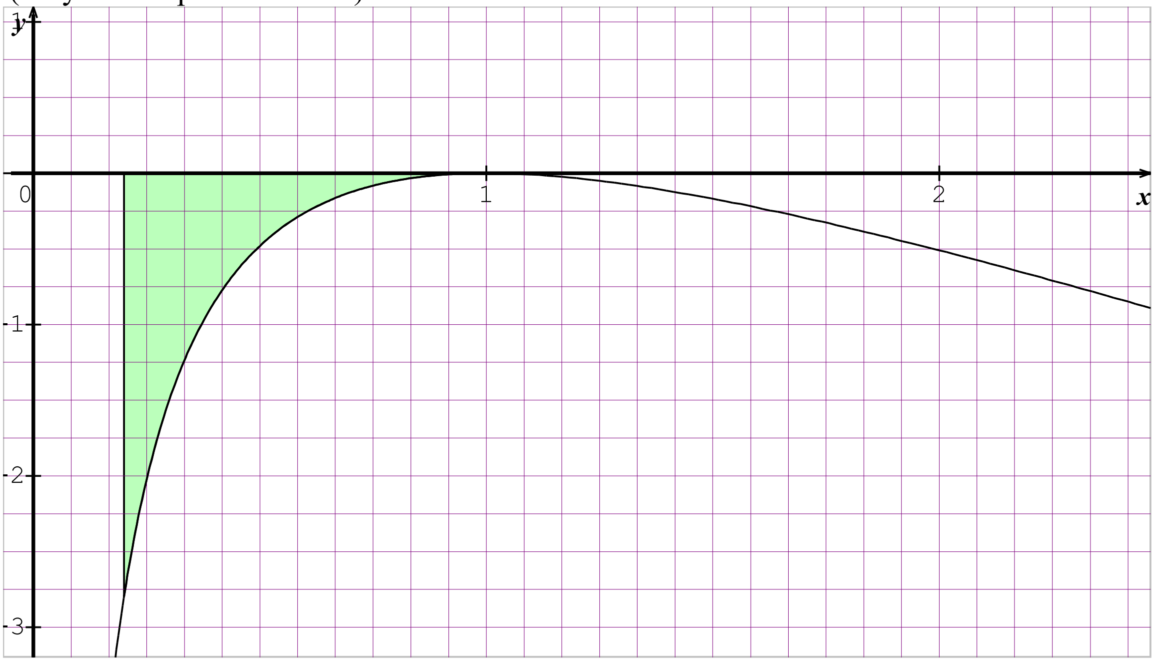
Polynésie septembre 2004

Exercice 1 (Polynésie septembre 2004)



La courbe (C) représente la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$

1 a) Dérivabilité de *f*

Soit $u: x\mapsto\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ et $v: x\mapsto 1-x$

u est le quotient de la fonction logarithme népérien et de la fonction racine carrée dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc, *u* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $u'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

et, *v* est une fonction affine dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On a: $v'(x)=-1$

f, étant la somme de *u* et *v* dérivables sur $]0\,;+\infty[$, est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}-1=\dfrac{2-\ln x-2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{-[2(x\sqrt{x}-1)+\ln x]}{2\mathrm{x}\sqrt{x}}=\dfrac{N(x)}{2x\sqrt{x}}$ avec $N(x)=-[2(x\sqrt{x}-1)+\ln x]$

Comme $x>0$ et $\sqrt{x}>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $N(x)$.

b) ln est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, $x\mapsto x$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sont des fonctions strictement croissantes et **positives** sur $]0\,;+\infty[$, donc, leur produit $x\mapsto x\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

La fonction $x\mapsto 2(x\sqrt{x}-1)+\ln x$ est par conséquent strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

On en déduit: $x\mapsto N(x)$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

Autre méthode: $N'(x)=-\left[2\left(1\cdot\sqrt{x}+\dfrac{x\cdot 1}{2\sqrt{x}}\right)+\dfrac{1}{x}\right]=-\left(\dfrac{3\mathrm{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\right)$ qui est évidemment strictement négatif sur $]0\,;+\infty[$ ....

