EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur [1 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ et

soit H la fonction définie sur [1 ; +∞[par $H(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

a. Justifier que f et H sont bien définies sur [1 ; +∞[

Comme pour $x \geqslant 1$, on a: $e^x \geqslant e > 1$, on a l'expression $e^x - 1 > 0$.

f est par conséquent une fonction continue sur [1; +∞[et l'intégrale de 1 à x est bien définie pour $x \geqslant 1$.

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

f est la dérivée première de H sur [1; +∞[.
H est la primitive de f qui s'annule en 1.

c. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

Comme **pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) > 0$**, $H(3) = \displaystyle\int_1^3 f(t)\,dt$ est la mesure de l'aire en *u.a.* = $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$ du domaine $\mathscr{D}$ défini par $\mathscr{D} = \{M(x; y) \,/\, 1 \leqslant x \leqslant 3, \text{ et, } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

ou encore, l'aire du domaine délimité par les droites d'équation $x = 1$; $x = 3$; l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{e^x - 1} = x \times \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

Il suffit de remarquer que $e^{-x} \times e^x = 1$

On peut multiplier le membre d droite par $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}}$, ou, le membre de gauche par $\dfrac{e^x}{e^x}$ ...

b. En déduire que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x})\,dx$

D'après 2a), $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\,dx$

Posons $u(x) = 1 - e^{-x}$, on a alors $u'(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, d'où, $\dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u > 0$ sur [1; 3].

Une primitive de ϕ: $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ est donc $\ln \circ u$

Faisons une intégration par parties: $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln(1-e^{-x}) \end{cases}$.

Ces fonctions sont dérivables à dérivées continues sur [1; 3], d'où,

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \left[x\times\ln(1-e^{-x})\right]_1^3 - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,dx = 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,dx$$

c. Montrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leqslant \ln(1-e^{-x}) \leqslant \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$

$1 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow -1 \geqslant -x \geqslant -3 \Rightarrow e^{-1} \geqslant e^{-x} \geqslant e^{-3}$ car, la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow -e^{-1} \leqslant -e^{-x} \leqslant -e^{-3}$

$\Rightarrow 1-e^{-1} \leqslant 1-e^{-x} \leqslant 1-e^{-3}$ et en appliquant le ln strictement croissant sur $]0; +\infty[$, il vient: $\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leqslant \ln(1-e^{-x}) \leqslant \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$

ou encore

Comme la dérivée v' de v définie à la question précédente dans l'Ipp est strictement positive, la fonction v est strictement croissante et pour tout $x \in [1; 3]$, $v(1) \leqslant v(x) \leqslant v(3)$

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,dx$ puis de $\int_1^3 f(x)\,dx$

En intégrant de 1 à 3 chaque membre de l'encadrement du c) et en remarquant que $\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)$ et $\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$ sont des constantes, on a:

$$\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\int_1^3 1\,dx \leqslant \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,dx \leqslant \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)\int_1^3 1\,dx,$$

soit: $2\times\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leqslant \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,dx \leqslant 2\times\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$,

Finalement: $-2\times\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \geqslant -\int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,dx \geqslant -2\times\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$,

$$3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - 2\times\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \geqslant \int_1^3 f(x)\,dx \geqslant 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - 2\times\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right),$$

et après réduction:

$$3\left[\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\right] \geqslant \int_1^3 f(x)\,dx \geqslant \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A , z_B et z_C trois points *A*, *B* et *C*.

Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ (2π).

