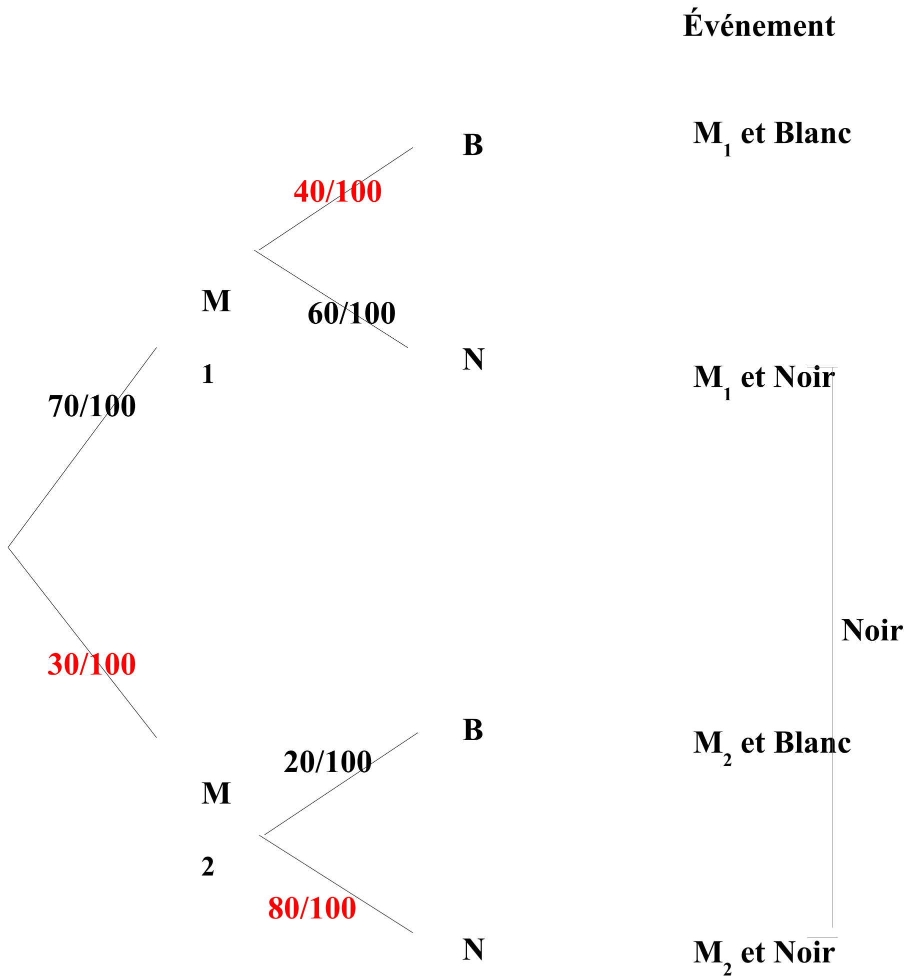
Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, 0 sinon.

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70% des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60% ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20% des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.



On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{3}{5}$ Réponse B : $\frac{4}{5}$ Réponse C : $\frac{3}{50}$ Réponse D : $\frac{6}{25}$

Preuve : On cherche $P(M_2 \cap N) = P(M_2) \times P_{M_2}(N) = (1 - \frac{70}{100}) \times (1 - \frac{20}{100}) = \frac{3}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{6}{25}$

b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{21}{50}$ Réponse B : $\frac{33}{50}$ Réponse C : $\frac{3}{5}$ Réponse D : $\frac{12}{25}$

Preuve : On cherche $P(M) = P(M_1 \cap N) + P(M_2 \cap N)$ car M_1 et M_2 réalisent une partition de l'univers

$P(M) = \frac{70}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{6}{25} = \frac{33}{50}$

c. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

Réponse A : $\frac{4}{11}$ Réponse B : $\frac{6}{25}$ Réponse C : $\frac{7}{11}$ Réponse D : $\frac{33}{50}$

Preuve : On cherche $P_N(M2) = \frac{P(M_2 \cap N)}{P(N)} = \frac{6}{25} \times \frac{50}{33} = \frac{4}{11}$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.

Les boules sont indiscernables au toucher.

L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

Analyse : L'urne contient 9 boules, on tire **simultanément** 3 boules, le nombre d'éventualités est égal au nombre de parties à 3 éléments pris parmi 9, soit :

$\text{Card(Univers)} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

a. La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

Réponse A : $\frac{11}{81}$ Réponse B : $\frac{2}{7}$ Réponse C : $\frac{5}{84}$ Réponse D : $\frac{4}{63}$

Preuve : Les trois boules de même couleur sont :

soit 3 boules jaunes prises parmi les 4, soit les 3 boules bleues.

