<u>Exercice 4 :</u> La Réunion juin 2004

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :
B1, contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,
B2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes.

Analyse des données: (on peut avantageusement faire un arbre)

D'après l'énoncé dans l'hypothèse d'équiprobabilité, en notant, les événements B1 (resp. B2) "l'adresse provient de la banque de données B1 (resp. B2)" et R "l'adresse est erronée" et X "l'adresse est exacte"

On a: $P(B1)=\frac{6000}{10000}=\frac{6}{10}=0{,}6$ $P(B2)=\frac{4000}{10000}=\frac{4}{10}=0{,}4$ $P_{B1}(R)=\frac{120}{6000}=\frac{12}{600}=\frac{1}{50}=0{,}02$

$P_{B1}(X)=\frac{5880}{6000}=\frac{588}{600}=0{,}98$ $P_{B2}(R)=\frac{200}{4000}=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}=0{,}05$ $P_{B2}(X)=\frac{3800}{4000}=\frac{38}{40}=0{,}95$

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

C: $\binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6000}\right)^3\times\left(\frac{5880}{6000}\right)^7$

Puisqu'il y a remise, notons Y la variable aléatoire donnant le nombre d'étiquettes erronées.

Y suit la loi binomiale de paramètres (10, $\frac{120}{6000}$)

et P(Y=3) = $\binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6000}\right)^3\times\left(\frac{5880}{6000}\right)^7$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B1 est :

D: $\frac{0{,}6\times 0{,}98}{0{,}6\times 0{,}98+0{,}4\times 0{,}95}$

En effet, on cherche $P_X(B1)=\frac{P(X\cap B1)}{P(X)}$

Or, $P(X\cap B1)=P(B1)\times P_{B1}(X)=0{,}6\times 0{,}98$ et $P(X)=P(X\cap B1)\cup P(X\cap B2)=0{,}6\times 0{,}98+0{,}4\times 0{,}95$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité *p* de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle [0 ; +∞[(loi exponentielle de paramètre λ = 0,000 5). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant *t* est :

$p([0;t[)=\int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ **Remarquer:** $\lambda=\frac{1}{2000}$ et $\frac{1}{\lambda}=2000$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

A : $\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}}$

En effet, une primitive de $x\mapsto\lambda e^{-\lambda x}$ est $x\mapsto -e^{-\lambda x}$.

$P([2500;+\infty[)=1-P([0;2500[)=1-(-\mathrm{e}^{-2500\lambda}-(-1))=\mathrm{e}^{-2500\lambda}$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule $E=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

a) L'intégrale $\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x$ est égale à :

B : $-t\,\mathrm{e}^{-\lambda t} - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}$

Une Ipp avec $u(x)=x$ et $v'(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ (donc, $u'(x)=1$ et $v(x)=-e^{-\lambda x}$) donne

$$I = \left[x(-\mathrm{e}^{-\lambda x})\right]_0^t - \int_0^t 1\times(-\mathrm{e}^{-\lambda x})\mathrm{d}x .$$

Une primitive de de $x \mapsto -e^{-\lambda x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$.

D'où, $I = \left[x(-\mathrm{e}^{-\lambda x})\right]_0^t - \left[\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = -t\,\mathrm{e}^{-\lambda t} - 0 - \left(\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} - \dfrac{1}{\lambda}\right)$

Remarque:

La fonction F: $t \mapsto \int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x$ est la primitive de la fonction f: $t \mapsto \lambda t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$ qui s'annule en 0.

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :
B : 2 000.

En effet, en mettant l'expression précédente au même dénominateur, il vient: $\dfrac{-\lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-\lambda t} + 1}{\lambda}$

Quand t tend vers $+\infty$, $-\lambda\, t$ tend vers $-\infty$ et comme $\lim\limits_{X \to -\infty} X\,\mathrm{e}^X = 0$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, on a: $\lim\limits_{t \to +\infty} (-\lambda t)\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$.

