Exercice 1

L'espace est rapporte au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\mathscr{P}$ d'équation $2x+y-2z+4=0$, $A(3;2;6)$, $B(1;2;4)$, $C(4;-2;5)$

1 a)b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (évident). Les points *A*, *B*, *C* n'étant pas alignés définissent un plan et, comme les coordonnées de *A*, *B*, *C* vérifient l'équation de $\mathscr{P}$, ce plan est $\mathscr{P}$.

2 a) Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\times1+0\times(-4)+(-2)\times(-1)=0$, donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$s ont orthogonaux. Le triangle *ABC* est un triangle rectangle en *A*.

b) Δ étant la droite passant par *O* et perpendiculaire à $\mathscr{P}$, un point $M(x;y;z)\in\Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires où $\vec{n}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.

On a: $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, d'où, il existe un réel *t* tel que : $\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$. Équations paramétriques de Δ.

c) *K* étant le projeté orthogonal de *O* sur $\mathscr{P}$, la distance *OK* est la distance de *O* au plan. On a donc: $OK=\dfrac{|2\times0+0-2\times0+4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{9}}=\dfrac{4}{3}$

Complément:

Le projeté orthogonal K de O sur $\mathscr{P}$ est par conséquent le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}$. Les coordonnées de K vérifient le système d'équations paramétriques de Δ et l'équation de $\mathscr{P}$.

En notant t_K le paramètre de K, il vient $2(2t_K)+t_K-2(-2t_K)+4=0$, d'où, $t_K=-\dfrac{4}{9}$

Les coordonnées de $K\left(-\dfrac{8}{9};-\dfrac{4}{9};\dfrac{8}{9}\right)$ et la distance $OK=\sqrt{\left(-\dfrac{8}{9}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{9}\right)^2+\left(\dfrac{8}{9}\right)^2}=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$.

d) La base du tétraèdre *OABC* est le triangle *ABC* rectangle en *A*, d'aire: $\mathscr{B}$ = $\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{\sqrt{8}\times\sqrt{18}}{2}=6$ u.a;

La hauteur est *OK*, d'où, $\mathscr{V}$ = $\dfrac{1}{3}\times6\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$ u.v.

3) Soit le système de points pondérés $S=\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

a) b) L'unicité et l'existence du barycentre *G* de ce système sont assurés par le fait que la somme 3+1+1+1 est non nulle.

Le centre de gravité *I* du triangle *ABC* est le barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ et d'après la propriété du barycentre partiel, *G* est le barycentre du système $\{(O,3),(I,3)\}$. *G* est donc le milieu du segment [*OI*].

c) Les coordonnées de *G* sont données par: $\begin{cases}x_G=\dfrac{3\times x_O+1\times x_A+1\times x_B+1\times x_C}{6}\\ y_G=\dfrac{3\times y_O+1\times y_A+1\times y_B+1\times y_C}{6}\\ z_G=\dfrac{3\times z_O+1\times z_A+1\times z_B+1\times z_C}{6}\end{cases}$. $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right)$

et la distance de *G* à $\mathscr{P}$ est donnée par: $d(G,\mathscr{P})$ = $\dfrac{\left|2\times\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}-2\times\dfrac{5}{2}+4\right|}{3}=\dfrac{2}{3}$ ..

4) Soit Γ l'ensemble des points *M* de l'espace vérifiant: $\|\ 3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\ \|=5$ (1)

Par propriété du barycentre, on sait: $3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$, donc,

(1) $\Leftrightarrow$ $6MG=5$ $\Leftrightarrow$ $MG=\dfrac{5}{6}$

Γ est donc la sphère de centre G et de rayon $\dfrac{5}{6}$

L'intersection de Γ et de $\mathscr{P}$ est un cercle car $\dfrac{5}{6} > \dfrac{2}{3}$

Exercice 2

1) **ROC (Bien analyser les prérequis et les définitions rappelés dans le texte. C'est à partir d'eux que vous devez construire la démonstration)**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit R la rotation de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ.

