Classe:

Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2009

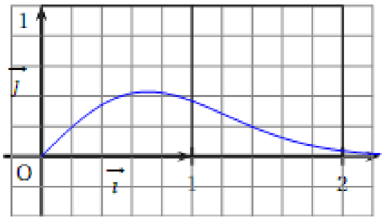
Exercice 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$).

   b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

   Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1

   $$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

   c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

   Interpréter ces résultats.

Classe:

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - \mathrm{i}, \quad b = 1 - 3\mathrm{i} \text{ et } c = -1 - \mathrm{i}.$$

1. **a.** Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.
   b. En déduire une expression de n en fonction de m.
3. On appelle Q le milieu du segment $[AN]$ et q son affixe.
   Montrer que : $q = \dfrac{(1-\mathrm{i})m}{2} + 2 + \mathrm{i}$.
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.
   a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   b. Calculer $|q - 2 - \mathrm{i}|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = \mathrm{i}$ et $z_B = 1 + 2\mathrm{i}$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :
   $$S(O) = A \text{ et } S(A) = B.$$
2. Montrer que l'écriture complexe de S est :
   $$z' = (1 - \mathrm{i})z + \mathrm{i}.$$
   Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).
   On considère la suite de points (A_n) telle que :
   - A_0 est l'origine du repère et,
   - pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$.

   On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - \mathrm{i})^n$.
   b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.
   Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.
   c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.
   Construire les points A_3 et A_4.
4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

Classe:

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :
A de coordonnées $(1,\ 1,\ 0)$, B de coordonnées $(2,\ 0,\ 3)$, C de coordonnées $(0,\ -2,\ 5)$ et D de coordonnées $(1,\ -5,\ 5)$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y = 2x+4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A,\ 1),\ (B,\ 1),\ (C,\ 2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées $(3,\ 3,\ 0)$ et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x+2y+z+3 = 0$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
   b. Quelle est son espérance ?
   c. Calculer $P(X = 2)$.
2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
   On considère les évènements D et A suivants :
   - D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
   - A : « obtenir exactement deux 6 ».

   a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
   - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

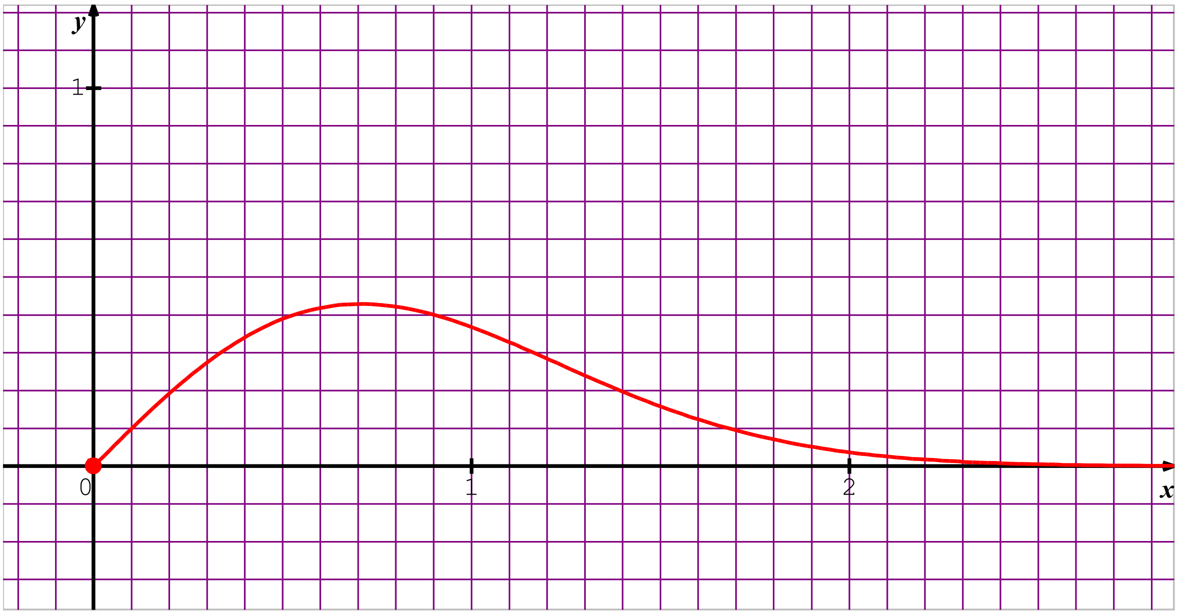
   (On pourra construire un arbre de probabilité).

   b. En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$.
   c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?
3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
   On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».
   a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.
   b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par : $f(x) = x\ \mathrm{e}^{-x^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \frac{1}{x}\ \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$).