2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel : $z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

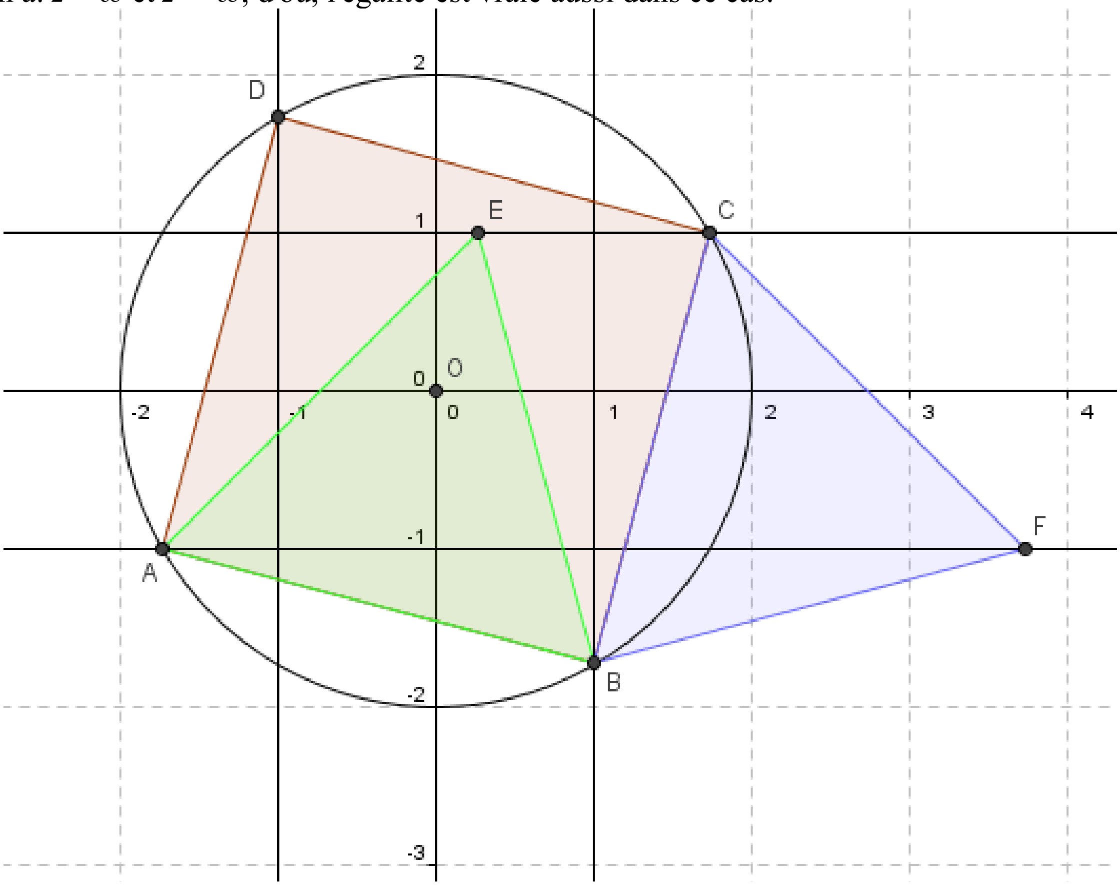
r est définie par $r(\Omega) = \Omega$ et si $M \neq \Omega$, $M' = r(M)$ est le point défini par $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$

D'après le prérequis, si $M \neq \Omega$, alors, $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le nombre complexe de module 1 et ayant un argument de mesure α.

Ce nombre complexe peut donc s'écrire $e^{i\alpha}$.

On obtient alors: $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}$, soit, $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Si $M = \Omega$, on a: $z = \omega$ et $z' = \omega$, d'où, l'égalité est vraie aussi dans ce cas.



Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1. a. Donner le module et un argument pour, chacun des quatre nombres complexes z_A , z_B , z_C et z_D .

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = ... = 2$

Soit θ_A un argument de z_A , on a: cos $(\theta_A) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et sin $(\theta_A) = -\frac{1}{2}$, d'où, $\theta_A = -\frac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$

On a de même: $\theta_B = -\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$, $\theta_C = \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$, $\theta_D = \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$

Remarque: on a donc: $z_A = 2\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $z_B = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z_C = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_D = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b. Comment construire à la règle et au compas les points *A*, *B*, *C* et *D* dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$?