On sait: $R(\Omega)=\Omega$ et , pour $M \neq \Omega$ $M'=R(M)$ est défini par $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ $[2\pi]$

On sait: pour tous points A et B d'affixes respectives a et b, $|b-a|=AB$ et $\arg(b-a)=(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ $[2\pi]$

Soit M $\neq \Omega$, on a: $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=1$ et $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M'})-(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M}) = \theta$ $[2\pi]$ (Relation de Chasles)

En notant z et z' les affixes respectives de M et M', on a: $\dfrac{|(z'-\omega)|}{|(z-\omega)|}=1$ et $\arg(z'-\omega)-\arg(z-\omega)=\theta$ $[2\pi]$

Il vient: $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=1$ et $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\theta$ $[2\pi]$

Pour $z \neq \omega$, le nombre complexe $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

D'où $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}=\mathrm{e}^{i\theta}$, soit: $z'-\omega=\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$

Lorsque $M=\Omega$, c'est-à-dire $z=\omega$, l'égalité $z'-\omega=\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$ donne $z'=\omega$, soit: $M'=\Omega$

La relation est vérifiée dans tous les cas.

2) I d'affixe $z_I=1+\mathrm{i}$ et B d'affixe $z_B=2+2\,\mathrm{i}$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

a) L'écriture complexe de R est donnée par $z'-(2+2\,\mathrm{i})=\mathrm{e}^{i\pi/3}(z-(2+2\mathrm{i}))$:

$z \mapsto e^{i\pi/3}(z-(2+2\mathrm{i}))+2+2\,\mathrm{i}$, soit:

$$z \mapsto \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(z-2-2\,\mathrm{i})+2+2\,\mathrm{i}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right).z+(2+2\,\mathrm{i})\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right)$$

$$z \mapsto \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)z+1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})\mathrm{i}$$

b) L'image de I par R est A d'affixe $z_A=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})+1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})\mathrm{i}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i}$

c) $IO=|z_I|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$, $IB=|z_B-z_I|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.

Le triangle BIA est un triangle équilatéral direct par construction, d'où, $IA=IB=AB$.

Ce qui prouve que O,A,B sont sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