$\frac{1}{x}\ \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = x\ \mathrm{e}^{-x^2}$. (évident)

Posons $x^2 = X$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, on cherche $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X}$, (limite de fonctions composées)

or, on sait d'après un résultat du cours que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$,

d'où, $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (limite d'un produit de fonctions)

b. Démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

f est le produit de deux fonctions dérivables:
$x \mapsto x$ et v: $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$

v est une fonction composée de $x \mapsto -x^2$ suivie de la fonction exp.

On a donc: $f'(x) = 1\times \mathrm{e}^{-x^2} + (-2x)\times \mathrm{e}^{-x^2} \times x = \mathrm{e}^{-x^2}(1 - 2x^2) = \mathrm{e}^{-x^2}(1 - \sqrt{2}\,x)(1 + \sqrt{2}\,x)$
Or, pour tout X réel, $\mathrm{e}^X > 0$ et,
sur [0; +∞[, $1 + \sqrt{2}\,x > 0$

la dérivée s'annule en changeant de signe avec le facteur $1 - \sqrt{2}\,x$.

Par conséquent, $f'(x) < 0$ lorsque $1 - \sqrt{2}\,x < 0$, soit, sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

Conclusion: f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et ce maximum vaut: $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Comme f est continue et **positive** sur $[0; +\infty[$, $F(a) = \int_0^a f(x)\,dx$

Or, f est de la forme $-\frac{u'}{2}\,e^u$ où u est la fonction $x \mapsto -x^2$.

Une primitive de f est: $x \mapsto -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}$.

$F(a) = \int_0^a f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a = -\frac{1}{2}\,(e^{-a^2} - 1) = \frac{1}{2}\,(1 - e^{-a^2})$.

Comme $\lim\limits_{a\to+\infty} -a^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on obtient: $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a) = \frac{1}{2}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1.

$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

Pour $x \geqslant 2$, on sait que f **est strictement décroissante** d'après la partie A,

par conséquent, on a: $n \leqslant x \leqslant n + 1$ implique $f(n + 1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$

D'après les propriétés des intégrales concernant la relation d'ordre, il vient:

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

Comme $f(n+1)$ et $f(n)$ sont des constantes par rapport à x (variable d'intégration), on obtient:

$f(n+1)[n+1-n] \leqslant u_n \leqslant f(n)[n+1-n]$.

Conclusion: Pour $n \geqslant 2$, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

Autre méthode:

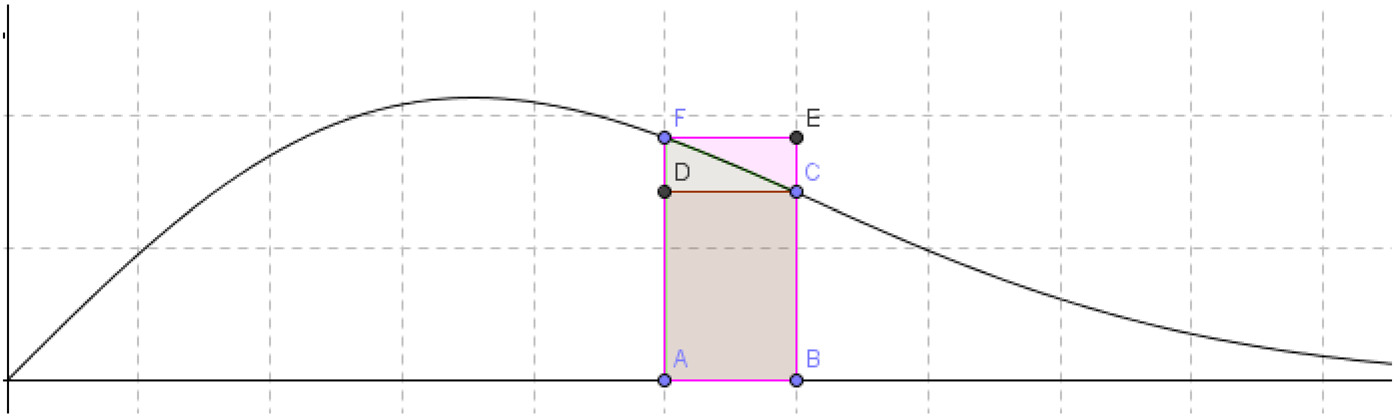
D'après la partie A, on sait que $f(x) \geqslant 0$ sur $[n; n+1]$, donc, $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ est la mesure d'aire en $u.a$ du domaine $\mathscr{D}$ plan limité par les droites d'équations $x = n$, $x = n+1$, l'axe des abscisses et la courbe C_f.

