Index

Exercice 1 6 points

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$.

On suppose connus les résultats suivants :

- $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1+x^n)$ et on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. *a.* Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f_1 sur $[0,+\infty[$.
   c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
   (Pour le calcul de I_1, on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$)

2. *a.* Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.
   b. Étudier les variations de la suite (I_n).
   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.
   a. Étudier le sens de variation de g sur $[0,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de g sur $[0,+\infty[$.
   Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a
   $$\ln(1+x^n) \leqslant x^n.$$
   c. En déduire la limite de la suite (I_n).

Partie A: ROC

f et g continues sur $[a ; b]$, donc, $g-f$ continue sur $[a ; b]$. (Existence de l'intégrale)
Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors pour tout $t \in [a, b]$, $g(t)-f(t) \geqslant 0$

D'après la deuxième proposition, on a: $\int_a^b (g(t)-f(t))\,dt \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale)

et, d'après la première proposition, on obtient: $\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$. (Linéarité de l'intégrale)

Finalement: Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.

On pose : f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$, $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ et C_n la courbe de f_n dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) $f_1(x) = \ln(1 + x)$

$\lim_{x\to+\infty} 1+x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, d'où, $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$.

b) ***Une méthode:***

f_1 étant la **composée** de la fonction affine $x \mapsto 1 + x$ strictement croissante sur $[0; +\infty[$ à valeurs dans $[1; +\infty[$ suivie de la fonction ln strictement croissante sur $[1; +\infty[$, est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Une autre méthode:

La fonction f_1 est de la forme $\ln \circ u$ avec $u(x) = 1 + x$.

u est dérivable et strictement positif sur $[0; +\infty[$, donc, $f_1'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ qui est strictement positif sur $[0; +\infty[$, d'où, f_1 est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

c) Calcul de $I_1 = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ par intégration par parties.

On pose: $u(x) = \ln(1 + x)$ et $v'(x) = 1$
d'où, $u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $v(x) = 1 + x$
u, v sont des fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0; 1]$

Par I;p.p. $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[(\ln(1+x))\times(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{1+x}{1+x}\,dx = 2\ln 2 - 0 - \int_0^1 1\,dx = 2\ln 2 - 1$

Autre choix pour la fonction v:

$v(x) = x$

$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[(\ln(1+x))\times x\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x}{1+x}\,dx = \ln 2 - 0 - \left[\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 1+x\,dx \right]$

$= \ln 2 - [x]_0^1 + \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2 - 1 + \ln 2 - 0 = 2\ln 2 - 1$

Comme $f_1(0) = \ln 1 = 0$ et f_1 strictement croissante sur $[0; +\infty[$, $f_1(x) \geqslant 0$ sur $[0; 1]$.

I_1 est la mesure d'aire en *u.a.* du domaine du plan délimité par C_1, par l'axe des abscisses, par l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

2) a) $x \in [0; 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $0 \leqslant x^n \leqslant 1$
alors $1 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2$ Comme ln est strictement croissante sur [1; 2], et que ln 1 = 0, on obtient: Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $0 \leqslant \ln(1 + x^n) \leqslant \ln 2$
L'intégration sur [0; 1] conserve l'ordre, d'où,
$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \ln 2 \, \mathrm{d}x$ et comme $\int_0^1 \ln 2 \, \mathrm{d}x = \ln 2 \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x = \ln 2$
on a: pour tout n entier naturel non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$
b) Variations de la suite (I_n).
$x \in [0; 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n \leqslant 1$
D'où, Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $1 \leqslant 1 + x^{n+1} \leqslant 1 + x^n$ Comme ln est strictement croissante sur [1; 2], et que ln 1 = 0, on obtient: Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $0 \leqslant \ln(1 + x^{n+1}) \leqslant \ln(1 + x^n)$
L'intégration sur [0; 1] conserve l'ordre, d'où,
$I_{n+1} \leqslant I_n$
La suite (I_n) est décroissante
c) La suite (I_n) étant décroissante et minorée par 0 est convergente.

3) g est définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1 + x) - x$
a) pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$ qui est négatif sur $[0; +\infty[$.
La fonction g est par conséquent décroissante sur $[0; +\infty[$.
b) Comme $g(0) = \ln 1 - 0 = 0$ et que g est décroissante sur $[0; +\infty[$, on a:
pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$.

