**Exercice 2** (Bac Pondichéry avril 2003)

**Partie 1**

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante (E): $z^3+2z^2-16=0$

1) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme $(z-2)(az^2+bz+c)=0$ où $a$, $b$ et $c$ sont trois réels que l'on déterminera

Comme $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$ , 2 est une solution de (E)

En développant $(z-2)(az^2+bz+c)$ , on a: $az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$

Par identification des **coefficients**, on obtient le système: $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=2 \\ c-2b=0 \\ -2c=-16 \end{cases}$

il vient: $a=1$ , $b-2a=2$ , d'où, $b=4$ , puis, $c-2b=0$ , soit, $c=8$ . Comme $-2\times 8=-16$ , $z^3+2z^2-16=(z-2)(z^2+4z+8)$

*quelques questions:*

*qu'est-ce qu'un polynôme?*

*quand on écrit "égalité des polynômes", que veut-on?*

*faites vous une différence entre: résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation d'inconnue x,* $x^2+x+1=x^2+ax+b$

*déterminer a et b pour avoir l'égalité: pour tout x réel,* $x^2+x+1=x^2+ax+b$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle

$z^3+2z^2-16=(z-2)(z^2+4z+8)=(z-2)[(z+2)^2+4]=(z-2)(z+2+2\mathrm{i})(z-2-2\mathrm{i})$

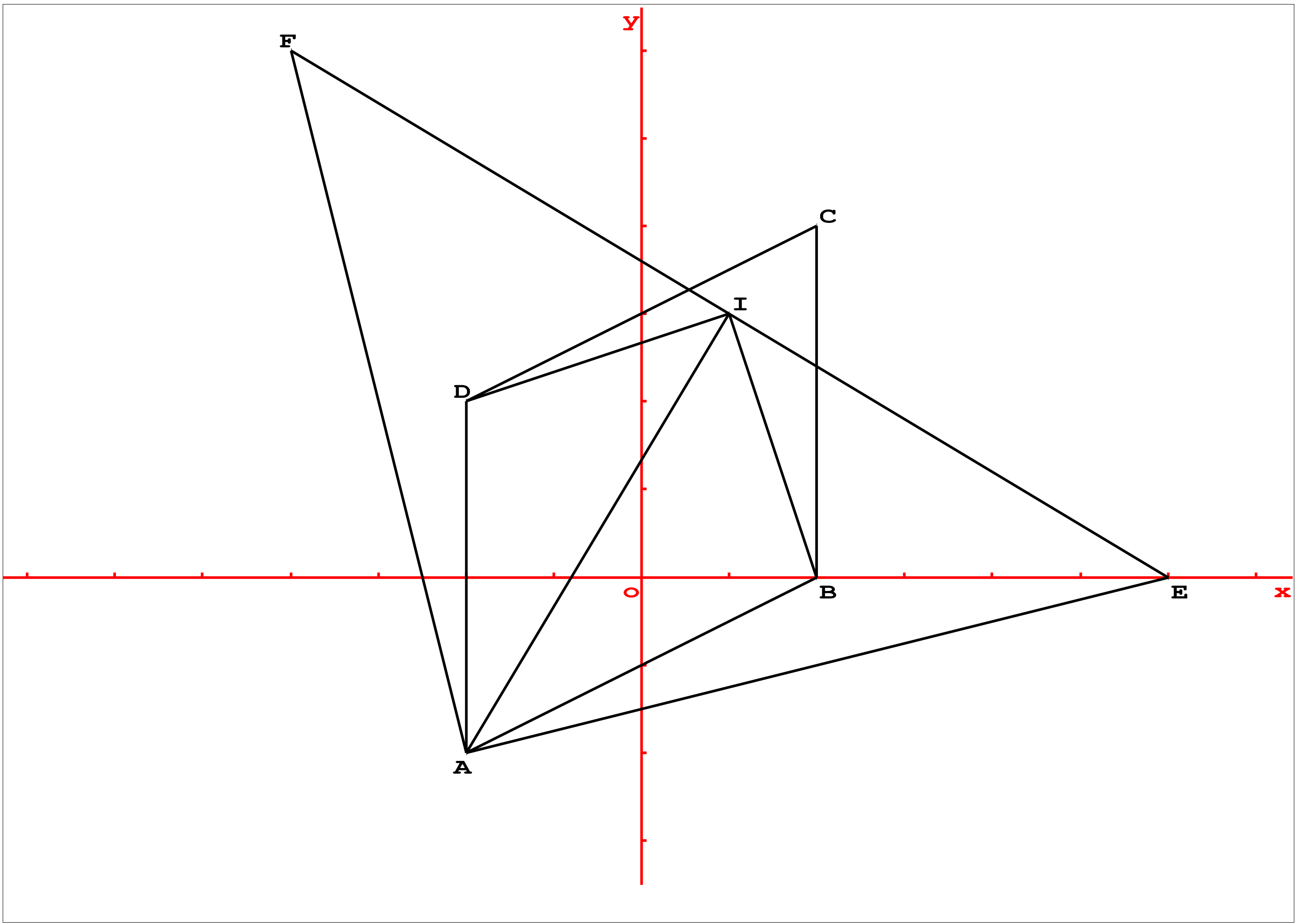
On en déduit les trois solutions de (E): 2, $-2-2\mathrm{i}=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{-3\pi}{4}}$ et $-2+2\mathrm{i}=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