Soit les points $A(n, 0)$, $B(n+1; 0)$, $C(n+1; f(n+1))$, $D(n, f(n+1))$, $E(n+1; f(n))$, $F(n; f(n))$ (Voir figure).

L'aire de $ABCD$ est égale à : $f(n+1)\ u.a$.

L'aire de $ABEF$ est égale à : $f(n)\ u.a$.

Comme f est décroissante sur $[n; n+1]$, $ABCD$ est inclus dans le domaine $\mathscr{D}$ lui-même inclus dans le rectangle $ABEF$, d'où, pour $n \geqslant 2$, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.



b. Quel est le sens de variation de la suite (u_n), $n > 2$?

Pour $n > 2$, on a: $f(n+2) \leqslant u_{n+1} \leqslant f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$..

La suite (u_n) est donc décroissante.

c. Montrer que la suite (u_n) converge.

f étant positive sur $[0; +\infty[$, $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

La suite (u_n) est minorée par 0 et décroissante, donc, (u_n) converge.

Quelle est sa limite ?

D'après la partie A, $\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$

Le théorème des gendarmes permet de conclure: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

$u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + ... + \int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ *(Chasles)*

L'égalité est vérifiée.
Remarque:

On peut penser à un raisonnement par récurrence:

Initialisation:

$n = 1$

$F(1) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = u_0$ et $\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$ (la propriété est vraie pour $n = 1$)

Hérédité:

Soit un entier $n \geqslant 1$

On a: $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. (Hypothèse de récurrence)

Or, $F(n + 1) = \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ (par définition de F)

$= \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x + \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ (Chasles)

$= F(n) + u_n$

$= \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n$

$= \sum_{k=0}^{n} u_k$

Si l'égalité est vraie pour n, alors l'égalité est vérifiée pour $n + 1$
Conclusion:
D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

b. Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.

Dans la partie A, on a montré que $\lim_{a \to +\infty} F(a) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Les valeurs de $F(n)$ qui apparaissent dans le tableau sont les valeurs approchées des aires de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 3$, puis, $x = 0$ et $x = 4$, etc.

L'aire croît puisque la fonction f est positive, mais, converge très vite vers la valeur limite.

La précision du tableur (arrondi au plus proche) donne comme valeur approchée 0,5 dès que $n \geqslant 5$.

Car $F(5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-25}$ et le tableur n'affiche que 10 décimales.

La différence entre $F(6) - F(5) = u_5$, $F(7) - F(6) = u_6$ ....

On retrouve le fait que (u_n) converge vers 0.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives : a = 3−i, b = 1−3i et c = −1−i.

1. a. Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b. Quelle est la nature du triangle ABC?

affixes des vecteurs: $\overrightarrow{AB}$ (–2 – 2i), $\overrightarrow{AC}$ (–4), $\overrightarrow{BC}$ (–2 + 2i)

– 2 –2i et 2 + 2i sont des complexes conjugués.

On a donc: $\| \overrightarrow{AB} \| = \| \overrightarrow{BC} \| = |-2-2\mathrm{i}| = 2\sqrt{2}$

$AC^2 = 16$ et $AB^2 + BC^2 = 8 + 8 = 16$

Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.