Comme $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = ... = 2$, les points *A*, *B*, *C* et *D* sont sur le cercle de centre *O* et de rayon 2.

Une méthode parmi d'autres ...

On construit le cercle de centre *O* et de rayon 2.

En reportant le rayon dans le sens indirect à partir du point d'affixe 2, on obtient le point *B*,

en reportant le rayon dans le sens indirect à partir du point d'affixe 2i, on obtient le point *C*.

Le symétrique de *C* par rapport à *O* est *A* et celui de *B* est *D*.

c. Quelle est la nature du quadrilatère *ABCD* ?

Comme *O* est le milieu des diagonales d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, ce quadrilatère est un rectangle.

De plus: Comme i $z_A = ... = z_B$ (et i $z_C = z_D$) l'image de *A* dans la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est *B*.

Le quadrilatère *ABCD* est un carré.

2. On considère la rotation *r* de centre *B* et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Soient *E* et *F* les points du plan définis par : *E* = *r* (*A*) et *F* = *r* (*C*).

a. Comment construire à la règle et au compas les points *F* et *E* dans le repère précédent ?

On construit les triangles équilatéraux *BAE* et *BCF* dans le sens indirect.

b. Donner l'écriture complexe de *r* .

L'écriture complexe de *r* est: $z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_B)$ ....

c. Déterminer l'affixe du point *E*.

$z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_B) + z_B = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} - 1)) + 1 - i\sqrt{3} = \frac{-\sqrt{3}-1+3-\sqrt{3}}{2} + i\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{2} + 1 - i\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + i$

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application *f* du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si *f* admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Notons z_M l'affixe d'un point quelconque M du plan complexe.

D'après le prérequis: La proposition

"il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'" équivaut à la proposition suivante:

"le système $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}$ possède un et un seul couple (a, b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ solution"

Par différence des deux équations, il vient: $z_{B'} - z_{A'} = a\ (z_B - z_A)$.

Puisque A est distinct de B, $z_B - z_A \neq 0$, et, $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ est défini,

et, comme A' est distinct de B', $a \neq 0$.

Il en résulte: $b = z_{A'} - a\, \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$

Le couple ($\dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$, $z_{A'} - a\, \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$) est l'unique solution dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ du système.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$,on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$, $z_B = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_D = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. a. Donner le module et un argument pour, chacun des quatre nombres complexes z_A , z_B , z_C et z_D .

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = ... = 2$

Soit θ_A un argument de z_A, on a: cos $(\theta_A) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et sin $(\theta_A) = -\dfrac{1}{2}$, d'où, $\theta_A = -\dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$

On a de même: $\theta_B = -\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$, $\theta_C = \dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$, $\theta_D = \dfrac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$

Remarque: on a donc: $z_A = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $z_B = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z_C = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_D = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$

b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$?

Comme $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = ... = 2$, les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

Une méthode parmi d'autres ...