N est strictement décroissante et $N(1)=0$ implique: si $0<x<1$ alors $N(x)>N(1)$. $N(x)>0$ sur $]0\,;1[$

Si $x>1$ alors $N(x)<N(1)$. $N(x)<0$ sur $]1\,;+\infty[$.

c) La dérivée de f étant du signe de N(x), on en déduit: f strictement croissante sur $]0\,;1]$ et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$

Le maximum est atteint en 1 et vaut $f(1)=0$. Les coordonnées du point de C d'ordonnée maximale sont $(1\,;0)$.

2) $A(\alpha)$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les droites d'équation $x=\alpha$, $x=1$, (C) et

l'axe des abscisses. Comme *f* est négative sur l'intervalle $[\alpha\,;1]$, on a:

$$A(\alpha)=-\int_{\alpha}^{1} f(x)dx \text{ (ou } A(\alpha)=\int_{1}^{\alpha} f(x)dx \text{)}$$

$$A(\alpha)=-\int_{\alpha}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x\,dx=-\left[\int_{\alpha}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx+\int_{\alpha}^{1}(1-x)dx\right]=-[I(\alpha)+J(\alpha)]$$

Calcul de $I(\alpha)$

Posons $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. On en déduit: $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=2\sqrt{x}$

u, *v* étant dérivables et leurs dérivées continues sur $[\alpha\,;1]$, on a:

$$I(\alpha)=[\ln x\cdot 2\sqrt{x}]_{\alpha}^{1}-\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x}\,dx$$

$$I(\alpha)=0-2\sqrt{\alpha}\ln\alpha-\int_{\alpha}^{1}\frac{2}{\sqrt{x}}dx=-2\sqrt{\alpha}\ln\alpha-[4\sqrt{x}]_{\alpha}^{1}=-2\sqrt{\alpha}\ln\alpha-4+4\sqrt{\alpha}$$

Calcul de $J(\alpha)$

$$J(\alpha)=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{1}=\frac{1}{2}-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}$$

Conclusion: $A(\alpha)=2\sqrt{\alpha}\ln\alpha+4-4\sqrt{\alpha}+\frac{1}{2}+\alpha-\frac{\alpha^2}{2}=2\sqrt{\alpha}\ln\alpha-4\sqrt{\alpha}+\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{7}{2}$

b) En remarquant que $\sqrt{\alpha}\ln\alpha=\sqrt{\alpha}\ln(\sqrt{\alpha})^2=2\sqrt{\alpha}\ln(\sqrt{\alpha})$ et sachant que $\lim_{x\to 0} x\ln x=0$, on obtient:

$$\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{\alpha}\ln\alpha=0$$

$$\lim_{\alpha\to 0}A(\alpha)=\frac{7}{2}$$

C'est l'aire de la région du plan limitée par l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x=1$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

3) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0\in[1\,;2]$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1$

a) Puisque $x\geq 1$, on a: $\ln x\geq 0$, d'où $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\geq 0$

D'autre part, on sait d'après 1 c) que, si $1\leq x\leq 2$ alors $f(2)\leq f(x)\leq f(1)$ et $0\leq x-1\leq 1$

Comme $f(1)=0$, en ajoutant membre à membre les deux inégalités: on a: $f(x)+x-1\leq 1$.

Or, $f(x)+x-1=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Conclusion: pour tout $x\in[1\,;2],\,0\leq\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\leq 1$

b) Soit $P(n): u_n\in[1\,;2]$

* $P(0)$ est vérifiée car $u_0\in[1\,;2]$

** Soit un entier naturel *p* tel que $P(p): u_p\in[1\,;2]$ (Hypothèse de récurrence)

D'après 3a) $\frac{\ln u_p}{\sqrt{u_p}}\in[0\,;1]$, d'où, $\frac{\ln u_p}{\sqrt{u_p}}+1\in[1\,;2]$