$OA = |3-\mathrm{i}| = \sqrt{10}$ et $OB = |1-3\mathrm{i}| = \sqrt{10}$,

donc, les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O,de rayon $\sqrt{10}$.

2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.

L'écriture complexe de r est donnée par la formule : $z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$ où θ est l'angle de rotation et ω l'affixe du centre de rotation.

Ce qui devient ici : $z' - m = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z - m)$, soit: $z' = \mathrm{i}z - \mathrm{i}m + m$

b. En déduire une expression de n en fonction de m.

On a alors: $n = \mathrm{i}(3 - \mathrm{i}) - \mathrm{i}m + m = 1 + m + 3\mathrm{i} - \mathrm{i}m$.

3. On appelle Q le milieu du segment $[AN]$ et q son affixe.

$$q = \frac{3-\mathrm{i}+n}{2} = \frac{3-\mathrm{i}+1+m+3\mathrm{i}-\mathrm{i}m}{2} = \frac{4+2\mathrm{i}}{2} + \frac{(1-\mathrm{i})m}{2} = \frac{(1-\mathrm{i})m}{2} + 2 + \mathrm{i}$$

4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.

a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\,\mathrm{e}^{i\theta}$

Puisque $M \in \Gamma$ de centre O et rayon $\sqrt{10}$, on a: $OM = \sqrt{10}$

Le module de m est $\sqrt{10}$ et si on appelle θ un argument de m, on obtient: $m = \sqrt{10}\,\mathrm{e}^{i\theta}$

b. Calculer $|q-2-\mathrm{i}|$. Quel est le lieu Γ′ de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

$q-2-\mathrm{i}=\dfrac{(1-\mathrm{i})m}{2}$ (évident d'après 3)

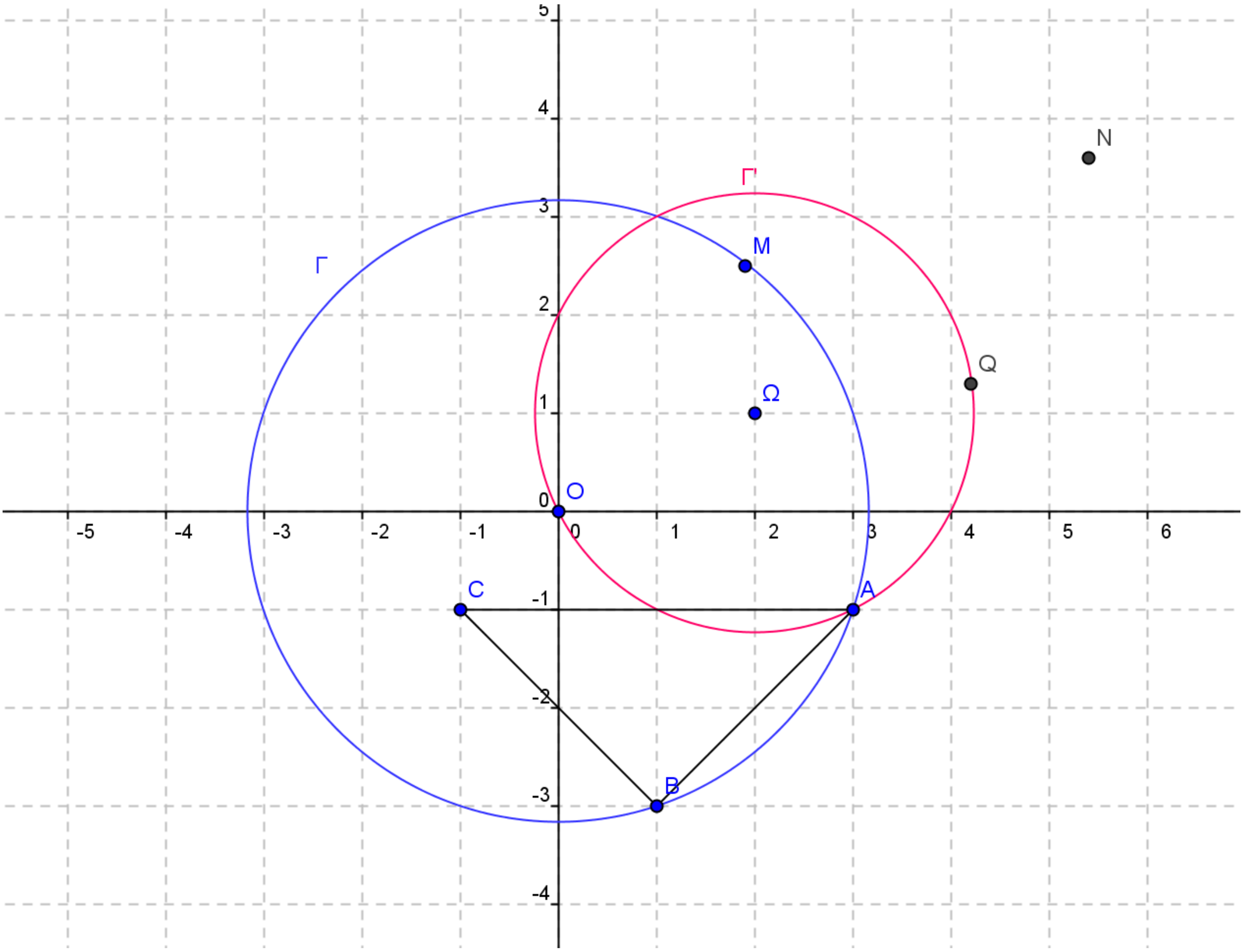
$|q-2-\mathrm{i}| = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times|m|$