Cette inégalité s'applique à tout réel positif ou nul, elle s'applique donc à x^n, d'où, $g(x^n) \leqslant 0$
On vient de montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1 + x^n) \leqslant x^n$
c) L'intégration sur [0; 1] conserve l'ordre, d'où,
$I_n \leqslant \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$.
$$\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$
Comme $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, et que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
La suite (I_n) converge vers 0

Exercice 2 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x + 2y + z - 3 = 0$.

2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x - 2y + 3z = 3$, $2x + 3y - 2z = 6$ et $4x - y + 4z = 12$ n'ont pas de point commun.

3. Les droites de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3+2t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ et $\begin{cases} x = 7+2u \\ y = 2+2u \\ z = -6-u \end{cases}$, $u \in \mathbf{R}$ sont sécantes.

4. On considère les points :
A, de coordonnées $(-1, 0, 2)$, B, de coordonnées $(1, 4, 0)$, et C, de coordonnées $(3, -4, -2)$.
Le plan (ABC) a pour équation $x + z = 1$.

5. On considère les points :
A, de coordonnées $(-1, 1, 3)$, B, de coordonnées $(2, 1, 0)$, et C, de coordonnées $(4, -1, 5)$.
On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

1) **VRAI**

Preuve:

Un vecteur directeur de la droite est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et un vecteur normal du plan est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Comme $\vec{u}\cdot\vec{n} = 1\times1 + (-2)\times2 + 3\times1 = 0$, les deux vecteurs sont orthogonaux.

La droite est donc parallèle au plan.

Le point $A(2; 0; -1)$ est un point de la droite mais n'est pas un point du plan.

La droite est donc strictement parallèle au plan.

2) **FAUX**

Preuve:

Un contre-exemple:

Il peut paraître évident que le point $A(3;\,0;\,0)$ vérifie les trois équations et en ce cas, on a montré que les plans avaient au moins un point commun.

Autre méthode: ***(On ne voit pas immédiatement de contre-exemple)***

Étude du système $\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x+3y-2z=6 \\ 4x-y+4z=12 \end{cases} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x+3y-2z=6 \\ 4x-y+4z=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ -7y+8z=0 \\ -7y+8z=0 \end{cases} \begin{pmatrix} L_1 \\ 2L_1-L_2 \\ 4L_1-L_3 \end{pmatrix}$$

Les deux dernières équations sont équivalentes, d'où, ce système a une infinité de solutions.

Il suffit d'en choisir une pour prouver que la proposition est fausse.

Par exemple: $y = z = 0$ $x = 3$ (on retrouve le point A)

ou encore $y = 8$, $z = 7$; $x = -2$

Le point $B(-2;\,8;\,7)$ est un point commun aux plans (P), (P') et (P'').

Complément:

L'intersection de ces trois plans est une droite.

Une représentation paramétrique de cette droite est (en posant par exemple: $z = 7t$)

$$\begin{cases} x=3-5t \\ y=8t \\ z=7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3) **VRAI**

Preuve:

Le point $I\,(5;\,0;\,-5)$ de paramètre -1 dans chacune des équations est commun aux deux droites.

Un vecteur directeur de la première droite est: $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la deuxième droite est: $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1. \end{pmatrix}$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc, les droites ne sont pas parallèles.

Elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Résolution du système: $\begin{cases} 2-3t=7+2u \\ 1+t=2+2u \\ -3+2t=-6-u \end{cases} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$

On peut remarquer qu'en ajoutant membre-à-membre, on obtient: $0 = 3 + 3u$, soit: $u = -1$.

En remplaçant, u par -1, il vient:

$\begin{cases} 2-3t=5 \\ 1+t=0 \\ -3+2t=-5 \end{cases}$, soit $t = -1$ pour les trois équations.

4) **VRAI**

Preuve:

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B, C définissent donc un plan.

Les coordonnées de A vérifient l'équation $x + z = 1$

Les coordonnées de B vérifient l'équation $x + z = 1$

Les coordonnées de C vérifient l'équation $x + z = 1$

Complément:

Si l'équation du plan n'est pas donnée, on peut faire: $\overrightarrow{AB} = 2\ \vec{u}$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = 4\ \vec{v}$ avec $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Pour tout $M(x; y; z)$ de l'espace, on a: $\overrightarrow{AM} = \alpha\ \vec{u} + \beta\ \vec{v}$ α et β réels.