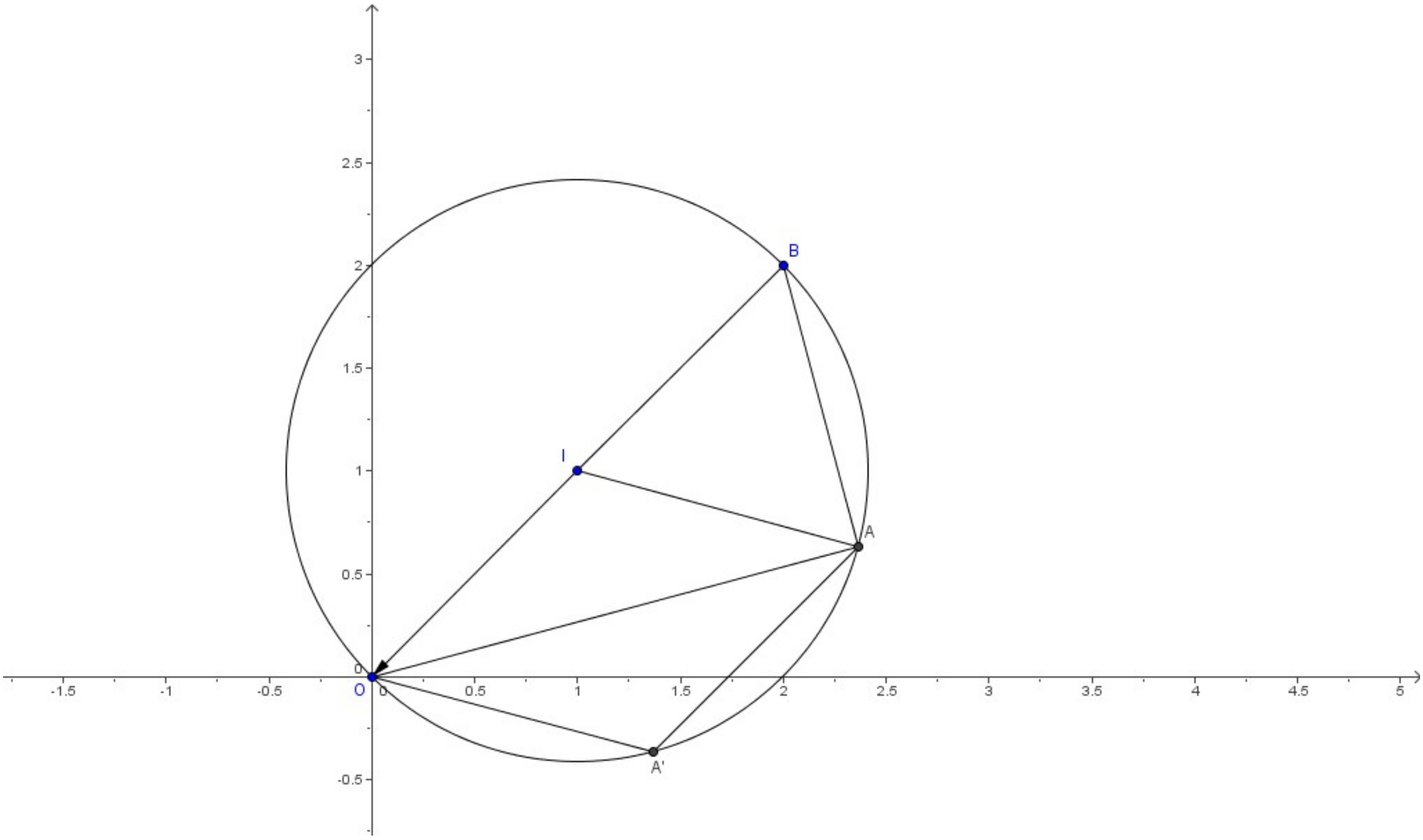
Remarque: $IA=|z_A-z_I|=\left|\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\dfrac{1+3+2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1+3-2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{2}$

Or, I est le milieu de [OB], d'où, le triangle OAB inscrit dans le cercle de diamètre [OB] est rectangle en A.

D'après $R(I)=A$, on a: $(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BA})=\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$, d'où, $(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BA})=\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

Le triangle BOA est donc un triangle rectangle direct en A et on a: $(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO})=\pi$ $[2\pi]$avec $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO})=\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\pi-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$



d) $(\vec{u};\overrightarrow{OA})=(\vec{u};\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$ $[2\pi]$ avec $(\vec{u};\overrightarrow{OB})=\arg(2+2\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

Une mesure de $(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{12}$

Compléments: On a donc: $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\mathcal{R}e(z_A)}{|z_A|}=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3) *T* translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A'=T(A)$

a) L'écriture complexe de *T* est: $z\mapsto z-z_I$, d'où, $z_{A'}=z_A-z_I=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i}$

b) L'égalité $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{AA'}$ prouve que *IOA'A* est un parallélogramme et comme *IO* = *IA* ce parallélogramme est un losange.

