Index

EXERCICE 1 4 points

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse

choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + i$ est :

a. 3 FAUX car $2\times 3 + 3 = 9$

b. i FAUX car $2\times\mathrm{i} - \mathrm{i} = \mathrm{i}$

c. 3 + i VRAI car $2(3 + \mathrm{i}) + 3 - \mathrm{i} = 9 + \mathrm{i}$

Commentaire: La résolution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + i$

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec ***x* et *y* réels**. On identifie les parties réelles et les prties imaginaires

$$2z + \overline{z} = 9 + \mathrm{i} \Leftrightarrow 2(x + \mathrm{i}y) + (x - \mathrm{i}y) = 9 + \mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$$

2. Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :

a. $|z| + 1$ FAUX (cf: Inégalité triangulaire)

b. $|z - 1|$ FAUX

c. $|\mathrm{i}\overline{z} + 1|$ VRAI

Commentaire: Différentes méthodes possibles ..

L'une peut consister à appliquer $|z|^2 = z.\overline{z} = x^2 + y^2$ et à comparer les carrés

Ce qui donne ici:

$|z + \mathrm{i}|^2 = (z + \mathrm{i})(\overline{z} - \mathrm{i}) = z.\overline{z} + \mathrm{i}(\overline{z} - z) + 1$ avec $\overline{z} - z = -2\mathrm{i}y$

a) $(|z| + 1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1$

b) $|z - 1|^2 = (z - 1)(\overline{z} - 1) = z.\overline{z} - (\overline{z} + z) + 1$ avec $\overline{z} + z = 2\mathrm{i}x$

c) $|\mathrm{i}\overline{z} + 1|^2 = (\mathrm{i}\overline{z} + 1)(-\mathrm{i}z + 1) = z.\overline{z} + \mathrm{i}(\overline{z} - z) + 1$

On peut aussi remarquer qu'un complexe et son conjugué ont le même module, d'où,

$|z + \mathrm{i}| = |\overline{z} - \mathrm{i}|$ et $|\mathrm{i}\overline{z} + 1| = |\mathrm{i}|\ |\overline{z} - \mathrm{i}| = |\overline{z} - \mathrm{i}|$ car $|\mathrm{i}| = 1$

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

Un argument d'un quotient est la différence des arguments, d'où, un argument α de $\dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est égal à

$\alpha = \arg(-1 + i\sqrt{3}) - \arg(\bar{z}) = \arg(-1 + i\sqrt{3}) + \theta\ [2\pi]$

Or $|-1+i\sqrt{3}| = 2$ et $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ou encore:

On pose $z = r\,e^{i\theta}$, d'où, $\bar{z} = r\,e^{-i\theta}$ et $(-1 + i\sqrt{3}) = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}} = \dfrac{2}{r}\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}$

a. $-\dfrac{\pi}{3} + \theta$ FAUX

b. $\dfrac{2\pi}{3} + \theta$ VRAI

c. $\dfrac{2\pi}{3} - \theta$ FAUX

4. Soit n un entier naturel. Le complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

Un complexe z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Or, $\sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$, d'où, $\arg(\sqrt{3} + i) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$,

Un argument de $\arg(\sqrt{3} + i)^n = n \times \left(\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$; $k \in \mathbb{Z}$

$n \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ si et seulement si $n = 3 + 6k$ avec avec k relatif

a. $n = 3$ FAUX

b. $n = 6k + 3$, avec k relatif VRAI

c. $n = 6k$ avec k relatif FAUX

5. Soient A et B deux points d'affixe respective i et −1.

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :

$|z - i| = |z + 1|$ si et seulement si $AM = BM$ si et seulement si M appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Or, O (origine du repère) est équidistant de A et B

a. la droite (AB) FAUX

b. le cercle de diamètre $[AB]$ FAUX

c. la droite perpendiculaire à (AB) passant par O VRAI

6. Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :

$|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ si et seulement si $\Omega M = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

L'ensemble des points M est le cercle de centre Ω et de rayon 5, d'où, $z = \omega + r\,e^{-i\theta}$ où r est le rayon du cercle et θ réel

a. $y = -x + 1$ FAUX

b. $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ FAUX

c. $z=1-\mathrm{i}+5\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel VRAI

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et 3i. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ est :

Par exemple, C est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, d'où, $z_C = \mathrm{i}(3\mathrm{i}-4)+4 = 1-4\mathrm{i}$

a. $1-4\mathrm{i}$ VRAI

b. $-3\mathrm{i}$ FAUX

c. $7+4\mathrm{i}$ FAUX

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1}=z$ est :

L'équation se ramène à une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, qui possède deux solutions conjuguées.

