Index

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3+4i$.

Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3})$ et $z_D = -2\sqrt{3} + i(-2+\sqrt{3})$.

L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1) a. *Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.*

L'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point d'affixe $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A$

On a donc: $z' = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(3+4i-1)+1 = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(2+4i)+1$

$= -1-2\sqrt{3} + i(-2+\sqrt{3}) + 1 = -2\sqrt{3} + i(-2+\sqrt{3}) = z_D$.

b. *En déduire que les points B et D sont sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on déterminera le rayon.*

On a lors AB = AD = $|z_B - z_A| = |2+4i| = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ (rayon du cercle $\mathscr{C}$ de centre A)

2. *Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.*

a. *Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.*

On sait: $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$, d'où, on a: $z_F = \frac{3}{2}(z_A - z_B) + z_B$

$z_F = \frac{3}{2}(-2-4i) + 3 + 4i = -2i$

b. *Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].*

L'affixe du milieu de [CD] est: $\frac{z_C + z_D}{2} = \ldots = -2i = z_F$

c. *Montrer que $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$*

$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3}) + 2i}{1+2i} = \frac{(2\sqrt{3} - i\sqrt{3})(1-2i)}{5} = \ldots = -i\sqrt{3}$.

En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.

–i $\sqrt{3}$ est le nombre complexe de module $\sqrt{3}$ et d'argument $-\dfrac{\pi}{2}$, d'où, $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}\ e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

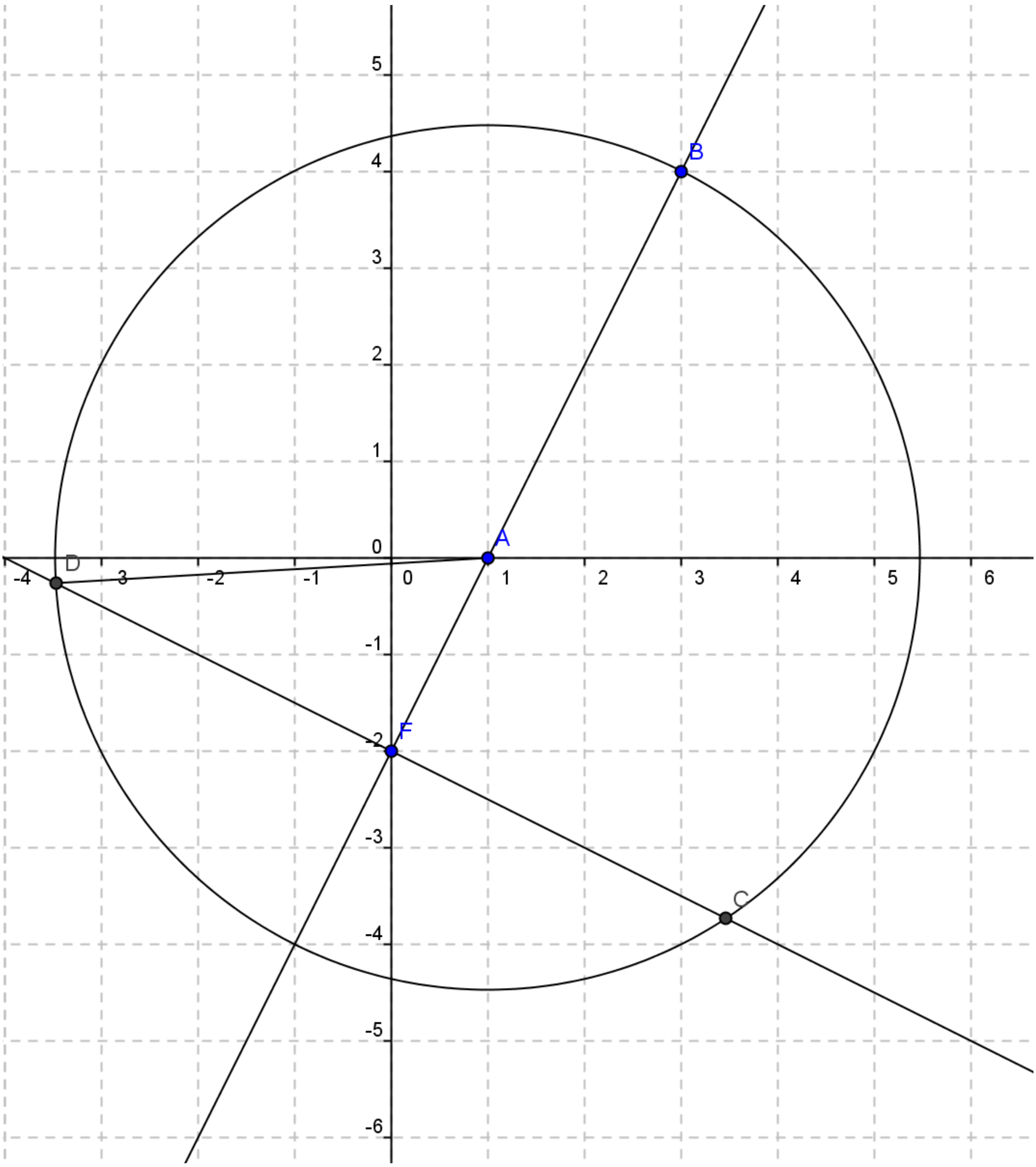
Puisque $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}\ e^{-i\frac{\pi}{2}}$, on a: $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$,