Lorsque M décrit Γ, on a: $|m| = \sqrt{10}$, d'où, $|q-2-\mathrm{i}| = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{10} = \sqrt{5}$

Le lieu de Q lorsque M décrit le cercle Γ est le cercle Γ' de centre $\Omega(2+\mathrm{i})$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Remarque:

Le point $A \in \Gamma'$, car, lorsque M est en A, l'image de A est A. Les points M, N, Q sont donc confondus avec A.



EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :

A de coordonnées (1, 1, 0), B de coordonnées (2, 0, 3), C de coordonnées (0, −2, 5) et D de coordonnées (1, −5, 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

FAUX

L'équation $y = 2x + 4$ peut aussi s'écrire $2x - y + 0.z + 4 = 0$.

C'est **l'équation d'un plan de vecteur normal** $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$, et de rapport 3.

FAUX

G désigne le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$

équivaut à $(1 + 1 + 2)\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

On a donc: $\overrightarrow{MM'} = 4\overrightarrow{MG}$, puis, par Chasles: $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{MG}$

Finalement: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ équivaut à $\overrightarrow{GM'} = -3\overrightarrow{GM}$

La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' est l'homothétie de centre G et de rapport **–3**.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

FAUX

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-6\\5\end{pmatrix}$

On recherche deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

Soit le système: $\begin{cases} a-b=0\\ -a-3b=-6\\ 3a+5b=5\end{cases}$

La première équation donne $a = b$, ce qui mène à $-4b = -6$ et $8b = 5$ ce qui est impossible.

Le système n'ayant pas de solution, les points A, B, C et D ne sont pas des points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées $(3, 3, 0)$ et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

VRAI

Le plan est tangent à la sphère si et seulement si la distance du plan au centre de la sphère est égale au rayon.

$\mathbf{d}(\boldsymbol{\Omega}, P) = \dfrac{|2\times3+2\times3+0+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{15}{3} = 5$

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?

Puisqu'on réalise la même épreuve dans les mêmes conditions, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ de paramètres

$n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$

b. Quelle est son espérance ?

$E(X) = np = \frac{1}{2}$

c. Calculer $\mathrm{P}(X = 2)$.

On sait: $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$\mathrm{P}(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{3-2} = \frac{3\times5}{6^3} = \frac{5}{72}$$

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les évènements D et A suivants :

• D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;

• A : « obtenir exactement deux 6 ».