Les réponses a) et b) ne sont donc pas acceptables.

Résolution: Pour $z \neq 1$, $\frac{z-2}{z-1}=z$ si et seulement si $z-2=z^2-z$ si et seulement si $z^2-2z+2=0$

discriminant $\Delta = b^2-4ac = 4-8 = 4\mathrm{i}^2 = (2\mathrm{i})^2$ ....

a. $\{1-\mathrm{i}\}$ FAUX

b. L'ensemble vide FAUX

c. $\{1-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\}$ VRAI

EXERCICE 2 ***5 points***

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

Analyse de la phrase: On connaît donc les probabilités $P(F_1)$ et $P(F_2)$

La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

Analyse de la phrase: On connaît donc les probabilités conditionnelles $P_{F_1}(D)$ et $P_{F_2}(D)$

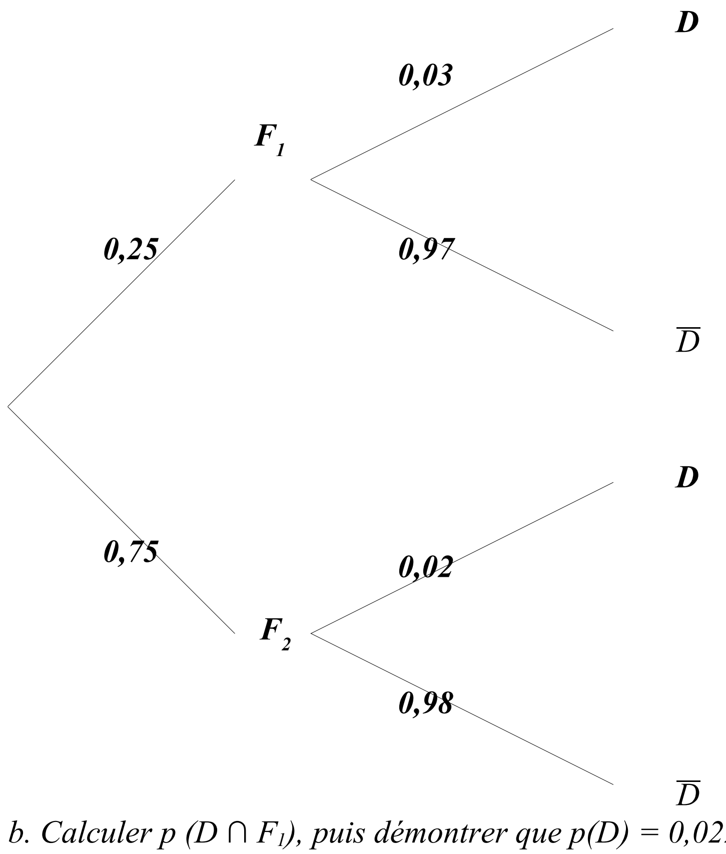
On note :

– D l'évènement « le composant est défectueux » ;

– F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur »

– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. a. Dessiner un arbre pondéré.



b. Calculer p (D ∩ F_1), puis démontrer que p(D) = 0,022 5.

$P(D \cap F_1) = P(F_1) \times P_{F_1}(D) = 0{,}25 \times 0{,}03 = 0{,}007\,5$

On a aussi: $P(D \cap F_2) = P(F_2) \times P_{F_2}(D) = 0{,}75 \times 0{,}02 = 0{,}015$

Comme $(D \cap F_1)$ et $(D \cap F_2)$ forment une partition de l'événement D, on a: $P(D) = 0{,}007\,5 + 0{,}015 = 0{,}022\,5$

c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

On cherche $P_D(F_1)$

$$P_D(F_1) = \frac{P(D \cap F_1)}{P(D)} = \frac{0{,}0075}{0{,}0225} = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} ***près.***

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

Un composant est soit défectueux, soit non défectueux. (Schéma de Bernoulli)

On répète 20 fois la commande.

Le fait d'être défectueux pour un composant n'a pas d'influence sur un autre composant (Indépendance).

Si on appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre de composants défectueux, Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}0225$. $\mathscr{B}(20;0{,}022\,5)$

On a alors $P(Y = k) = \binom{20}{k} 0{,}0225^k\ (1 - 0{,}0225)^{20-k}$

$P(Y \geqslant 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - 0{,}9775^{20} - 20 \times 0{,}0225 \times 0{,}9775^{19}$

La calculatrice donne: $P(Y \geqslant 2) \approx 0{,}07360$ ...