d'où $\overrightarrow{FA} \perp \overrightarrow{FC}$

Or F est le milieu de [CD] , d'où, la droite (AF) est perpendiculaire à [AC] en son milieu.

La droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

3. *Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.*



On trace la perpendiculaire à (AF) passant par F (Cette droite porte le segment [CD]) et le cercle $\mathscr{C}$ de centre A passant par B.

Comme F est l'image du point A par une homothétie de centre B , les points A, B et F sont alignés.

La droite (AF) est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

On obtient ainsi le point D, puis, le point C sur $\mathscr{C}$ symétrique de D par rapport à (AF).

Le point D a son abscisse négative, le point C a son abscisse positive.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{2\pi}{3}$

Exercice 2

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .On considère les points : A(4 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 3) et E($\dfrac{2}{3}$; – $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{1}{9}$).

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

***RAPPEL :** Soit ($\mathscr{P}$) un plan d'équation ax +by +cz +d = 0 où a, b, c et d sont des nombre réels avec, a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées (x_M ; y_M ; z_M) la distance δ_M du point M au plan (P) est égale à :* $\dfrac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

***1. a.** Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.*

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}$ Il suffit de remarquer qu'on ne peut trouver aucun réel vérifiant $\overrightarrow{AC} = k\ \overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, les points A, B et C déterminent un plan.

b. *Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 6 ; 4).*

Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Calculons $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ = ... = 0 et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}$ = ... = 0

Le vecteur $\vec{n}$ étant orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. *Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : 3x +6y +4z – 12 = 0.*

Un point $M(x; y; z) \in (ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

Il vient: $(x – 4)\times 3 + (y – 0)\times 6 + (z – 0) \times 4 = 0$

Soit: $3x + 6y + 4z – 12 = 0$ est une équation du plan (ABC)

***d.** Déduire des questions précédentes la distance δ_E.*

$$\delta_E = \frac{\left|3\times\frac{2}{3}+6\times\left(-\frac{2}{3}\right)+4\times\frac{1}{9}-12\right|}{\sqrt{3^2+6^2+4^2}} = \frac{122}{9\sqrt{61}} = \frac{2\sqrt{61}}{9}$$

***2. a.** Montrer que la droite ($\mathscr{D}$) de représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=\dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{3}t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R},$$

est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\vec{d}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \dfrac{4}{3} \end{pmatrix}$

En remarquant que 3 $\vec{d}$ = $\vec{n}$, on prouve que $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC).

$\begin{cases} 1+t=\dfrac{2}{3} \\ 2t=-\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{3}t=\dfrac{1}{9} \end{cases}$ a pour solution $t = -\dfrac{1}{3}$ (Les trois équations sont vérifiées en même temps pour $t = -\dfrac{1}{3}$)

Le point E est donc un point de $\mathcal{D}$.

b. *Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).*

Le point G est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).

Ses coordonnées vérifient donc: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=\dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{3}t \\ 3x+6y+4z-12=0 \end{cases}$.

Il vient: $3(1 + t) + 6\times2t + 4\times(\dfrac{5}{9} + \dfrac{4}{3}t) - 12 = 0$.

On en déduit: $61t = \dfrac{61}{3}$, d'où, $t = \dfrac{1}{3}$ = et $G(\dfrac{4}{3} ; \dfrac{2}{3} ; 1)$

c. *Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance* δ_E.

$$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} \dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3}-\left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ 1-\dfrac{1}{9} \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{8}{9} \end{pmatrix}, \text{EG} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{36+144+64}}{9} = \frac{\sqrt{244}}{9} = \frac{2\sqrt{61}}{9}$$

Exercice 3

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».