On a donc: $(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI})=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\dfrac{\pi}{6}$

c) On cherche $\arg(z_A')$, c'est-à-dire une mesure de $(\vec{u};\overrightarrow{OA'})$

Or, d'après la relation de Chasles: $(\vec{u};\overrightarrow{OA'})=(\vec{u};\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'})=\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 3

f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$

1) Pour $x\geqslant 0$, $x+3>0$, d'où, $x\mapsto \ln(x+3)$ est la composée d'une fonction affine $u:x\mapsto x+3$ dérivable et strictement positif, donc, $x\mapsto \ln(x+3)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.

f est le quotient de deux fonctions dérivables de dénominateur non nul, donc *f* est dérivable, et, pour tout $x\geqslant 0$,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+3}\times(x+3)-1.\ln(x+3)}{(x+3)^2}=\frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}.$$

On sait: $x\geqslant 0$, d'où, $x+3\geqslant 3$. Or $3>\mathrm{e}$

En rappelant que la fonction ln est strictement croissante sur son ensemble de définition et que $\ln e=1$, il vient: $\ln(x+3)\geqslant\ln 3$, donc, $\ln(x+3)>1$.

Par conséquent, sur $[0;+\infty[$, $f'(x)<0$ et *f* est strictement décroissante.

On sait: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$, d'où, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to=+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

Tableau de variations: $f(0)=\ln\frac{(3)}{3}$

x	0	$+\infty$
f'(x)	$-$	
f(x)	$\frac{\ln(3)}{3}$ $\searrow$	0

Quelques remarques: *le nombre réel* $\ln(x+3)$ *s'annule pour* $x=-2$.

$\ln(x+3)=1$ *lorsque* $x+3=\mathrm{e}$*, soit* $x=\mathrm{e}-3$

f est de la forme $u'.u$ *avec* $u(x)=\ln(x+3)$*, d'où, les primitives de f sont les fonctions définies sur* $[0;+\infty[$ *par* $x\mapsto\frac{1}{2}[\ln(x+3)]^2+C$ *où* $C\in\mathbb{R}$

2 a)b)c) *f*, étant strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, on a: si $n\leqslant x\leqslant n+1$, alors $f(n+1)\leqslant f(x)\leqslant f(n)$ et, d'après les propriétés de comparaison des intégrales: $\int_n^{n+1}f(n+1)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_n^{n+1}f(n)\,\mathrm{d}x$.

Comme $f(n+1)$ et $f(n)$ sont des valeurs indépendantes de *x*, il vient:

$f(n+1)\times[(n+1)-n]\leqslant u_n\leqslant f(n)\times[(n+1)-n]$ Conclusion: $f(n+1)\leqslant u_n\leqslant f(n)$

Or, la limite quand *n* tend vers $+\infty$ de $f(n+1)$ et de $f(n)$ étant 0, le théorème des gendarmes prouve que (u_n) converge vers 0.

3) a) *F* définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=[\ln(x+3)]^2$ est la composée de la fonction $x\mapsto\ln(x+3)$ dérivable sur $[0;+\infty[$ suivie de la fonction carré, d'où, *F* est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\geqslant 0$, $F'(x)=2\times\frac{1}{x+3}\times\ln(x+3)$

b) On en déduit: $I_n=\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\times F(x)\right]_0^n=\frac{F(n)-F(0)}{2}=\frac{[\ln(n+3)]^2-[\ln(3)]^2}{2}$

Calculs pour l'entraînement:

$$[\ln(n+3)]^2-[\ln(3)]^2=[\ln(n+3)+\ln(3)]\times[\ln(n+3)-\ln(3)]=\ln[3(n+3)]\times\ln\left(\frac{n+3}{3}\right)$$

4) $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\ldots+\int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x=I_n$ d'après la relation de Chasles.

Or, $\lim_{n\to+\infty}\ln(n+3)=+\infty$, d'où, $\lim_{n\to+\infty}[\ln(n+3)]^2=+\infty$.

On a donc: $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$. La suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 4

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie ***au hasard*** accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge 50 personnes de manière ***indépendante***. On considère les évènements:
A: «au moins une personne accepte de répondre»
B: «moins de trois personnes acceptent de répondre»
C: «trois personnes ou plus acceptent de répondre».

