Index

Polynésie septembre 2008 EXERCICE 2 5 points

On donne la propriété suivante : « par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On a placé : les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ *, le milieu K de [IJ].*

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FI J).

Partie A

1. Démontrer que le triangle FI J est isocèle en F.

En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

On sait : $FB = BC = FE = EH = 1$, $BI = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}$ et $EJ = \frac{2}{3}EH = \frac{2}{3}$

Dans les triangles FBI et FEJ rectangles respectivement en B et E, on a :

$FI^2 = FB^2 + BI^2 = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$ et $FJ^2 = FE^2 + EJ^2 = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$

Conclusion : $FI = FJ = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Le triangle $FI\,J$ est isocèle en F.

La médiane (FK) du triangle isocèle FIJ est aussi la hauteur issue de F et relative à [IJ], d'où,

les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.

On a la même démarche pour démontrer que $GI = GJ = \frac{\sqrt{10}}{3}$ .....

2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

Les droites (FK) et (GK) définissent un plan, car, les points ne sont pas alignés.

On sait : $\begin{cases}(IJ)\perp(FK)\\(IJ)\perp(GK)\end{cases}$, par conséquent, La droite (IJ) orthogonale à **deux droites sécantes du plan** (GFK) est orthogonale au plan (GFK)

Conclusion : (IJ) $\perp$ (FK)

3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).

Puisque (IJ) est orthogonale au plan (GFK), **elle est orthogonale à toute droite du plan** (GFK) en particulier la droite (GF).

P étant le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) , on a : (GP) est orthogonale au plan (FIJ).

Comme (IJ) est orthogonale aux **deux droites sécantes (*GF*) et (*GP*) du plan** (GFP), (IJ) est orthogonale au plan (GFP)

4. a. Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.

Les plans (GFK) et (GFP) ayant la même direction normale, celle de la droite (IJ) d'après les questions 2/ et 3/ sont parallèles.

Or, ils ont au moins un point commun, le point G (ou F), les deux plans sont confondus.

Conclusion : les points F, G, K et P sont coplanaires.

La propriété rappelée au début de l'énoncé s'applique ici :

Les deux plans contiennent le point G (ou F). Il existe un et un seul plan contenant un point G et orthogonal à une droite (IJ) donnée, donc F, G, K et P sont coplanaires.

b. En déduire que les points F, P et K sont alignés.

Dans le plan (*GFK*), les droites (FP) et (FK) sont orthogonales à la droite (IJ).

Elles sont donc parallèles.

Comme le point F leur est commun, ces deux droites sont confondues.

Conclusion : les points F, P et K sont alignés.

Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).

On note (x ; y ; 0) les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.

Dans le carré $ABFE$, on a : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AF} = 1\times\overrightarrow{AB} + 0\times\overrightarrow{AD} + 1\times\overrightarrow{AE}$ d'où, $F(1\,;\,0\,;\,1)$ dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

On a de même :

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} = 1\times\overrightarrow{AB} + 1\times\overrightarrow{AD} + 1\times\overrightarrow{AE}$ d'où, $G(1\,;\,1\,;\,1)$ dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = 1\times\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\times\overrightarrow{AD} + 0\times\overrightarrow{AE}$ d'où, $I\left(1\,;\,\frac{2}{3}\,;\,0\right)$ dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ} = 0\times\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\times\overrightarrow{AD} + 1\times\overrightarrow{AE}$ d'où, $J\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$ dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

2. a. Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).

N est un point de la droite (GP) orthogonale au plan (FIJ) (Voir partie A/3), d'où, (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ) incluses dans le plan (FIJ)

b. Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FJ}$ en fonction de x et y.

Comme $\overrightarrow{GN}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$, on a : $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FI} = (x-1)\times 0 + (y-1)\times \frac{2}{3} + (-1)\times(-1) = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$

et $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, on a : $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FJ} = (x-1)\times(-1) + (y-1)\times \frac{2}{3} + (-1)\times 0 = -x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$

c. Déterminer les coordonnées du point N.

Puisque (*GN*) est orthogonale aux droites (*FI*) et (*FJ*) , les produits scalaires $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FJ}$ sont nuls,

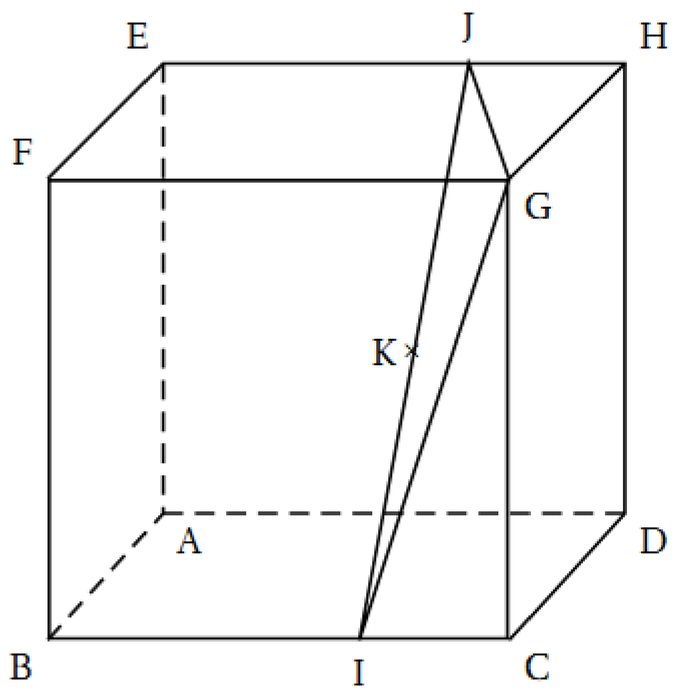
on obtient alors le système : $\begin{cases} \frac{2}{3}y+\frac{1}{3}=0 \\ -x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}=0 \end{cases}$ qui a pour solution évidente le couple $(0\ ;-\frac{1}{2})$

Le point *N* a pour coordonnées $N(0\ ;-\frac{1}{2}\ ;0)$

3. Placer alors le point *P* sur la figure en annexe.

On place le point *N* défini par $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Le point *P* est le point d'intersection de la droite (*GN*) et de la droite (*FK*) (Voir figure)



Figure