$P(Y \geqslant 2) \approx 0{,}074$ ***à*** 10^{-3} ***près par excès.***

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

a. Sachant que p(X > 5) = 0,325, déterminer λ.

On sait que $P(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^5 = e^{-5\lambda}$

On résout par conséquent l'équation d'inconnue λ: $e^{-5\lambda} = 0{,}325$

$e^{-5\lambda} = 0{,}325$ si et seulement si $-5\lambda = \ln 0{,}325$ si et seulement si $\lambda = \dfrac{\ln 0{,}325}{-5}$

La calculatrice donne: $\lambda \approx 0{,}224\,7$ ...

$\lambda \approx 0{,}225$ ***à*** 10^{-3} ***près par excès.***

Pour les questions suivantes, on prendra λ = 0,225.

b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

$P(X < 8) = 1 - e^{-0{,}225 \times 8} \approx 0{,}834\,7 \ldots \approx 0{,}835$ ***à*** 10^{-3} ***près par excès.***

$P(X > 8) = e^{-0{,}225 \times 8} \approx 0{,}165\,2 \ldots \approx 0{,}165$ ***à*** 10^{-3} ***près par défaut.***

c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

Puisque X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, on sait: $P_{(X>3)}(X > 8) = P(X > 5) = 0{,}325$ d'après 3a)

EXERCICE 3 6 points

Partie A : question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur [a ; +∞[. Compléter la phrase suivante :

«On dit que f admet une limite finie ℓ en +∞ si . . . »

On dit que la fonction f admet une limite finie l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

ou encore:

Soit I un intervalle ouvert contenant l.

Il existe x_0 dans $[a;+\infty[$ tel que $x > x_0$ implique $f(x) \in I$

2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f , g et h trois fonctions définies sur [a ; +∞[et ℓ un nombre réel.

Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers +∞, et si pour tout x assez grand g (x) ⩽ f (x) ⩽ h(x), alors la limite de f quand x tend vers +∞ est égale à ℓ.

Soit un intervalle I contenant l

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, il existe un réel x_1 tel que $x > x_1$ implique $g(x) \in I$ (i)

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, il existe un réel x_2 tel que $x > x_2$ implique $h(x) \in I$ (ii)

Puisque, pour tout x assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,

il existe un réel x_3 tel que $x > x_3$ implique $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ (iii)

Choisissons $x_0 = \max\{x_1, x_2, x_3\}$

Si $x > x_0$, les trois propositions (i), (ii), (iii) sont vérifiées, d'où, $f(x) \in I$.

Ce qui prouve le théorème.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation y = −x − 1 est asymptote à (C). On a représenté sur la feuille annexe la courbe (C) et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse a.

Rappel: Un point $M(x; y) \neq A(a; f(a))$ appartient à T si et seulement si $\dfrac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$ (coefficient directeur de la tangente au point de contact A)

Une équation de (T) est: $y = f'(a)(x-a) + f(a) = (\mathrm{e}^a - 1)(x-a) + \mathrm{e}^a - a - 1 = (\mathrm{e}^a - 1)x + \mathrm{e}^a(1-a) - 1$

2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que b − a = −1.

Le point $N(b;\ y_N)$ a ses coordonnées solutions du système: $\begin{cases} y = -x-1 \\ y = (\mathrm{e}^a - 1)x + \mathrm{e}^a(1-a) + 1 \end{cases}$.

L'abscisse b est donc la solution de l'équation aux abscisses, d'où, b vérifie l'égalité:

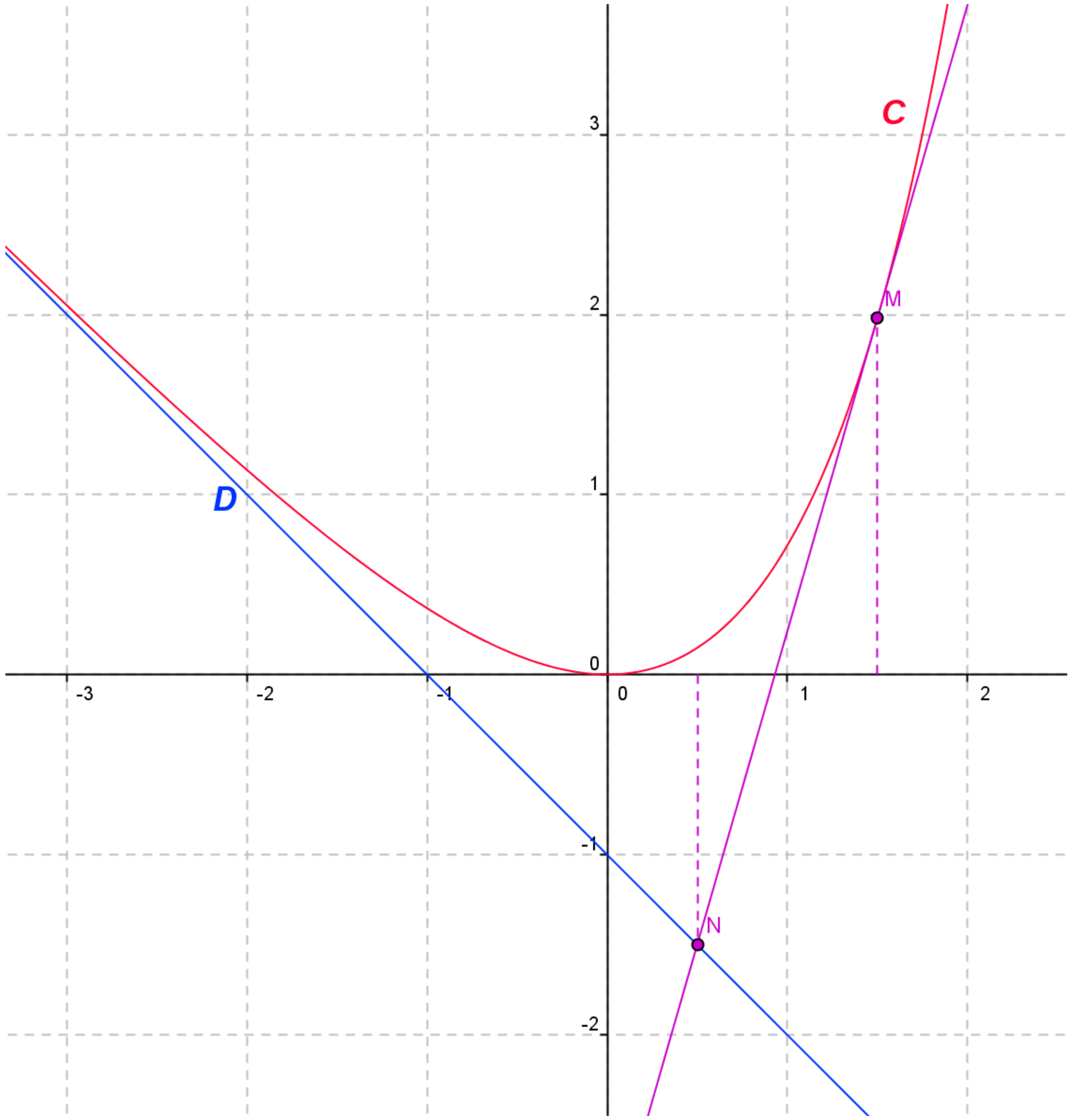
$-b - 1 = (\mathrm{e}^{a} - 1)b + \mathrm{e}^{a}(1 - a) - 1$
qui équivaut à $\mathrm{e}^{a}\, b + \mathrm{e}^{a}(1 - a) = 0$
qui équivaut à $b = a - 1$ puisque $\mathrm{e}^{a} \neq 0$

3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

Puisque $a = 1,5$, on a $b = 0,5$

On place le point N d'abscisse 0,5 sur la droite D et le point d'abscisse 1,5 sur la courbe C.

La droite (MN) est la tangente T.



Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f .

D'après la représentation graphique de f, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. ($f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$)

2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

(1) $e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1+\frac{1}{n}$ (2) $e^{-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1-\frac{1}{n+1}$

On a donc:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$

En posant $x = \frac{1}{n}$, il vient: $e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1+\frac{1}{n}$ (l'inégalité (1) est prouvée)

En posant $x = -\frac{1}{n+1}$, il vient: $e^{-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1-\frac{1}{n+1}$ (l'inégalité (1) est prouvée)

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

En élevant chaque membre de (1) à la puissance entière n, l'inégalité est conservée:

$\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, soit, $e \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n : e $\leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Remarquons d'abord que $1-\frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

En élevant chaque membre de (2) à la puissance entière $n+1$ l'inégalité est conservée:

$\left(e^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$, soit $e^{-1} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > 0$

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, on obtient:

$e \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ et comme $\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$, on a montré: $e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *, puis sa limite en* $+\infty$.