On a: $u_{p+1}\in[1\,;2],P(p+1)$

On a montré: $P(p)\Rightarrow P(p+1)$

*** D'après l'axiome de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

4) $f(u_n)=\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1-u_n$, d'où, $f(u_n)+u_n=\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1=u_{n+1}$

Or, d'après le 1c), pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) \leq 0$
On a donc: $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel *n*.
La suite (u_n) est décroissante.
5) a) Comme (u_n) est décroissante et minorée par 1, (u_n) converge vers un réel *l*.
b) *f* étant continue, ce réel *l* vérifie l'égalité, $l = f(l) + l$ d'après la remarque du 4).
On obtient $f(l) = 0$. Le seul réel solution de $f(x) = 0$ est 1.
La suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 2 (Polynésie septembre 2004)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. (Unité : 2 cm)
Pour tout point *M* du plan d'affixe *z*, on considère les points *M'* et *M''* d'affixes respectives $z' = z - 2$ et $z'' = z^2$
1 a) $M'' = M$ si et seulement si $z^2 = z$ si et seulement si $z(z-1) = 0$
Le point *O* d'affixe 0 et le point *I* d'affixe 1 sont solutions de l'équation $M'' = M$
b) $M'' = M'$ équivaut à $z^2 = z - 2$ équivaut à $z^2 - z + 2 = 0$
$\Delta = -7$. Les solutions de $z^2 - z + 2 = 0$ sont les complexes conjugués $z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$
Les points J_1 et J_2 d'affixes z_1 et z_2 sont solutions de $M'' = M'$
2) M' et M'' sont sur l'axe des ordonnées si et seulement si $z - 2$ et z^2 sont des imaginaires purs.
Posons $z = x + iy$ avec *x* et *y* réels.
$z - 2$ est un imaginaire pur si et seulement si $x = 2$
$z^2 = x^2 - y^2 + 2\text{xy}\, i$ est un imaginaire pur si et seulement si $x^2 - y^2 = 0$
Par conséquent $x = 2$ et $y^2 = 4$
Les points M_1 et M_2 tels que M_1, M_1'', M_2' et M_2'' sont sur l'axe des ordonnées ont pour affixes $2 - 2\text{i}$ et $2 + 2\text{i}$.
Autre méthode: $z - 2$ et z^2 sont des imaginaires purs équivaut à $z - 2 + \overline{z - 2} = 0$ et $z^2 + \overline{z}^2 = 0$
Or, $z - 2 + \overline{z - 2} = z + \overline{z} - 4$ et $z^2 + \overline{z}^2 = z^2 - (i\overline{z})^2 = (z - i\overline{z})(z + i\overline{z})$
On a donc: $z + \overline{z} = 4$ et $(z = i\overline{z} \text{ ou } z = -i\overline{z})$
$z + \overline{z} = 4$ implique $\Re(z) = 2$
$z = i\overline{z}$ implique $\Re(z) = \Im(z)$
$z = -i\overline{z}$ implique $\Re(z) = -\Im(z)$
Finalement: on a deux solutions conjuguée: $z_1 = 2 + 2\text{i}$ et $z_2 = 2 - 2\text{i}$
3) $z = x + iy$ où *x* et *y* sont des nombres réels
a) $\dfrac{z'' - z}{z' - z} = \dfrac{x^2 - y^2 + 2\text{xyi} - x - iy}{-2} = \dfrac{-x^2 + y^2 + x}{2} + \dfrac{(y - 2\text{xy})}{2} \cdot i$
b) Les points *M*, *M'* et *M''* sont alignés si et seulement si $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$ est un réel si et seulement si $y - 2\text{xy} = 0$
On a: $y = 0$ ou $2\text{x} = 1$.
L'ensemble *E* des points *M* tels que *M*, *M'* et *M''* sont alignés est la réunion des droites d'équations $y = 0$ (axe des abscisses) et $x = \dfrac{1}{2}$
si $z = 0$, alors, *M, M'* et *M''* sont confondus.
4) $z = \sqrt{3}\, e^{i\theta}$ où $\theta \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$
a) L'ensemble Γ des points *M* d'affixe $z = \sqrt{3}\, e^{i\theta}$ où $\theta \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ est un quart de cercle de centre *O* et rayon $\sqrt{3}$. Soit *K* le point d'affixe $\sqrt{3}$ et *L* celui d'affixe $i\sqrt{3}$ alors Γ est l'arc $\widehat{KL}$ dans le sens direct.
Comme $z' = z - 2$. Γ' est l'arc image par une translation de vecteur $-2\vec{u}$ de Γ . Γ' est donc le quart de