Le nombre de cas favorables est : $\binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 4 + 1$

b. La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

Réponse A : $\frac{2}{7}$ Réponse B : $\frac{1}{7}$ Réponse C : $\frac{1}{21}$ Réponse D : $\frac{79}{84}$

Preuve : Les trois boules de trois couleurs différentes , d'où, 1 boule jaune prise parmi les 4, une boule rouge parmi 2 et une boule bleue parmi 3, soit :

nombre de cas favorables : $4\times2\times3 = 24$ et $\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

c. On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.

Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'événement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

Réponse A : 76 Réponse B : 71 Réponse C : 95 Réponse D : 94

Preuve : Soit " obtenir trois boules jaunes " l'événement appelé " Succès ".

$P(\text{Succès}) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$

Soit n le nombre minimal d'expériences et X la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

Puisque les trois boules sont remises, X suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{21}$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n$

On résout : $1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n \geqslant 0,99$, d'où, $\left(\frac{20}{21}\right)^n \leqslant 0,01$ (Puis, on applique ln et comme $\ln\frac{20}{21} < 0$)

n est le plus petit entier naturel vérifiant : $n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{20}{21}\right)}$

Une valeur approchée de $\dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{20}{21}\right)}$ est : 94,3

EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On suppose connu le résultat suivant : Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', arg (z ×z') = arg(z) + arg(z') à 2π près.

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' , on a : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ *à 2π près.*

Démonstration : On sait que $z' \times \frac{1}{z'} = 1$, donc, d'après le prérequis :

$\arg\left(z' \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z') + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = 0$ à 2π près, car, 1 est un réel strictement positif d'argument 0 à 2π près.

On en déduit : $\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg(z')$ à 2π près

Comme $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, on obtient : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) + \arg(\frac{1}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')$ à 2π près.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. Déterminer le module et un argument de z_A.

$|z_A| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ et par conséquent : $z_A = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

Comme $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, un argument de $1 - i$ est $-\frac{\pi}{4}$.

Conclusion : $1 - i$ est le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $-\frac{\pi}{4}$.

(Se rappeler que cela est équivalent à : $z_A = \sqrt{2}\, e^{i-\frac{\pi}{4}}$)

2. a. Écrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

$$\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+\sqrt{3}-1+(2+\sqrt{3}+1)i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i}{2}$$

b. Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

Une méthode :

On calcule le module de $\frac{1+\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i}{2}$ et un argument de $\frac{1+\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i}{2}$

module :

$$\left|\frac{z_B}{z_A}\right| = \frac{1}{2} \times \sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(3+\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+9+6\sqrt{3}+3} = \frac{1}{2} \times \sqrt{4(4+2\sqrt{3})} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}$$

Ou bien : $\left|\frac{z_B}{z_A}\right| = \frac{|z_B|}{|z_A|} = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} == \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}$

Soit θ un argument de $\frac{1+\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2} \times \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{(3+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{1}{2} \times \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

d'où, $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Une autre méthode :

On développe $(1 + \sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$(1 + \sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{3}} = (1 + \sqrt{3})\times\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+3}{2} = \frac{z_B}{z_A}$$

Conclusion :

$\dfrac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

c. En déduire la forme exponentielle de z_B.

On a vu au B/1/ que $z_A = \sqrt{2}\,e^{i-\frac{\pi}{4}}$

$z_B = (1+\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}} \times z_A = (1+\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}\,e^{i-\frac{\pi}{4}} = (1+\sqrt{3})\times\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$

$= (\sqrt{2}+\sqrt{6})\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

Conclusion : z_B est le nombre complexe de module $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ et d'argument $\dfrac{\pi}{12}$ à 2π près.

3. On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.

a. Déterminer l'affixe du point B_1.

L'écriture complexe de la rotation r est : $z' - z_O = e^{i-\frac{\pi}{6}}(z - z_O)$

soit : $z' = e^{i-\frac{\pi}{6}}\,z$

ou bien, comme $e^{i-\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ $\quad z' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)z$

Avec l'écriture algébrique :

$z_{B_1} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)(2+\sqrt{3}+i) = \sqrt{3} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} + i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2+\sqrt{3} - i$

Avec l'écriture exponentielle :

$z_{B_1} = e^{i-\frac{\pi}{6}} \times (\sqrt{2}+\sqrt{6})\,e^{i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{2}+\sqrt{6})\,e^{i\frac{-\pi}{12}}$

b. En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$.

L'affixe de B_1 étant le conjugué de celle de B, les deux points sont symétriques par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$.

4. Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$

On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que M' = M.

a. Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).