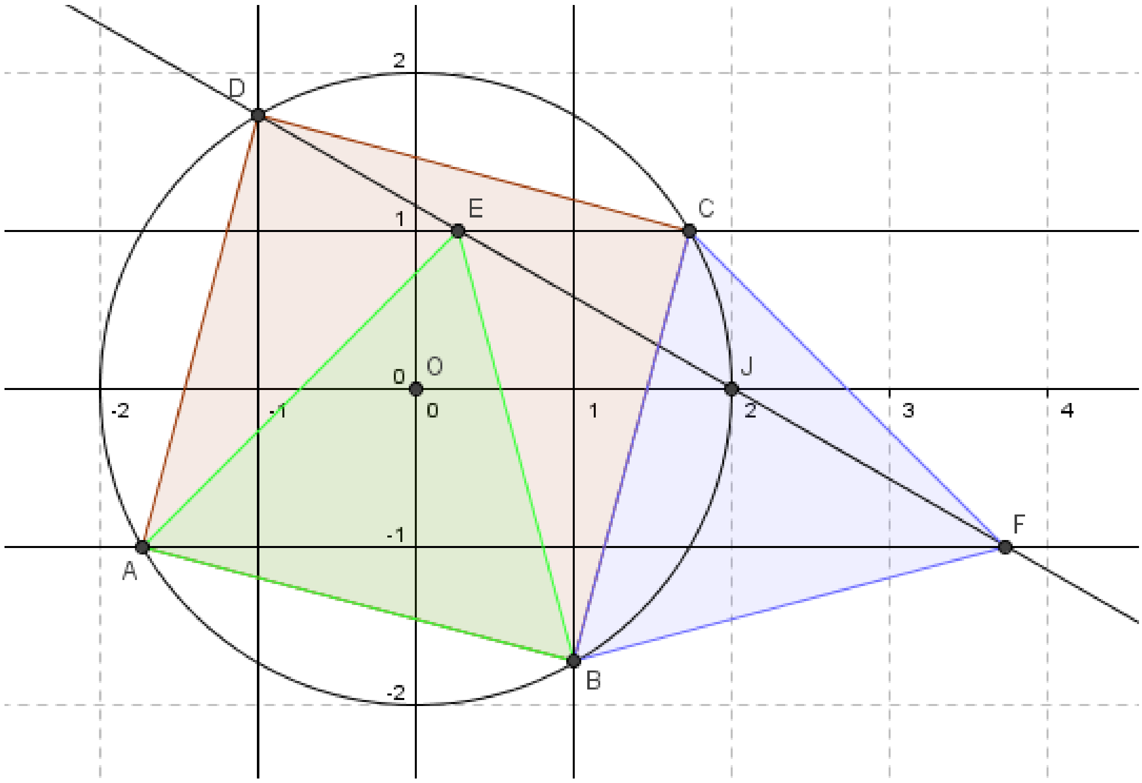
On construit le cercle de centre O et de rayon 2.

En reportant le rayon dans le sens indirect à partir du point d'affixe 2, on obtient le point B,

en reportant le rayon dans le sens indirect à partir du point d'affixe 2i, on obtient le point C.

Le symétrique de C par rapport à O est A et celui de B est D.

c. Déterminer le milieu du segment [AC], celui du segment [BD]. Calculer le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère *ABCD*.



Comme $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = 0$, le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$ est O.

D'autre part, $\mathrm{i}\, z_A = ... = z_B$, d'où, $\frac{z_B}{z_A} = \mathrm{i}$.

Les diagonales du quadrilatère *ABCD* se coupent en leur milieu, d'où, *ABCD* est un parallélogramme.

$$\frac{z_B}{z_A} = \mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{OB}{OA} = 1 \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

Les diagonales sont donc perpendiculaires (losange) et de m^me longueur (rectangle)

Le quadrilatère *ABCD* est un carré.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2$.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de g .

Point invariant:

L'équation $z = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2$ a pour unique solution: $z = \dfrac{2}{1 - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}}$, or, $1 - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où, l'équation a pour unique solution: $z = ... = 1 - \mathrm{i}\,\sqrt{3} = z_B$

Rapport: Le module de $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$ est 1

Angle: Un argument de $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ est $-\dfrac{\pi}{3}$

g est donc la rotation de centre *B* et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

b. Construire à la règle et au compas les images respectives *E*, *F* et *J* par *g* des points *A*, *C* et *O*.

On construit les triangles équilatéraux *BAE* , *BCF* et *BOJ* dans le sens indirect.

c. Que constate-t-on concernant ces points *E*, *F* et *J* ? Le démontrer.