cercle de centre O' d'affixe -2, de rayon $\sqrt{3}$ et d'extrémités K' d'affixe $\sqrt{3}-2$ et L' d'affixe $-2+\sqrt{3}\,i$.

Comme $z''=z^2$, on a: $z''=3e^{i2\theta}$ où $2\theta\in[0;\pi]$.

Γ'' est donc le demi-cercle de centre *O*, de rayon 3.

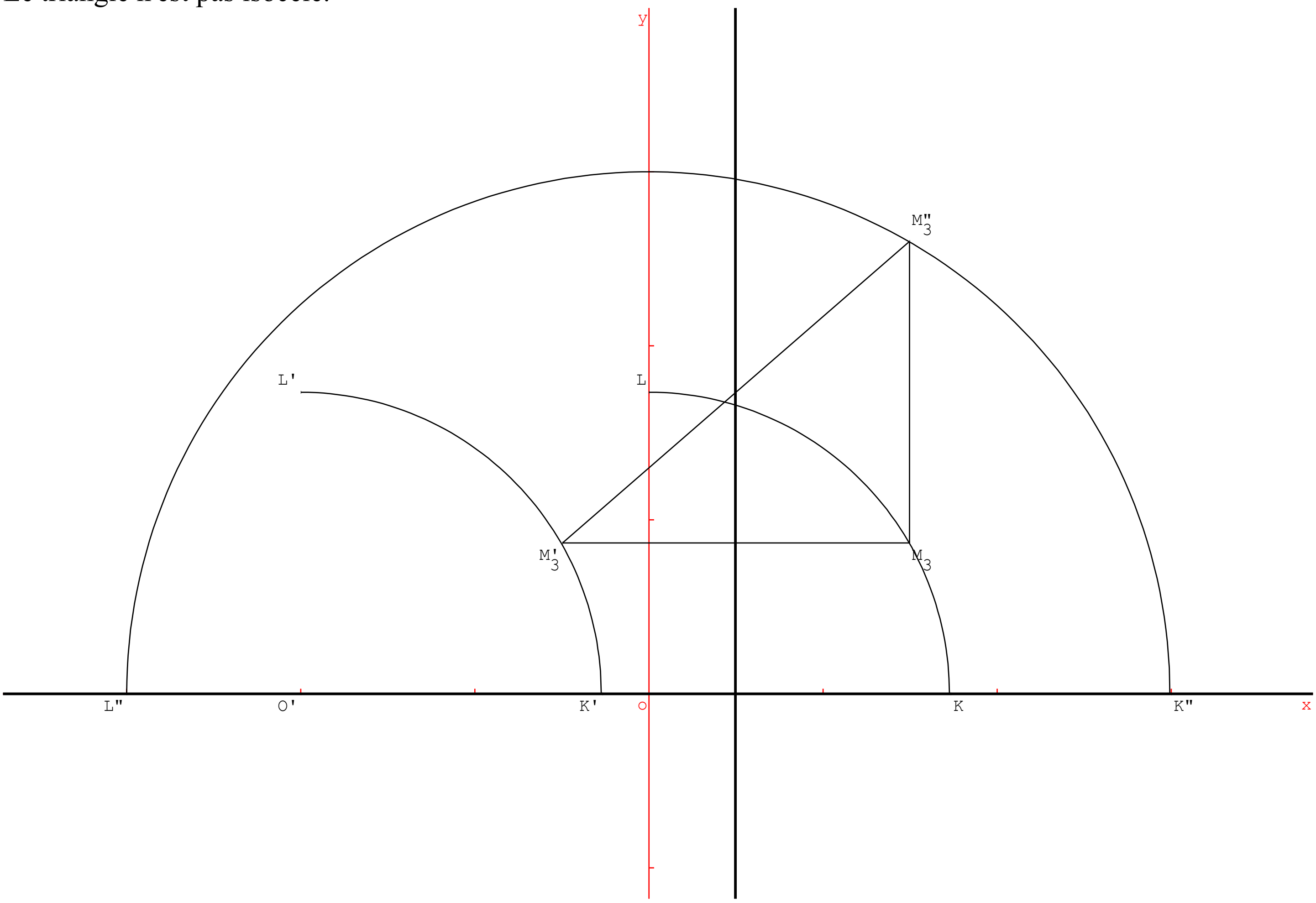
c) Lorsque $\theta=\dfrac{\pi}{6}$, M_3 est le point de Γ (arc $\widehat{KL}$) d'abscisse $\dfrac{3}{2}$, M'_3 est le point image par la translation de vecteur $-2\vec{u}$ et M''_3 est le point du demi-cercle Γ'' d'abscisse $\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{M_3M'_3}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{M_3M''_3}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