O est invariant par r et par la symétrie d'axe $(O\,;\vec{u})$, on a : $O' = O_1 = O$.

Le point O appartient à l'ensemble (E).

On a vu que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$, donc, $B' = B$

Le point B appartient à l'ensemble (E).

b. Soit M un point distinct du point O.

Son affixe z est égale à $\rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.

Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho\, e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).

L'affixe z_1 du point M_1 est : $z_1 = e^{i-\frac{\pi}{6}} \times \rho e^{i\theta} = \rho\, e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$ d'après l'écriture complexe de r.

L'affixe z' du point M' est le conjugué de z_1, soit :

$z' = \overline{z_1} = \overline{\rho e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}} = \rho\, e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$

Or, $M' = M$ et $M \neq O$ si et seulement si $z' = z$ et $z \neq 0$

$\rho\ e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} = \rho e^{i\theta}$ si et seulement si $\frac{\pi}{6} - \theta = \theta + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{12} - k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

c. Déterminer l'ensemble (E).

L'ensemble des points M du plan ayant un argument égal à $\frac{\pi}{12} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ est la droite privée de O et dirigée par un vecteur $\vec{w}$ telle que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{12} + k\pi$

Comme un argument de zB est $\frac{\pi}{12}$, cette droite passe par B (évidemment !).

Or, O est un point de (E)

L'ensemble (E) est donc la droite (OB).

EXERCICE 4 ***7 points*** ***Commun à tous les candidats***

Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞[par f (x) = x +e^{-x}.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur [0 ; +∞[.

f est la somme de deux fonctions définies et dérivables sur [0 ; +∞[, $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$

donc, f est dérivable sur [0 ; +∞[, et, pour tout réel x positif ou nul, on a : $f'(x) = 1 + (-1)\,e^{-x} = 1 - e^{-x}$

Comme $x \geqslant 0$, on a : $-x \leqslant 0$ et $e^{-x} \leqslant 1$, car, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^0 = 1$.

Par conséquent : Pour $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$.

f est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

2. Déterminer la limite de f en +∞.

On sait : $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$, d'où, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ (limite de fonction composée).

Par somme, on obtient : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$.

La droite d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) au voisinage de +∞.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *à termes positifs définie par :*

$u_1 = 0$*et, pour tout entier naturel n non nul,* $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leqslant x$.

On pourra étudier la fonction g définie sur [0 ; +∞[par $g(x) = x - \ln(1+x)$.

Comme pour $x \geqslant 0$, $1 + x > 0$,

g est la différence de deux fonctions définies et dérivables sur [0 ; +∞[, d'où, g est dérivable sur (0 ; +∞[, et, pour tout réel x positif ou nul, on a :

$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$ qui est positif sur $[0\ ;+\infty[$

La fonction g est croissante sur $[0\ ;+\infty[$ et $g(0) = 0$, d'où, $g(x) \geqslant 0$ sur $[0\ ;+\infty[$.

Conclusion : $x - \ln(1+x) \geqslant 0$, soit : $\ln(1+x) \leqslant x$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n)+\dfrac{1}{n}$.

n étant un entier naturel strictement positif, on pose $x = \dfrac{1}{n}$ dans la relation précédente :

$\ln(1+\dfrac{1}{n}) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Comme $1+\dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n}$ et que $\ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$, il vient :

$\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Conclusion : $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n)+\dfrac{1}{n}$.

$f[\ln(n)] = \ln(n) + \mathrm{e}^{-\ln(n)}$

Comme $-\ln(n) = \ln\dfrac{1}{n}$ et que , pour tout $X > 0$, $\mathrm{e}^{\ln X} = X$,

$f[\ln(n)] = \ln(n) + \mathrm{e}^{-\ln(n)} = \ln(n) + \mathrm{e}^{\ln\frac{1}{n}} = \ln(n)+\dfrac{1}{n}$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.

Initialisation :

Pour $n = 1$, on a : $\ln 1 = 0$ et $u_1 = 0$. La proposition est donc vérifiée au premier rang.

Hérédité :

Soit **un** entier n supérieur ou égal à 1 tel que $\ln(n) \leqslant u_n$.

(Il s'agit de monter que cette hypothèse implique $\ln(n+1) \leqslant u_{n+1}$.)

Comme f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$ et que $n \geqslant 1$ implique $\ln(n) \geqslant 0$, on a : $f[\ln(n)] \leqslant f(u_n)$

D'après le 3/, $f[\ln(n)] = \ln(n)+\dfrac{1}{n}$ et d'après le 2/, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$,

d'où, $\ln(n+1) \leqslant f[\ln(n)] \leqslant f(u_n)$ et puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient :

$\ln(n+1) \leqslant u_{n+1}$.

