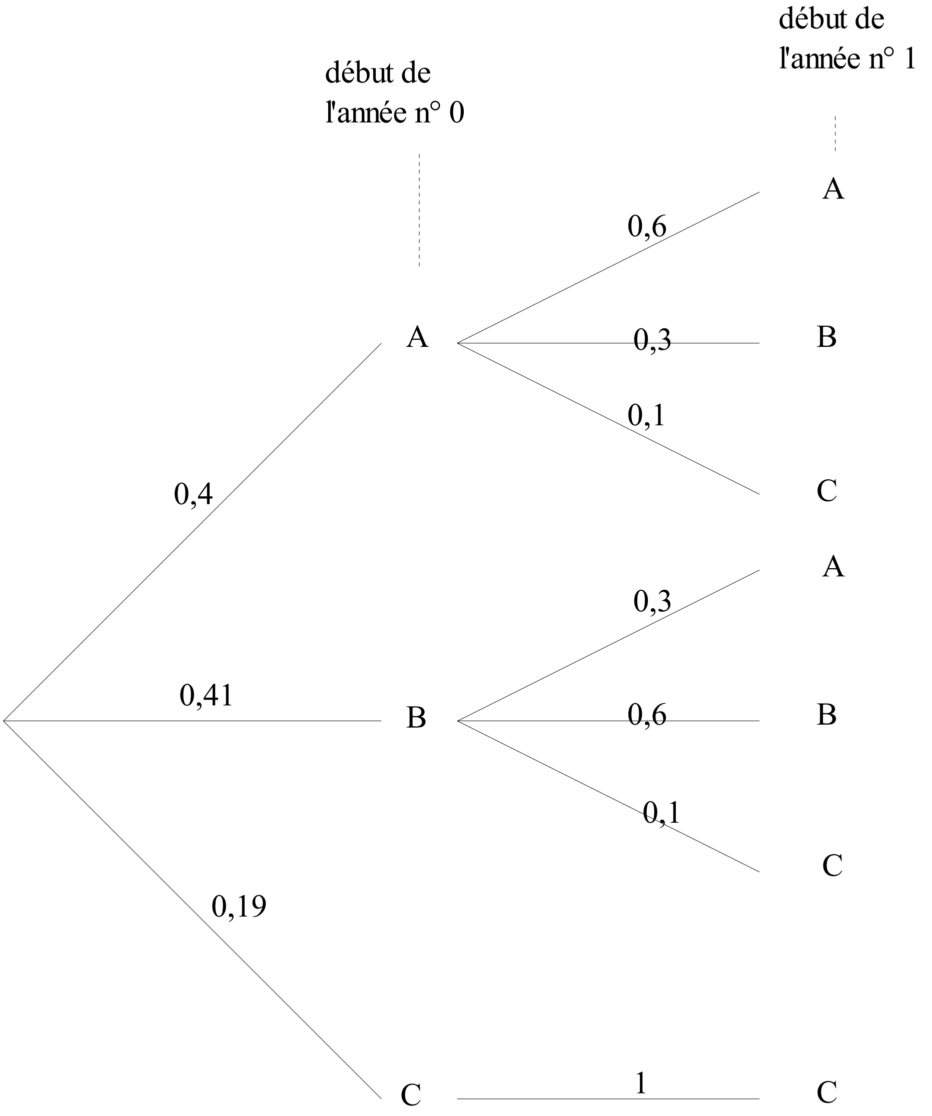
Exercice 3

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes:
40% sont de type *A*, 41% de type *B* et 19% de type *C*.
On admet qu'au début de chaque année:
- chaque plante de type *A* disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type *A*, *B* ou *C*.
- chaque plante de type *B* disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type *A*, *B* ou *C*.
- chaque plante de type *C* disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type *C*.