On en déduit: $\begin{cases} x=-1+\alpha+\beta \\ y=2\alpha-\beta \\ z=2-\alpha-\beta \end{cases} \begin{pmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{pmatrix}$

En faisant $L_1 + L_3$, on obtient: $x + z = 1$

5) **FAUX**

Preuve:

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Or,

si C peut s'écrire comme barycentre de A et B, alors les points A, B, C sont alignés.

Exercice 3 5 points

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.
   a. Démontrer que : $P(X=-1)=\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.
   b. Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.
   c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :
   $$E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}.$$
   d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants.
   Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.
   Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.
   Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :
   $$\text{pour tout } k\in\mathbf{N},\ P(Z\leqslant k)=\int_0^k 0{,}01\mathrm{e}^{-0{,}01x}\,\mathrm{d}x.$$
   On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.
   a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z\leqslant 50)$.
   b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : "le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche" sachant l'évènement "le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche".

1) Ne pas hésiter à faire un arbre de probabilités.

a) La variable aléatoire prend la valeur -1 dans le cas où le tirage des deux boules donne une noire et une blanche.

En notant B (boule blanche) et R (boule rouge) , et, en numérotant 1 et 2 dans l'ordre des tirages

$P(X=-1) = P(B_1R_2 \text{ ou } R_1B_2)$

$= P(B_1R_2) + P(R_1B_2) = P(B_1)\times P_{B1}(R_2) + P(R_1)\times P_{R1}(B_2)$

$$= \frac{10}{10+n} \times \frac{n}{9+n} + \frac{n}{10+n} \times \frac{10}{9+n} = \frac{20n}{(10+n)(9+n)}$$

b) Dans le cas où les deux boules sont blanches, on a:

$P(X = 4) = P(B_1B_2) = \frac{10}{10+n} \times \frac{9}{9+n} = \frac{90}{(10+n)(9+n)}$

Dans le cas où les deux boules sont noires, on a:

$P(X = -6) = P(R_1R_2) = \frac{n}{10+n} \times \frac{n-1}{9+n} = \frac{n(n-1)}{(10+n)(9+n)}$

c) $E(X) = (-6)\times \frac{n(n-1)}{(10+n)(9+n)} + (-1)\times \frac{20n}{(10+n)(9+n)} + 4\times \frac{90}{(10+n)(9+n)}$

$$= \frac{-6n^2+6n-20n+360}{(10+n)(9+n)} = \frac{-6n^2-14n+360}{(10+n)(9+n)}$$

d) n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, le dénominateur est strictement positif.

Le signe de $E(X)$ est celui du numérateur (second degré).

Ce numérateur est positif (signe contraire de -6 coefficient de n^2) pour les valeurs de n entre les racines.

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4\times(-6)\times 360 = 8\,836 = 94^2$

Les racines sont $n_1 = \frac{-(-14)-94}{2\times(-6)} = \frac{20}{3}$ et $n_2 = \frac{-(-14)+94}{2\times(-6)} = -9$

$E(X) > 0$ pour $n \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$

Remarque: on peut contrôler en traçant la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -6x^2 - 14x + 360$

2) Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges obtenues lors de ces vingt tirages.

Les tirages successifs avec remise et indépendants correspondent au modèle donné par la loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = P(R) = \frac{n}{10+n}$.

$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{n}{10+n}\right)^0\left(1-\frac{n}{10+n}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20}$

$1 - \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} > 0{,}999 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} < 0{,}001$ (on applique ln strictement croissante)

$\Leftrightarrow 20 \ln \frac{10}{10+n} < \ln 0{,}001$

$\Leftrightarrow \ln \frac{10}{10+n} < \frac{1}{20} \ln 0{,}001$ (on applique les propriétés du ln)

$\Leftrightarrow \ln \frac{10}{10+n} < \ln\left(\frac{1}{1000^{1/20}}\right)$ (on applique exp strictement croissant)e)

$\Leftrightarrow \frac{10}{10+n} < \left(\frac{1}{1000^{1/20}}\right)$ $1000^{1/20} = 10^{3/20}$ et $10 = 10^{20/20}$

$\Leftrightarrow 10 + n > 10^{23/20}$

$\Leftrightarrow n > 10^{23/20} - 10$

La calculatrice donne 4,12 comme valeur approchée de $10^{23/20} - 10$

La valeur minimale de n est 5.