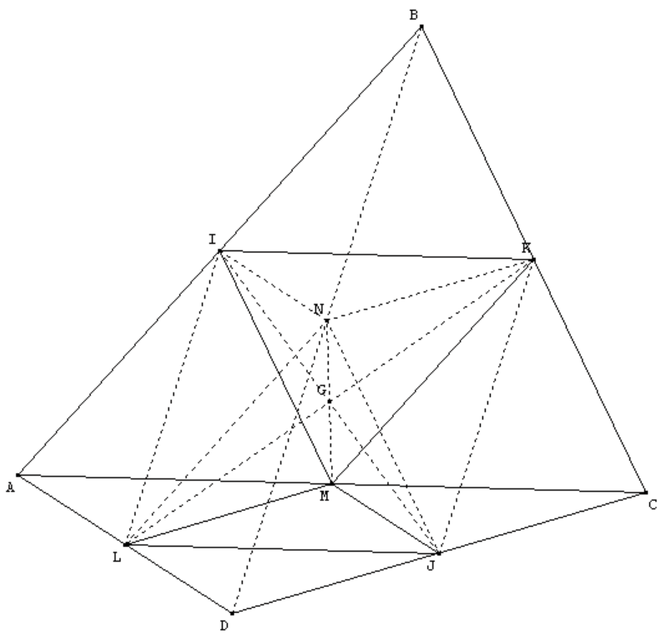
Les points *E*, *F*, *J* sont alignés et *J* est le milieu de [*EF*], car, une rotation conserve l'alignement des points et le milieu d'un segment.

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats

On considère un tétraèdre *ABCD*.

On note *I* , *J* , *K*, *L*, *M*, *N* les milieux respectifs des arêtes [*AB*], [*CD*], [*BC*], [*AD*], [*AC*] et [*BD*].

On désigne par *G* l'isobarycentre des points *A*, *B*, *C* et *D*.



1. Montrer que les droites (*IJ*), (*KL*) et (*MN*) sont concourantes en *G*.

Dire que *I* est milieu de [*AB*] équivaut à dire que I est barycentre du système {(*A*, 1), (*B*, 1)}.

De même pour les autres milieux.

On sait que *G* est barycentre du système de points pondérés {(*A*, 1), (*B*, 1), (*C*, 1), (*D*, 1)}

Le théorème d'associativité montre que G est barycentre du système de points pondérés $\{(I, 2), (C, 2)\}$ ainsi que du système $(K, 2), (L, 2)\}$ et du système $\{(M, 2), (N, 2)\}$

G est donc le milieu commun des segments $[IJ]$, $[KL]$, $[MN]$, ce qui prouve le résultat demandé.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.

(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. a. Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

D'après le résultat précédent, les quadrilatères ayant leurs diagonales se coupant en leur milieu sont des parallélogrammes.

D'autre part, dans le triangle ABD, la longueur du segment $[IL]$ joignant le milieu de deux côtés $[AB]$ et $[AD]$ vaut $\dfrac{BD}{2}$.

On montre de même, $JL = \dfrac{AC}{2}$

On a donc: $IL = JL$.

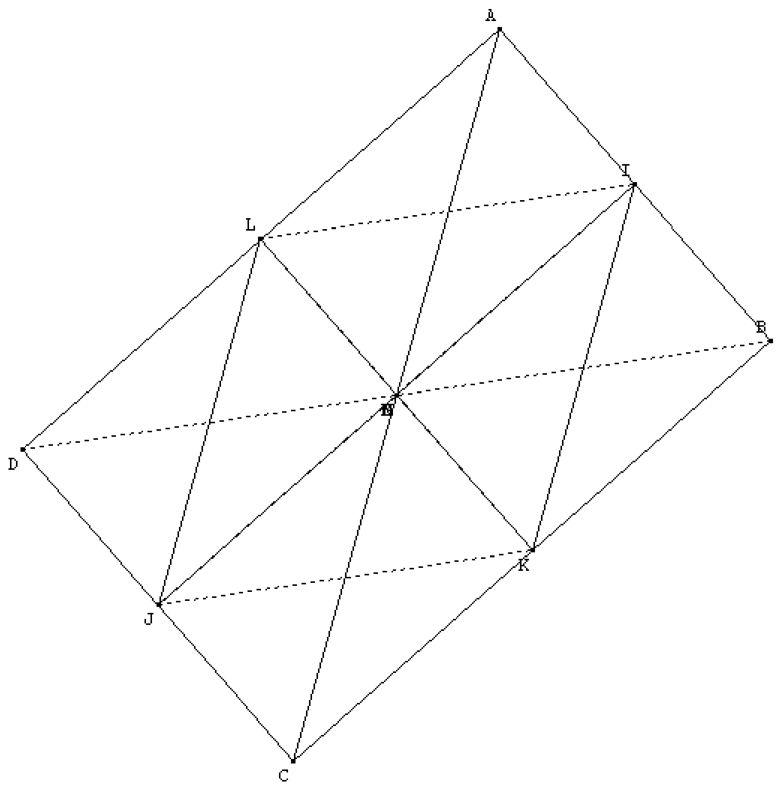
Le parallélogramme $IKJL$ est un losange.

