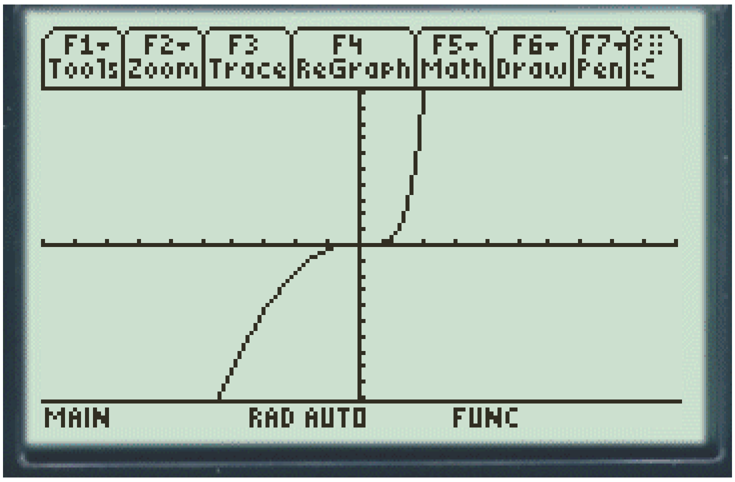
Pondichéry Mars 2003

à la question 3a) de la partie B, admettre que la fonction ln (logarithme népérien) est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base e.
C'est-à-dire: La solution de $e^x = a$ avec a est ln a.

f définie sur ℝ par: $f(x) = x^2e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$

Graphique:



Conjectures:
Il semble que la fonction est croissante sur [–3; 2] et que la fonction coupe l'axe $(x'x)$ à l'origine du repère.

Partie A:

1) f est le produit et la somme de fonctions dérivables sur ℝ

$u: x \mapsto x^2$ qui a pour dérivée $u'(x) = 2x$; $v: x \mapsto e^{x-1}$ qui a pour dérivée $v'(x) = 1\times e^{x-1} = e^{x-1}$

$w: x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ qui a pour dérivée $w'(x) = x$

Pour tout x réel, $f'(x) = 2x\,e^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = x[(x+2)e^{x-1} - 1] = x\times g(x)$ avec $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$, d'où, (limite d'un produit) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{x-1} = +\infty$, puis, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

On sait: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Comme $(x+2)e^{x-1} = xe^x \times \dfrac{1}{e} + \dfrac{2}{e}e^x$, on a: (limite d'une somme): $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$

b) $g'(x) = 1\times e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = (x+3)e^{x-1}$ qui a le même signe que $x + 3$, d'où, le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(-3) = -1\times e^{-4} - 1 = -e^{-4} - 1$

c) ***Sur]–inf; –3]***, g est strictement décroissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$, d'où, pour $x \leqslant -3$, on a: $g(x) \leqslant -1$.

g ne s'annule pas sur $]-\infty; -3]$.

sur [–3; +∞[,

g est dérivable donc continue

g est strictement croissante
$g(-3) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, d'où, $0 \in [g(-3); +\infty[$
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $[-3; +\infty[$.
Soit **α le réel défini** par $g(\alpha) = 0$
Plus précisément: $g(0,20) \approx -0,0115$ et $g(0,21) \approx 0,003$
Comme $g(0,20) < g(\alpha) < g(0,21)$ et g croissante, on a: $0,20 < \alpha < 0,21$
d) On sait déjà: $g(x) < 0$ sur $]-\infty; -3]$,
et sur $[3; +\infty[$, on obtient:
Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

Résumé dans un tableau

x	$-\infty$		-3		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	

3) Variations de f.
Comme $f'(x) = x \times g(x)$, il vient:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
g (x)		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

La première conjecture est fausse.

Partie B:

$(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1) D'après la définition de α, on a: $(\alpha + 2)e^{\alpha-1} - 1 = 0$, d'où, $e^{\alpha-1} = \dfrac{1}{\alpha+2}$.

$$f(\alpha) = \alpha^2 e^{\alpha-1} - \frac{\alpha^2}{2} = \alpha^2 \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\times\alpha^2 - \alpha^2(\alpha+2)}{2(\alpha+2)} = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$$

2) h est définie sur $[0; 1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{2(x+2)}$

a) Pour tout x de $[0; 1]$, $h'(x) = -\dfrac{1}{2} \times \left[\dfrac{3x^2(x+2) - 1\times x^3}{(x+2)^2}\right] = -\dfrac{1}{2} \times \left[\dfrac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}\right] = \dfrac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}$

Il est évident que $h'(x)$ est négatif (nul en 0) sur $[0 ; 1]$, d'où, le tableau suivant:

x	0		1
$h'(x)$	0	$-$	$-\dfrac{2}{9}$
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{6}$

b) Comme $h(\alpha) = f(\alpha)$, un encadrement de $h(\alpha)$ donne un encadrement de $f(\alpha)$.
On sait $0,2 < \alpha < 0,21$ et h décroissante sur $[0; 1]$, d'où, $h(0,21) < h(\alpha) < h(0,2)$
D'autre part, $f(\alpha)$ étant le minimum de f sur $[0; +\infty[$, $f(\alpha) < f(0,20)$ et $f(\alpha) < f(0,21)$
Finalement: un minorant de $f(\alpha) = h(0,21)$
On peut prendre pour majorant le minimum des trois valeurs $h(0,2)$, $f(0,2)$ et $f(0,21)$