**Rappel:** les solutions de $az^2+bz+c=0$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ , $b$ et $c$ réels, sont des complexes conjugués lorsque $\Delta<0$

Le symbole $\sqrt{}$ ne peut s'utiliser que sur les réels positifs.

ici: $\Delta=-16=(4\mathrm{i})^2$

Les complexes conjugués ont le même module et des arguments opposés. Il suffit de déterminer l'écriture exponentielle de l'un et d'en déduire celle de l'autre.




**Partie 2**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Placer les points *A*, *B*, *D* d'affixes respectives $z_A=-2-2\mathrm{i}, z_B=2$ *et* $z_D=-2+2\mathrm{i}$

2) Calculer l'affixe $z_C$ du point *C* tel que *ABCD* soit un parallélogramme. Placer *C*.

*ABCD* est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

On en déduit: $z_C=(z_D-z_A)+z_B$

$z_C=-2+2\mathrm{i}-(-2-2\mathrm{i})+2=2+4\mathrm{i}$

3) Soit *E* l'image du point *C* par la rotation de centre *B* et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et *F* l'image du point *C* par la rotation de centre *D* et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

a) Calculer les affixes $z_E$ et $z_F$ des points *E* et *F*.

L'écriture complexe de la rotation de centre *B* et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est: $z'-z_B=-\mathrm{i}(z-z_B)$

d'où, $z_E=-\mathrm{i}(2+4\mathrm{i}-2)+2=6$

L'écriture complexe de la rotation de centre *D* et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ est: $z'-z_D=\mathrm{i}(z-z_D)$

d'où, $z_F=\mathrm{i}(2+4\mathrm{i}+2-2\mathrm{i})-2+2\mathrm{i}=-4+6\mathrm{i}$

b) Placer les points *E* et *F*.

4a) Vérifier que $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \mathrm{i}$

$\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-4+6\mathrm{i}+2+2\mathrm{i}}{6+2+2\mathrm{i}} = \frac{-2+8\mathrm{i}}{8+2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(8+2\mathrm{i})}{8+2\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

b) En déduire la nature du triangle *AEF*.

Comme $z_F - z_A = \mathrm{i}(z_E - z_A)$ , le point *F* est l'image du point *A* dans la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{2}$

*AEF* est donc un triangle rectangle isocèle direct en *A*.

5) Soit *I* le milieu de $[EF]$

Déterminer l'image du triangle *EBA* par la rotation de centre *I* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

*I* étant le milieu de l'hypoténuse $[EF]$ du triangle rectangle *AEF*, on a: $IA = IE = IF$

Le triangle *AEF* étant isocèle direct $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IE}) = \frac{\pi}{2}$

Par conséquent, les images de *E* et *F* par la rotation de centre *I* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ sont respectivement *A* et *F*

$z_I = \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{6-4+6\mathrm{i}}{2} = 1+3\mathrm{i}$

Soit $B'$ l'image de *B* par la rotation de centre *I* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, on a: $z_{B'} = -\mathrm{i}(z_B - z_I) + z_I = -\mathrm{i}(2-1-3\mathrm{i}) + 1 + 3i = -2+2i = z_D$

L'image de *B* par la rotation de centre *I* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est le point *D*

L'image de *EBA* par la rotation de centre *I* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est le triangle *ADF*