On prouve de même, que les quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$ sont des losanges.

b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, d'où, les résultats demandés.

Vu de face dans le plan (IJK)



3. a. Montrer que la droite (*IJ*) est orthogonale au plan (*MKN*).

On sait déjà d'après 2b) que (*IJ*) est orthogonale à (*MN*) et (*IJ*) est orthogonale à (*KL*).

Or, (*MN*) et (*KJ*) sont sécantes en *G*, elles définissent donc le plan (*MKN*).

On peut conclure: la droite (*IJ*) est orthogonale au plan (*MKN*).

b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{MK}$? En déduire que (*IJ*) est orthogonale à la droite (*AB*).
Montrer de même que (*IJ*) est orthogonale à la droite (*CD*).

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{MK} = 0$, car, (*IJ*) est orthogonale à toute droite du plan (*MKN*) en particulier (*MK*) (et aussi (*KN*)).

Comme la droite (*MK*) joignant les milieux de [*AC*] et [*BC*] dans le triangle *ABC* est parallèle au troisième côté (*AB*), (*IJ*) est orthogonale à (*AB*).

De même, la droite (*KN*) est parallèle à (*CD*) (triangle *BCD*).

c. Montrer que *G* appartient aux plans médiateurs de [*AB*] et [*CD*].

D'après la question précédente, G appartient à (IJ) qui est perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu I, (et, perpendiculaire à $[CD]$ en son milieu J.)

G est donc sur une médiatrice de $[AB]$ (et une médiatrice de $[CD]$).

G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d. Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative,même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

On sait déjà: $GA = GB$ et $GC = GD$.

Il reste à montrer que G est équidistant de $[BD]$ par exemple, en montrant que G appartient au plan médiateur de $[BD]$.

En considérant la droite (MN) (qui contient G) orthogonale à (IJ) et (KL), on montre que (MN) est orthogonale à (JK) qui est parallèle à (BD).

On a donc (MN) perpendiculaire à $[BD]$ en son milieu N, et, G est équidistant de B et D.

EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n(20 - u_n)$

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x)$

a. Étudier les variations de f sur $[0 ; 20]$.

Remarque: f est un polynôme du second degré. Les racines sont 0 et 20. Le coefficient de x^2 étant strictement négatif, f atteint son maximum en 10 et $f(10) = 10$

ou encore: $f'(x) = \frac{1}{10}[(20 - x) - x] = \frac{1}{10}(20 - 2x)$

Le signe de $f'(x)$ sur $[0; 20]$ est celui de $20 - 2x$ ...

b. En déduire que pour tout $x \in [0 ; 20]$, $f(x) \in [0 ; 10]$.

f strictement croissante sur $[0;10]$, d'où, si $0 \leqslant x \leqslant 10$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(10)$, soit: $0 \leqslant f(x) \leqslant 10$.

f strictement décroissante sur $[10;20]$, d'où, si $10 \leqslant x \leqslant 20$ alors $f(20) \leqslant f(x) \leqslant f(10)$, soit: $0 \leqslant f(x) \leqslant 10$.