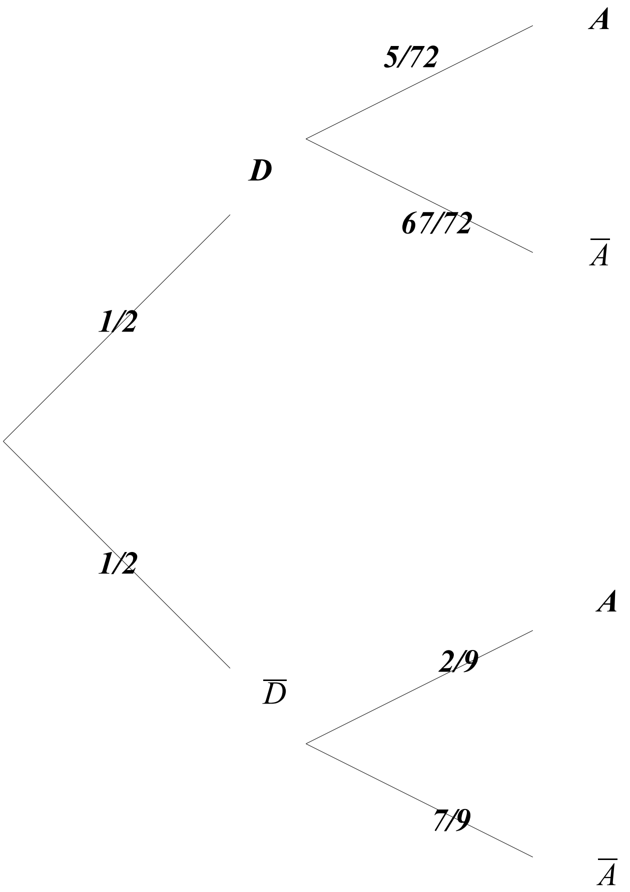
a. Calculer la probabilité des évènements suivants :

• « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;

• « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

(Calculs des probabilités conditionnelles pour le dé truqué à la question suivante)



• « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » est l'événement $D \cap A$

$P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{72} = \frac{5}{144}$, car,

les choix de dés étant équiprobables, P(D) = P($\overline{D}$) = $\frac{1}{2}$ et $P_D(A)$ est la probabilité de P(X = 2) calculée au 1)

• « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 » est l'événement $\overline{D} \cap A$.

$P(\overline{D} \cap A) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(A)$

Calcul de $P_{\overline{D}}(A)$ (même démarche qu'au 1) avec $p = \frac{1}{3}$.

$$P_{\overline{D}}(A) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3 \times 1 \times 2}{2 \times 3^3} = \frac{2}{9}$$

$P(\overline{D} \cap A) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$

b. En déduire que : p(A) = $\frac{7}{48}$.

$D \cap A$ et $\overline{D} \cap A$ forment une partition de l'événement A, d'où, d'après le théorème des probabilités totales :

$P(A) = \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{5+16}{144} = \frac{7}{48}$

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6.

Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

On cherche donc: $P_A(\overline{D}) = \dfrac{P(A \cap \overline{D})}{P(A)} = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{48}{7} = \dfrac{16}{21}$.

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé *n* fois de suite (*n* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces *n* lancers successifs ».

Commentaires:

Les démarches précédentes se généralisent à *n* lancers.

On a donc deux lois binomiales *X* et *Y*, l'une pour le dé équilibré.

Obtenir *k* fois le 6 avec le dé équilibré sur *n* lancers est: $P_D(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$

Obtenir *k* fois le 6 avec le dé truqué sur *n* lancers est: $P_{\overline{D}}(Y=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$

a. Déterminer, en fonction de *n*, la probabilité p_n de l'évènement B_n.

B_n est l'événement contraire de "n'obtenir aucun 6 en *n* lancers",

$D \cap B_n$ et $\overline{D} \cap B_n$ forment une partition de l'événement B_n , d'où, d'après le théorème des probabilités totales :

$$P(\overline{B_n}) = \frac{1}{2} \times \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{1}{2} \times \binom{n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$p_n = P(B_n) = 1 - P(\overline{B_n}) = 1 - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

Comme $0 < \dfrac{5}{6} < 1$ et $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, on a: $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$,

d'où, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$

Si on lance le dé "un très grand nombre de fois", on est presque certain d'obtenir au moins un 6 quelque soit le dé choisi.