I tend vers donc $\dfrac{1}{\lambda}$

Exercice A page 102 (Bac S La réunion juin 2004)

f est dérivable sur ℝ et vérifie:
(1) pour tout x réel, $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$
(2) $f'(0) = 1$
(3) la fonction f' est dérivable sur ℝ.
1 a) $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1 \Leftrightarrow (f'(x))^2 = 1 + (f(x))^2$
Comme $(f(x))^2 \geqslant 0$, on a: $(f'(x))^2 \geqslant 1$, soit: $f'(x) \leqslant -1$ ou $f'(x) \geqslant 1$.
pour tout x réel, $f'(x) \neq 0$
ou par l'absurde:
Supposons qu'il existe une valeur a réelle telle que $f'(a) = 0$, on a alors d'après (1): $-(f(a))^2 = 1$, ce qui est impossible.
Il n'existe aucun réel x tel que $f'(x) = 0$
pour tout x réel, $f'(x) \neq 0$

b) D'après (1), $(f'(0))^2 - (f(0))^2 = 1$ et d'après (2): $(f'(0))^2 = 1$
Par conséquent: $(f(0))^2 = 0$
Conclusion: $f(0) = 0$

2) D'après (3), $f\,'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Le premier membre de l'égalité (1) se dérive en $x \mapsto 2\times f\,''(x)\times f\,'(x) - 2\times f\,'(x)\times f(x)$

Le second membre de l'égalité (1) se dérive en $x \mapsto 0$

L'égalité (1) implique: $2\times f\,''(x)\times f\,'(x) - 2\times f\,'(x)\times f(x) = 0$, soit
$2f\,'(x)(f\,''(x) - f(x)) = 0$
Comme $f\,'(x) \neq 0$, il vient $f\,''(x) - f(x) = 0$
(4): Pour tout nombre réel x, $f\,''(x) = f(x)$.

3) On pose $u = f\,' + f$ et $v = f\,' - f$.
a) $u(0) = f\,'(0) - f(0) = 1$ et $v(0) = \ldots = 1$

b) u et v, étant la somme ou la différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
pour tout x réel, $u'(x) = f\,''(x) + f\,'(x) = f(x) + f\,'(x) = u(x)$ (car $f\,''(x) = f(x)$)
pour tout x réel, $v'(x) = f\,''(x) - f\,'(x) = f(x) - f\,'(x) = -(f\,'(x) - f(x)) = -v(x)$.

c) La fonction u est donc la solution de l'équation différentielle $y' = y$ prenant la valeur 1 en 0.
On sait d'après le cours que c'est la fonction exponentielle de base e.
Pour tout x réel, $u(x) = \mathrm{e}^x$

La fonction v est donc la solution de l'équation différentielle $y' = -y$ prenant la valeur 1 en 0.
On a alors: pour tout x réel, $v(x) = C\mathrm{e}^{-x}$ et $v(0) = 1$, d'où, $C = 1$
Pour tout x réel, $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$

d) Par définition de u et v, on a: $2f = u - v$,
d'où, pour tout x réel, $2f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

4a) On sait: $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc, (somme de fonctions) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
et
$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) $f\,'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (Soit on remarque $2f\,' = u + v$, soit on dérive ...)

Comme pour tout X, $\mathrm{e}^X > 0$, $f\,'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f\,'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

5) a) D'après les questions précédentes:
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc, continue sur $\mathbb{R}$.
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
donc, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}$.

Conclusion:

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$ a une et une seule solution réelle.

b) $f(x) = 3$ a pour solution α telle que $f(\alpha) = 3$

Résolution de $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 3$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 6$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6\,e^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 6X - 1 = 0 \end{cases}$$

Résolution de l'équation du second degré: discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 40 = 2\sqrt{10}$

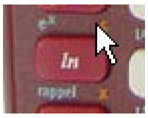
L'équation en X a deux solutions: $X_1 = 3 - \sqrt{10}$ et $X_2 = 3 + \sqrt{10}$

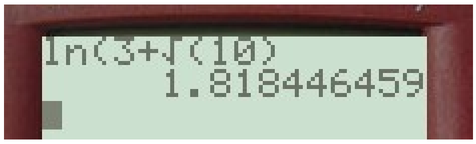
Comme $e^x > 0$, la seule solution acceptable est $e^x = 3 + \sqrt{10}$.

On cherche donc l'antécédent par la fonction exponentielle de $3 + \sqrt{10}$

$x = \ln(3 + \sqrt{10})$

La calculatrice donne : la fonction réciproque de l'exp; est la fonction ln.





$\alpha = 1{,}82$ à 10–2 près par excès.