Valeurs numériques:

$h(0,21) = \dfrac{-0,21^3}{4,42} = -0,002\,095\,24$ ... soit $-0,002\,10$ à 10^{-5} près par défaut

$h(0,2) = \dfrac{-0,2^3}{4,4} = -0,001\,818$... soit $-0,001\,81$ à 10^{-5} près par excès

$f(0,2) \approx -0,002\,0268$ ... soit $-0,002\,02$ à 10^{-5} près par excès

$f(0,21) \approx -0,002\,0354$ ... soit $-0,002\,03$ à 10^{-5} près par excès

$-0,002\,10 < f(\alpha) < -0,002\,03$ avec une amplitude de 7×10^{-5}

3 a) Les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

Soit: $x^2e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2} = 0$ qui équivaut à $x^2(e^{x-1} - \dfrac{1}{2}) = 0$

qui équivaut à $x^2 = 0$ ou $e^{x-1} = \dfrac{1}{2}$

qui équivaut à $x = 0$ ou $x - 1 = \ln\dfrac{1}{2}$

qui équivaut à $x = 0$ ou $x = 1 + \ln\dfrac{1}{2}$

$(\mathscr{C})$ est strictement en-dessous de l'axe sur $]-\infty; 0[\cup]0; 1 + \ln\dfrac{1}{2}[$ et

strictement au-dessus sur $]1 + \ln\dfrac{1}{2}; +\infty[$

Partie C:

Tracé de la courbe sur $[-0,2; 0,4]$
Unité sur $(x'x)$: 1 cm représente 0,05
Unité sur $(y'y)$: 1 cm représente 0,001
Tableau de valeurs avec un arrondi à 10^{-4} près

x	$-0,20$	$-0,15$	$-0,10$	$-0,05$	0	$0,05$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,25$	$0,3$	$0,35$	$0,4$
$f(x)\times10^4$	-80	-41	-17	-4	0	-3	-9	-16	-20	-17	-3	27	78

Tracé:

Le complément donné au bac

Partie D:calcul d'aire

On désire maintenant calculer l'aire du domaine D délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln 2$.

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction:

$$x \mapsto x^2 e^x .$$

2. En déduire une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
3. Calculer alors,en unités d'aire, l'aire du domaine D puis en donner une valeur approchée en cm².

Correction de la partie D

1) Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables et leurs dérivées $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$,

d'où, on peut intégrer par parties $x \mapsto x^2 e^x$.

Primitive G qui s'annule en 0 de $x \mapsto x^2 e^x$.

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^t \, dt = \left[t^2 \times e^t\right]_0^x - \int_0^x 2t \times e^t \, dx$$

$$G(x) = x^2 e^x - 2 \int_0^x t e^t \, dt$$

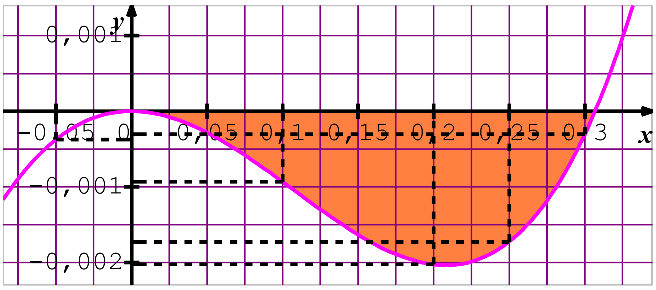
$$\int_0^x t e^t \, dt = \left[t \times e^t\right]_0^x - \int_0^x 1 \times e^t \, dx = x e^x - \left[e^t\right]_0^x = x e^x - (e^x - 1) = x e^x - e^x + 1$$

Finalement: $G(x) = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + 1) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2$

2) Or, $f(x) = \dfrac{1}{e} \times x^2 e^x - \dfrac{x^2}{2}$,

d'où, une primitive F de f est $F(x) = \dfrac{1}{e} G(x) - \dfrac{1}{6} x^3$

3) Calcul de l'aire de D



En u.a.

Comme $f(x) \leqslant 0$ sur $[0; 1 - \ln 2]$, on a: $\mathcal{A}(D) = -(F(1 - \ln 2) - F(0)) = F(0) - F(1 - \ln 2)$ u.a.

$F(0) = \dfrac{1}{e} G(0) - 0 = 0$

$F(1 - \ln 2) = \dfrac{1}{e} G(1 - \ln 2) - \dfrac{1}{6}(1 - \ln 2)^3$

$\mathcal{A}(D) = -F(1 - \ln 2)$ u.a

En cm²

1 unité en abscisse fait: 20 cm
1 unité en ordonnée fait: 1 000 cm
1 u.a. = 20 000 cm²
$\mathcal{A}(D) = -F(1 - \ln 2) \times 20\,000$ cm²
$\mathcal{A}(D) \approx 0{,}0003478500650 \times 20\,000 = 6{,}957001299$ cm²
$\mathcal{A}(D) \approx 7$ cm²