$\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.

a_n la probabilité de l'évènement A_n

b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

***1.** Donner a_1 et b_1.*

$a_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = \frac{1}{2}$

Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

$$A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$$
$$a_2 = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \overline{A_1}) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2)$$
$$= a_1 \times \frac{3}{4} + b_1 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

$$b_2 = 1 - a_2 = \frac{3}{8}.$$

***2.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$, puis, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$*

La démarche appliquée pour le calcul de a_2 est identique pour celui de a_{n+1}

$$A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap \overline{A_n})$$
$$a_{n+1} = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$
$$= a_n \times \frac{3}{4} + b_n \times \frac{1}{2}$$

et comme $b_n = 1 - a_n$,

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$$

***3.** Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.*

***a.** Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.*

On précisera la raison et le premier termeU_1.

$$U_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{6}.$$

Or, $a_n = U_n + \frac{2}{3}$.

D'où, $U_{n+1} = \frac{1}{4}(U_n + \frac{2}{3}) - \frac{1}{6} = ... = \frac{1}{4} U_n$

La suite (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_1 = a_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

b. *En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.*

On a donc: $U_n = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et $a_n = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$.

c. *Déterminer la limite de la suite (a_n).*

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on sait: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$, d'où, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$

d. *Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n > 0{,}6665$.*

On cherche n_0 tel que $n \geqslant n_0$ implique $a_n > 0{,}6665$.

$-\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} > 0{,}6665$ équivaut à $\frac{2}{3} - 0{,}6665 > \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

équivaut à $\frac{0{,}0005}{3} > \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

équivaut à $0{,}001 > \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

équivaut à $\ln(0{,}001) > (n-1) \ln \frac{1}{4}$ **(ln strictement croissant sur $\mathbb{R}^{+*}$)**

équivaut à $\frac{\ln(0{,}001)}{-\ln 4} > (n-1)$ car $\ln \frac{1}{4} = -\ln 4$ est **négatif**

équivaut à $n > \frac{\ln(0{,}001)}{-\ln 4} + 1$

La calculatrice donne: 5,98 ... pour valeur approchée

$n_0 = 6$

Exercice 4

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par f (x) = (1 + x) e^{-x}.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *d'unité graphique 1 cm.*

1. a. *Étudier le signe de f (x) sur $\mathbb{R}$.*

Puisque pour tout X réel, $e^X > 0$, le signe de $f(x)$ est celui de $1 + x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de e^{-x}		+		+	
signe de $1 + x$.		−	0	+	
signe de f(x)		−	0	+	

b. *Déterminer la limite de la fonction f en –∞.*

On a:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ (limite de fonction composée) et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x = -\infty$.

D'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (limite d'un produit)

Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

On peut écrire: $f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée), on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, on obtient: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (limite d'une somme)

c. *On note f ' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.*

Calculer, pour tout nombre réel x, f '(x).

En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Dérivée d'un produit: pour tout x réel, $f'(x) = 1\times e^{-x} + (1+x)\times(-e^{-x}) = e^{-x}(1-1-x) = -x\,e^{-x}$.

Le signe de $f'(x)$ est par conséquent le signe de $-x$.

f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

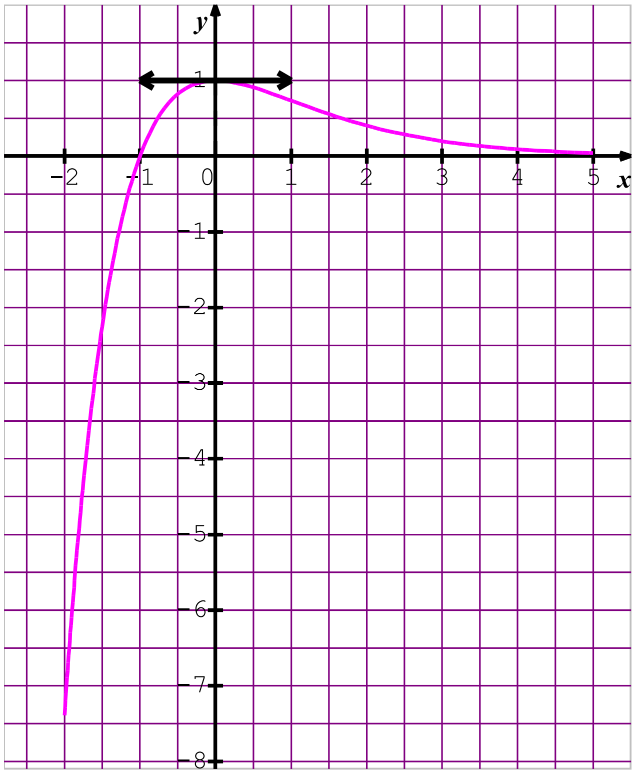
d. *Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [–2 ; 5].*

On peut noter que la tangente au point d'abscisse 0 est "horizontale"

Quelques valeurs ...