$M_3M'_3M''_3$ est donc rectangle en M_3.

On a évidemment: $M_3M'_3=2$ et $M_3M''_3=3\sin\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{6}=3\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

Le triangle n'est pas isocèle.



Exercice 3 (Polynésie septembre 2004)
A, *B* et *C* trois points distincts non alignés.
Une urne *U* contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres $-2, -1, 0, 1, 2$ et 3.
Une urne *V* contient cinq cartons indiscernables au toucher: quatre portant le nombre 1 et un le nombre -1.
On tire au hasard un carton dans chaque urne. On note *a* le nombre tiré dans *U* et *b* celui tiré dans *V*.
1) Comme $a+b$ a pour valeur minimale -3, la somme $a+b+4$ a pour valeur minimale 1. On a donc: $a+b+4\neq 0$. Le système $\{(A,a),(B,b),(C,4)\}$ admet un barycentre noté *G*.

2. a) E_1 : "*G* appartient à la droite (BC) " si et seulement si $a=0$. $P(E_1)=P(a=0)=\frac{1}{6}$

E_2 : "*G* appartient au segment $[BC]$ " si et seulement si E_1 est réalisé et *b* est positif.

$P(E_2)=P(E_1)\times p_{E_1}(b=1)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{15}$

On peut noter: $E_2=(a=0)\cap(b=1)$ et comme le tirage dans l'urne *V* est **indépendant** de celui dans l'urne *U*, on a: $P(E_2)=P(a=0)\times P(b=1)$

b) E_3 : "*G* est situé strictement à l'intérieur du triangle *ABC*" si et seulement si " $a>0$ et $b>0$ "

$P(E_3)=P(a=1\ ou\ 2\ ou\ 3)\times P(b=1)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$

3) *n* étant un entier naturel non nul, on répète *n* fois **dans les mêmes conditions** l'épreuve précédente et on désigne par *X* la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'événement E_3 (**Succès**).

a) *X* suit donc la loi binomiale de paramètres *n* et $\frac{2}{5}$. son espérance mathématique est $E(X)=\frac{2n}{5}$.

$E(X)=4$ équivaut à $2n=20$ $n=10$

b) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)$. On en déduit: $P(X\geq 1)\geq 0{,}999$ équivaut à $P(X=0)\leq 0{,}001$

$P(X=0)=(1-\frac{2}{5})^n$. On cherche *n* tel que $\left(\frac{3}{5}\right)^n\leq\frac{1}{1000}$

La fonction ln étant strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

$\left(\frac{3}{5}\right)^n\leq\frac{1}{1000}$ équivaut à $n\ln\left(\frac{3}{5}\right)\leq\ln\left(\frac{1}{1000}\right)$

comme $\ln\left(\frac{3}{5}\right)<0$, on en déduit: $n\geq\frac{-\ln 1000}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$ La calculatrice donne $n\geq 14$.