Conclusion: pour tout $x \in [0 ; 20]$, $f(x) \in [0 ; 10]$.

c. On donne en annexe la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.

Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

Initialisation: $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{10} \times 1 \times 19 = 1{,}9$, d'où, la proposition est vraie lorsque $n = 0$

Hérédité: Soit un entier k tel que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 10$

En appliquant f strictement croissante sur [0, 10], il vient:

$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 10$

Conclusion: L'axiome de récurrence montre que la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Puisque la (u_n) est croissante et majorée, elle est convergente.

Soit l la limite.

On a alors: $l = \frac{1}{10} l(20 - l)$. Comme la solution $l = 0$ est exclue (en effet $u_1 > 0$), l'autre solution est solution de $10 = 20 - l$, soit $l = 10$

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E) ; $y' = \frac{1}{20} y(10 - y)$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

(E_1) : $z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}$.

"y solution de (E)" équivaut à $\begin{cases} y \neq 0 \\ y' = \frac{1}{20} y(10 - y) \end{cases}$

Or, $z = \frac{1}{y}$, d'où, $y = \frac{1}{z}$, puis $y' = \frac{-z'}{z^2}$

On a : $\begin{cases} y \neq 0 \\ y' = \frac{1}{20} y(10 - y) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y \neq 0 \\ z = \frac{1}{y} \\ \frac{-z'}{z^2} = \frac{1}{20} \frac{1}{z}\left(10 - \frac{1}{z}\right) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y \neq 0 \\ z = \frac{1}{y} \\ z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20} \end{cases}$

équivaut à " z est solution de l'équation différentielle (E_1) "

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

(E_1) est de la forme $y' = ay + b$ donc,

les solutions de (E_1) sont les fonctions z définies par $z(x) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que g est définie sur [0 ; +∞[par $g(x) = \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1}$

Comme la solution cherchée vérifie $g(0) = 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{z(x)}$, on a:

$z(0) = 1$. On en déduit $C + \dfrac{1}{10} = 1$. $C = \dfrac{9}{10}$ et $z(x) = \dfrac{9}{10}e^{-\frac{1}{2}x} + \dfrac{1}{10}$

$g(x) = \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1}$

3. Étudier les variations de g sur [0 ; +∞[.

On a vu au 1a) que $y' =$.

Le signe de $g'(x)$ est opposé à celui de $z'(x) = -\dfrac{9}{20}e^{-\frac{1}{2}x}$. Donc $g'(x) > 0$.

ou encore:

Comme g est solution de (E), on sait:

$$g'(x) = \frac{1}{20}g(x)(10 - g(x)) = \frac{1}{20}g(x)\left(10 - \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1}\right) = \frac{1}{2}g(x)\frac{9e^{-\frac{1}{2}x}}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1}$$

g est donc strictement croissante sur [0; +∞[

4. Calculer la limite de g en +∞et interpréter le résultat.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0$ (limite de l'exponentielle en $-\infty$), d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 10$.

Le nombre d'écrans plats tend (et se stabilise) vers 10 millions

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5millions ?