Tracé en respectant la variation de f ...

Ne pas oublier le 1a) ...



***2.** On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :* $I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

***a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geqslant 0$.*

Puisque $f(x) \geqslant 0$ sur $[-1; +\infty[$ et $n > -1$, alors, $\int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale)

***b.** Montrer que la suite (I_n) est croissante.*

$$I_{n+1} - I_n = \int_{-1}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Comme $f(x) \geqslant$ sur $[n; n+1]$ alors $\int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

La suite (I_n) est donc croissante.

***3. a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = (-2-b)\ \mathrm{e}^{-b} + (2+a)\ \mathrm{e}^{-a}.$$

On pose $\begin{cases} u(x)=1+x \\ v'(x)=\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$.

Les fonctions u et v étant dérivables et leurs dérivées u' et v' continues sur $\mathbb{R}$, on obtient:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[(1+x)(-\mathrm{e}^{-x})\right]_a^b - \int_{a}^{b} 1\times(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = -(1+b)\ \mathrm{e}^{-b} + (1+a)\ \mathrm{e}^{-a} + \int_{a}^{b} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Or, $\int_a^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_a^b = -e^{-b} + e^{-a}$

Finalement: $\int_a^b f(x)\,dx = -(1+b)\,e^{-b} + (1+a)\,e^{-a} - e^{-b} + e^{-a} = (-2-b)\,e^{-b} + (2+a)\,e^{-a}$.

***b.** En déduire l'expression de I_n en fonction de n.*

On fait $a = -1$ et $b = n$ dans la relation précédente

$I_n = (-2-n)\,e^{-n} + e$

***c.** Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} I_n$.*

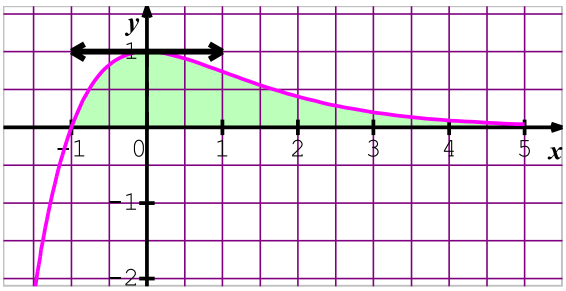
L'étude en $+\infty$ de $(-2-n)\,e^{-n}$ est analogue à celle de $f(x)$ en $+\infty$.

On a donc: $\lim_{n\to+\infty} I_n = e$

***d.** Donner une interprétation graphique de cette limite.*

L'aire sous la courbe de f délimitée par les droites d'équation $x = -1$, $x = n$ et l'axe des abscisses tend vers e u.a.

(Ici: 1 u.a. = 1 cm²)



***4.** Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e$*

On pose dans le 3a) $a = -1$ et $b = \alpha$,

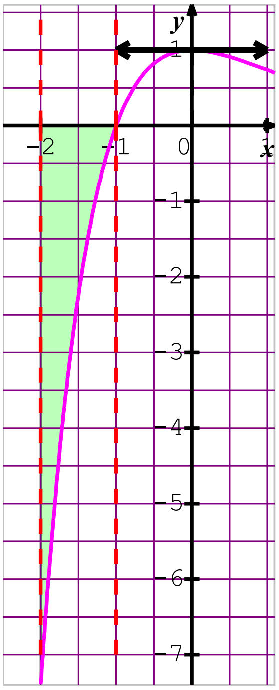
On résout l'équation d'inconnue α: $(-2-\alpha)\,e^{-\alpha} + e = e$

Comme $e^{-\alpha} \neq 0$, on a: $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e$ si et seulement si $-2-\alpha = 0$, soit: $\alpha = -2$

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

Comme $-2 < -1$, et que $f(x) \leqslant 0$, (f ne change pas de signe sur $[-2; -1]$, ce calcul donne l'aire du domaine délimité par les droites d'équation $x = -2$, $x = -1$, l'axe des abscisses et la courbe de f.

On a: $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{-2} f(x)\,dx = -e$ qui est l'opposé de la mesure d'aire du domaine décrit ci-dessus.


y
1
x
−2
−1
0
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7