La probabilité qu'une plante de type *A* soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type *B* est 0,3.
La probabilité qu'une plante de type *B* soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type *A* est 0,3.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel *n* non nul, on note:
- A_n l'évènement «la plante choisie la *n*-ième année est de type *A*»,
- B_n l'évènement «la plante choisie la *n*-ième année est de type *B*»,
- C_n l'évènement «la plante choisie la *n*-ième année est de type *C*».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année n◦ 0),
on pose: $p_0 = 0{,}40$, $q_0 = 0{,}41$et $r_0 = 0{,}19$.
1- Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2.a. Montrer que $p_1 = 0{,}363$ puis calculer q_1 et r_1.

Les indices correspondent au numéro de l'année.

$p_1 = p(A_0 \cap A_1) + p(B_0 \cap A_1) = p_{A_0}(A_1)\times P(A_0) + p_{B_0}(A_1)\times p(B_0) = 0{,}6\times 0{,}4 + 0{,}3\times 0{,}41 = 0{,}24 + 0{,}123 = 0{,}363$

de même

$q_1 = 0{,}3\times 0{,}4 + 0{,}6\times 0{,}41 = 0{,}12 + 0{,}246 = 0{,}366$

$r_1 = 0{,}1\times 0{,}4 + 0{,}1 \times 0{,}41 + 1\times 0{,}19 = 0{,}04 + 0{,}041 + 0{,}19 = 0{,}271$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}6\, p_n + 0{,}3\, q_n \\ q_{n+1} = 0{,}3\, p_n + 0{,}6\, q_n \end{cases}$

$p_{n+1} = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) = p_{A_n}(A_{n+1})\times P(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1})\times p(B_n) = 0{,}6\times p_n + 0{,}3\times q_n$

de même

$q_{n+1} = p(A_n \cap B_{n+1}) + p(B_n \cap B_{n+1}) = p_{A_n}(B_{n+1})\times P(A_n) + p_{B_n}(B_{n+1})\times p(B_n) = 0{,}3\times p_n + 0{,}6\times q_n$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

De façon évidente en faisant la somme:

$S_{n+1} = q_{n+1} + p_{n+1} = 0{,}9(q_n + p_n) = 0{,}9 S_n$

on montre que (S_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $S_0 = 0{,}41 + 0{,}4 = 0{,}81$

On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.
De façon évidente en faisant la différence
$D_{n+1} = q_{n+1} - p_{n+1} = 0,3(q_n - p_n) = 0,3D_n$
on montre que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $D_0 = 0,41 - 0,4 = 0,01$

b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).
Comme chaque raison des suites géométriques sont comprises entre –1 et 1 , chacune de ces suites (S_n) et (D_n) convergent vers 0.

c. En déduire les limites des suites (p_n) , (q_n) et (r_n).
Comme $p_n = \frac{1}{2}(S_n - D_n)$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$ (propriété de limite d'une somme ou d'une différence)
et comme $q_n = \frac{1}{2}(S_n + D_n)$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0$ (propriété de limite d'une somme ou d'une différence)
et enfin, comme $r_n + q_n + p_n = 1$, on obtient: $r_n = 1 -(q_n + p_n)$, puis, $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 1$ (propriété de limite d'une somme ou d'une différence)

Interpréter le résultat.
La végétation de type *C* envahit tout l'espace au détriment de la végétation de type *A* et de type *B*.

Complément:
On peut écrire:
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0,81 \times 0,9^n = 0,9^{n+2}$, $D_n = 0,01 \times 0,3^n$
d'où, $p_n = \frac{1}{2}(0,9^{n+2} - 0,01 \times 0,3^n)$, $q_n = \frac{1}{2}(0,9^{n+2} + 0,01 \times 0,3^n)$ et $r_n = 1 - 0,9^{n+2} - 0,01 \times 0,3^n$
On peut contrôler pour $n = 1$,
$S_1 = 0,9^{1+2} = 0,9^3 = 0,729$, $D_1 = 0,01 \times 0,3 = 0,003$
$p_1 = \frac{1}{2}(0,729 - 0,003) = \frac{1}{2} \times 0,726 = 0,363$
$q_1 = \frac{1}{2}(0,729 + 0,003) = \frac{1}{2} \times 0,732 = 0,366$