Comme $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$, l'inégalité du 4) s'écrit: $e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$

En multipliant les deux membres par $\frac{n}{n+1}$ strictement positif, $\frac{n}{n+1} e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

D'après 3), on a: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$

Finalement: $\frac{n}{n+1} e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, le théorème des gendarmes s'applique et, on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

EXERCICE 4 ***5 points***

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. a. Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

Par définition du projeté orthogonal sur un plan, (OH) est orthogonale au plan (ABC), donc, (OH) est orthogonale à toute droite du plan (ABC) en particulier la droite (BC).

les triangles OAB, OCA sont rectangles en O, d'où, (OA) $\perp$ (OB) et (OA) $\perp$ (OC)

La droite (OA) étant orthogonale à deux droites sécantes du plan (OBC) est orthogonale à ce plan, et, en particulier à la droite (BC).

b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontre de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

D'après le 1a), (BC) est orthogonale aux droites (OH) et (OA), donc, au plan (OAH) et, en particulier, à (AH) incluse dans ce plan.

Autre méthode:

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0$ .....

c. Que représente le point H pour le triangle ABC?

On a ainsi prouvé que (AH) était une hauteur de ABC. Il en est de même de (BH) et de (CH).

H est par conséquent l'orthocentre du triangle ABC (point de concours des hauteurs ...)

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

Remarquons qu'ainsi OABC est un tétraèdre trirectangle en O

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Une équation de (ABC) est e la forme $ax + by + cz + d = 0$

En écrivant que les coordonnées de chaque point vérifient l'équation, il vient le système suivant:

$\begin{cases} a+d=0 \\ 2b+d=0 \\ 3c+d=0 \end{cases}$. En prenant par exemple, $d = -6$, on trouve: $a = 6$, $b = 3$ et $c = 2$

$6x + 3y + 2z - 6 = 0$ est une équation de (ABC).

Remarque: *n'importe quel autre choix convient mais il est plus intéressant pour les calculs d'avoir des coefficients entiers et comme 2× 3 = 6, le choix s'impose.*

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

Un vecteur directeur de D est un vecteur normal du plan (ABC), soit: $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$ d'après l'équation précédente.

$M(x; y; z) \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

On a alors: $\begin{cases} x=6t \\ y=3t \\ z=2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (D)

c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées ($\frac{36}{49}$; $\frac{18}{49}$; $\frac{12}{49}$).

D'après l'énoncé (OH) est orthogonale à (ABC) donc H ∈ D.

H ∈ (ABC)

Les coordonnées de H vérifient les équations de D et de (ABC).

En "injectant" dans l'équation trouvée pour (ABC), les équations trouvées pour D, on a l'équation d'inconnue t:

$6\times 6t + 3\times 3t + 2\times 2t - 6 = 0$, ce qui donne $t = \frac{6}{49}$, puis, $\begin{cases} x_H = 6\times\frac{6}{49} \\ y_H = 3\times\frac{6}{49} \\ z_H = 2\times\frac{6}{49}; \end{cases}$

3. a. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

La distance de O à H est la longueur OH

$$OH = \sqrt{\left(\frac{36}{49}\right)^2+\left(\frac{18}{49}\right)^2+\left(\frac{12}{49}\right)^2} = \frac{1}{49}\sqrt{6^2(6^2+3^2+2^2)} = \frac{6\times 7}{49} = \frac{6}{7}$$

Remarque:

En appliquant la formule de la distance d'un point à un plan,

on a directement: $d(O, (ABC)) = \frac{|6\times 0+3\times 0+2\times 0-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{6}{7}$

b. Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.

On sait que (OA) est orthogonale au plan (OBC) et que le triangle OBC est rectangle en O.

Le volume du tétraèdre $V = \frac{1}{3}$ Aire(OBC)× OA $= \frac{OB\times OC\times OA}{6} = \frac{2\times 3\times 1}{6}$ = 1 (unité de volume)

On sait aussi que (OH) est orthogonale à (ABC)

Le volume du tétraèdre $V = \frac{1}{3}$ Aire(ABC)× OH = 1

Aire(ABC) = $\frac{3}{OH} = \frac{7}{2}$ (unités d'aire)

c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

L'aire de ABC au carré vaut: $\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$.

Toutes les faces sont des triangles rectangles en O.

Face OAB: $\frac{OA \times OB}{2} = 1$

Face OAC: $\frac{OA \times OC}{2} = \frac{3}{2}$

Face OBC: $\frac{OB \times OC}{2} = 3$

$1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 = \frac{4+9+36}{4} = \frac{49}{4}$.