3) a) $P(Z \leqslant 50) = \int_0^{50} 0{,}01\,e^{-0{,}01x}\,dx = \left[-e^{-0{,}01x}\right]_0^{50} = -e^{-0{,}5} + 1 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ $(\approx 0{,}39)$

b) On reconnaît une loi exponentielle (loi de durée de vie sans vieillissement),

d'où, $P_{Z\geqslant 50}(Z \leqslant 60) = P(Z \leqslant 10) = \int_0^{10} 0{,}001\,e^{-0{,}01}\,dx = \left[-e^{-0{,}01x}\right]_0^{10} = -e^{-0{,}1} + 1 = 1 - e^{-0{,}1}$ $(\approx 0{,}095)$

ou encore

$$P_{Z\geqslant 50}(Z \leqslant 60) = \frac{P((Z\geqslant 50)\cap(Z\leqslant 60))}{P(Z\geqslant 50)} = \frac{\int_{50}^{60} 0{,}01\,e^{-0{,}01x}\,dx}{1-\int_0^{50} 0{,}01\,e^{-0{,}01x}\,dx} = \frac{\left[-e^{-0{,}01x}\right]_{50}^{60}}{1-\left[-e^{-0{,}01x}\right]_0^{50}} = \frac{-e^{-0{,}6}+e^{-0{,}5}}{1-(e^{-0{,}5}-1)} = 1 - e^{-0{,}1}$$

Exercice 4 4 points

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. *a.* Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.
   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.
   c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

1) $u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3.}$

$u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\dfrac{5}{9} - 1 = -\dfrac{14}{9}$

$u_3 = \dfrac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\dfrac{14}{27}$

2a) Démonstration par récurrence:

Initialisation:

Soit $n = 4$ $u_4 = \dfrac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = -\dfrac{14}{81} + 1 = \dfrac{67}{81}$. Par conséquent , $u_4 > 0$

Hérédité:

Soit un entier $n \geqslant 4$ tel que $u_n \geqslant 0$

$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2.$

Comme $n \geqslant 4$, $n - 2 \geqslant 2$

Comme $u_n \geqslant 0$, $\frac{1}{3} u_n \geqslant 0$.

La somme de termes positifs est positive d'où $u_{n+1} \geqslant 0$.

On a montré: si $n \geqslant 4$ et si $u_n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \geqslant 0$

Conclusion:

D'après l'axiome de récurrence, pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$

b) Remarquons que pour $n \geqslant 5$, $n - 1 \geqslant 4$ et $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1} + (n-1) - 2$

Si $n \geqslant 5$ alors $u_{n-1} \geqslant 0$, d'où, $\frac{1}{3} u_{n-1} \geqslant 0$

$$\frac{1}{3} u_{n-1} + (n-1) - 2 \geqslant n - 3$$

$$u_n \geqslant n - 3$$

c) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$ et $u_n \geqslant n - 3$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3) $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$, soit: $u_n = \dfrac{-v_n + 3\text{n} - \frac{21}{2}}{2} = \dfrac{-2v_n + 6n - 21}{4}$

a) $v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3n - \frac{21}{2} = -2(\frac{1}{3} u_n + n - 2) + 3n - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3} u_n + n - \frac{13}{2}$

$v_{n+1} = -\frac{2}{3} \left(\dfrac{-2v_n + 6n - 21}{4} \right) + n - \frac{13}{2} = \frac{1}{3} v_n - n + \frac{13}{2} + n - \frac{13}{2} = \frac{1}{3} v_n$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2 \times u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$.

b) On peut donc écrire $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

On a alors: $-2u_n + 3n - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

soit: $u_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} n - \frac{21}{4}$.

c) $S_\text{n} = \sum\limits_{0}^{n} u_k$

On peut écrire u_n sous la forme $\frac{25}{4} w_n + \frac{3}{2} n - \frac{21}{4}$

où (w_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1.

En faisant la somme terme à terme et en factorisant, on a: $S_n = \frac{25}{4}\sum_0^n w_k + \frac{3}{2}\sum_0^n k - \frac{21}{4}\sum_0^n 1$

$\sum_0^n w_k = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1})$ Somme de $n + 1$ termes consécutifs d'une suite géométrique

$\sum_0^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ Somme de $n + 1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique

$\sum_0^n 1 = n + 1$

Conclusion: $S_n = \sum_0^n u_k = \frac{25}{4}\times\frac{3}{2}\times(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}) + \frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1)$

$S_n = -\frac{25}{8}\times\frac{1}{3^n} + \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{2}n + \frac{33}{8}$