On a montré : si la proposition est vraie pour un entier $n \geqslant 1$ alors elle est vraie pour l'entier suivant $n + 1$.

Conclusion :

D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

pour **tout** entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ et $\ln(n) \leqslant u_n$, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}$.

6. a. Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$

Soit $0 < k - 1 \leqslant x \leqslant k$

En appliquant la fonction inverse strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on a : $\frac{1}{k-1} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{k}$.

Comme l'intégration sur $[k-1 ; k]$ conserve l'ordre, on a : $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k-1}\,\mathrm{d}\,x \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}\,x$

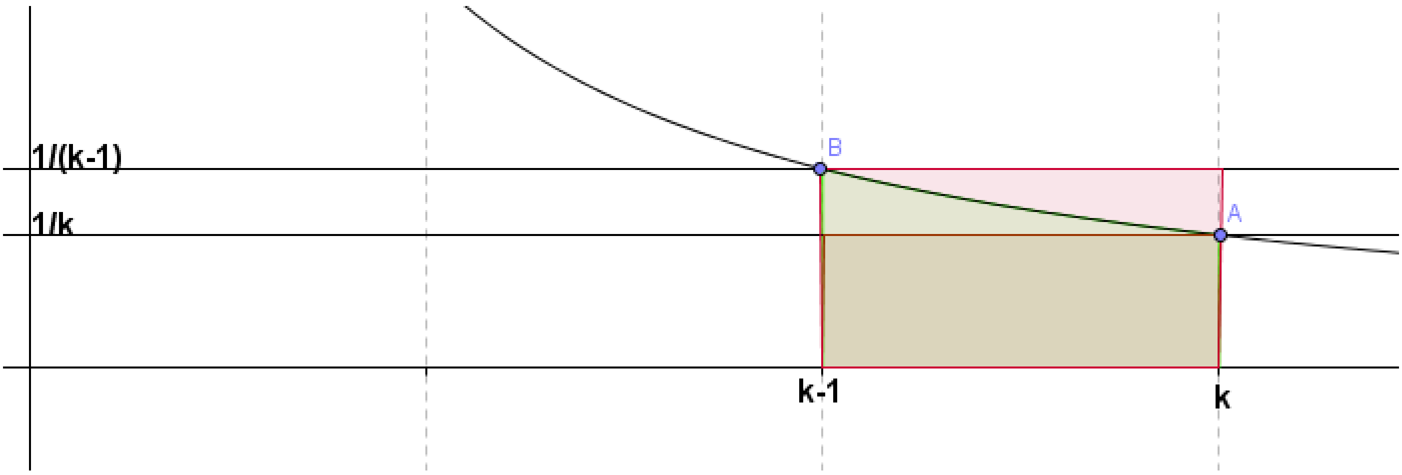
Or, $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k-1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{k-1} \int_{k-1}^{k} 1\,\mathrm{d}\,x$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{k} \int_{k-1}^{k} 1\,\mathrm{d}\,x$ et $\int_{k-1}^{k} 1\,\mathrm{d}\,x = [x]_{k-1}^{k} = 1$

On obtient : $\frac{1}{k-1} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \geqslant \frac{1}{k}$

Interprétation graphique :

L'aire sous l'hyperbole entre $k - 1$ et k est en u.a ;: $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$

Cette aire est supérieure à celle du rectangle de dimensions 1 et $\frac{1}{k}$ et inférieure à celle du rectangle de dimensions 1 et $\frac{1}{k-1}$.



b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n \leqslant 1+\ln(n-1)$.

En faisant la somme pour k entier allant de 2 à $n-1$ de toutes les inégalités, on a :

$k=2$ $\quad \frac{1}{2} \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

$k=3$ $\quad \frac{1}{3} \leqslant \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx$

...

$k=n-1$ $\quad \frac{1}{n-1} \leqslant \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\,dx$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1} \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx+\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx+\ldots+\int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\,dx$$

Or, $u_n \leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}$, soit : $u_n-1 \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}$

et, $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx+\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx+\ldots+\int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n-1} \frac{1}{x}\,dx$ (relation de Chasles)

$= \ln(n-1)$.

Conclusion :

$u_n-1 \leqslant \ln(n-1)$, soit : $u_n \leqslant 1+\ln(n-1)$.

7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1+\ln(n-1)$.

Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

Comme $n \geqslant 2$, $\ln(n) > 0$

En multipliant chaque membre de la double inégalité : $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1+\ln(n-1)$ par $\dfrac{1}{\ln n}$, on obtient :

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + \frac{\ln(n-1)}{\ln(n)}$$

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left[n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$, que $\lim\limits_{n\to 1} \ln(n) = \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$

D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 0.