Étant donné les conditions (au hasard, indépendance), la variable aléatoire *X* définie par le nombre de personnes acceptant de répondre suit la loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(50;0,1)$.
L'événement $\overline{A}$ "aucune personne ne répond" a pour probabilité

$P(X=0)=\binom{50}{0}0{,}1^0(1-0{,}1)^{50-0} = 0{,}9^{50}$

$P(A)=1-0{,}9^{50} \approx 0{,}995$

Les événements $(X=0)$, $(X=1)$, $(X=2)$ forment une partition de *B*,
d'où, $p(B)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) =$

$\binom{50}{0}0{,}1^0(1-0{,}1)^{50-0}+\binom{50}{1}0{,}1^1(1-0{,}1)^{50-1}+\binom{50}{2}0{,}1^2(1-0{,}1)^{50-2} =$

$0{,}9^{50}+50\times 0{,}1\times 0{,}9^{49}+\frac{50\times 49}{2}0{,}1^2\times 0{,}9^{48} \approx 0{,}112$ au millième par excès.

C est l'événement contraire de *B*, d'où, $P(C)=1-P(B) \approx 0{,}888$ au millième par défaut.

2. Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire *X* qui, à tout groupe de *n* personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par:

$$\begin{cases} \text{Pour tout entier k tel que } 0\leqslant k\leqslant n-1, P(X=k)=\dfrac{e^{-a}a^k}{k!} \\ \text{et } P(X=n)=1-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{e^{-a}a^k}{k!} \\ \text{formules dans lesquelles } a=\dfrac{n}{10} \end{cases}$$

a. La probabilité qu'au moins trois personnes répondent est: $1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2) =$

$1-\frac{e^{-a}a^0}{0!}-\frac{e^{-a}a^1}{1!}-\frac{e^{-a}a^2}{2!}=1-e^{-a}(1+a+a^2/2) = f(a)$

b. Calculer f (5). En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1?

$f(5)=1-e^{-5}(1+5+25/2) \approx 0{,}875$ à un millième par défaut

Pour $a=5$, $n=50$, d'où, $f(5)$ est la probabilité pour que sur 50 personnes interrogées, trois personnes ou plus acceptent de répondre. (Événement *C* du 1))
On peut considérer que le résultat est voisin de celui obtenu à la question 1.
L'écart absolu est 0,013 et l'écart relatif $\frac{0{,}013}{0{,}888} \approx \frac{15}{1000}$ par excès

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.
a. Étudier les variations de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=1-e^{-x}(1+x+x^2/2)$
ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.
La fonction *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, $f'(x)=-(-1)e^{-x}(1+x+x^2/2)-e^{-x}(1+2x/2)=e^{-x}(x^2/2)$

Comme $x^2 \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$, la dérivée $f'(x) \geqslant 0$ sur IR⁺ ($f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$) et *f* est strictement croissante sur IR⁺.

D'autre part: $f(x) = 1 - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} - \frac{x^2}{2e^x}$ et comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$ =0, on a: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ =1

$f(0) = 0$

Tableau de variations:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	1

b. Montrer que l'équation *f(x)* = 0,95 admet une solution unique sur IR⁺ , et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3.

On a les conditions suivantes:

f est continue sur IR⁺,

f est strictement croissante sur IR⁺,

l'intervalle image [0;1[contient 0,95

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}95$ admet une et une seule solution *α* dans IR⁺.

La calculatrice donne: $f(6{,}29)$ ≈ 0,9498 par excès et $f(6{,}3)$ ≈ 0,958 par défaut

Ce qui prouve 6,29 <*α* < 6,3

c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.

D'après le 2), $f(x)$ est la probabilité qu'au moins trois personnes sur *n* personnes acceptent de répondre avec $n = 10x$.

D'après 3) pour qu'au moins trois personnes interrogées répondent avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95, il faut que $f(x) \geqslant f(\alpha)$.

Si $x \geqslant 6{,}3$ on a: $x > \alpha$ et $f(x) \geqslant f(\alpha)$.

Donc $n \geqslant 63$. Il faut interroger au minimum 63 personnes.