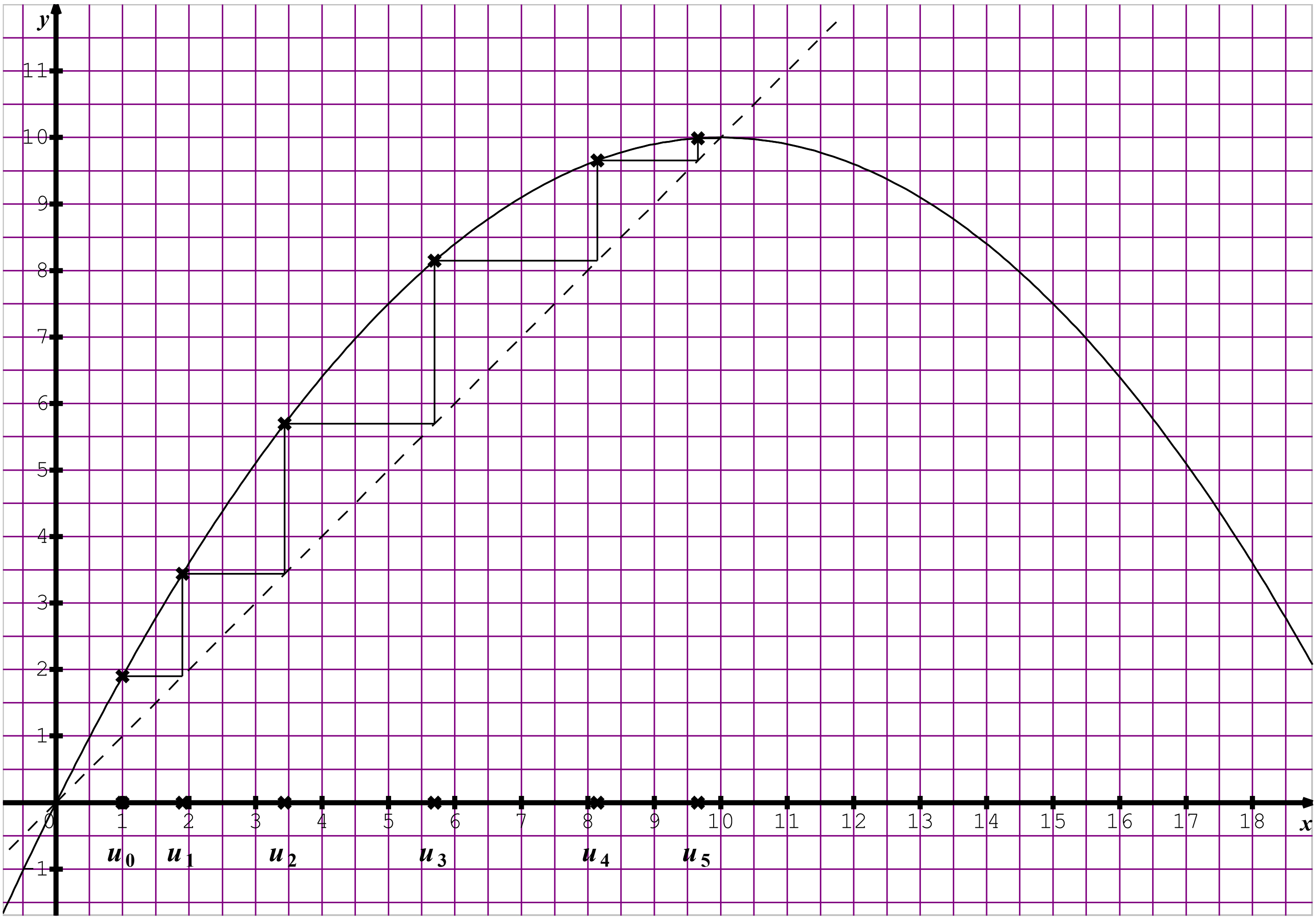
On résout: $g(x) > 5$.

$\dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1} > 5$ équivaut à $9e^{-\frac{1}{2}x} + 1 < 2$ équivaut à $e^{-\frac{1}{2}x} < \dfrac{1}{9}$

On applique ln strictement croissante sur]0; +∞[.

$e^{-\frac{1}{2}x} < \dfrac{1}{9}$ équivaut à $-\dfrac{1}{2}x < -\ln 9$ équivaut à $x > 2\ln 9$

À partir de la 5 ième année, le nombre d'écrans plats dépassent 5 millions.


y
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
x
u_0
u_1
u_2
u_3
u_4
u_5