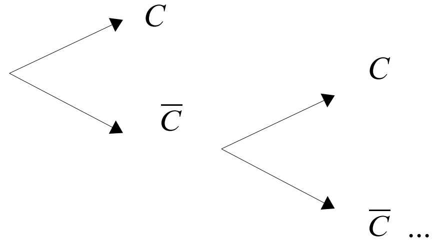
Table des matières

Exercice 4: France juin 2006



1. Notons C l'événement « le ballon est crevé ». Alors p(C)= 0,2.

(a) Comme les tirs sont indépendants la probabilité que le ballon soit intact au bout de deux tirs est:

$(1- p(C))^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$.

(b) Calculons la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon.

L'événement contraire est : « deux tirs ne suffisent pas », autrement dit, le ballon est intact (n'est pas crevé) au bout de deux tirs. C'est l'événement contraire de celui étudié au a).

Sa probabilité vaut $1- 0{,}64 = 0{,}36$.

(c) Calculons la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon.

L'événement contraire est « le ballon est intact (n'est pas crevé) au bout de n tirs », de probabilité $(p(\overline{C}))^n$ = $0{,}8^n$ (car les tirs sont indépendants).

Par conséquent : $p_n = 1-0{,}8^n$.

(d) $p_n > 0{,}99$ équivaut à $1-0{,}8^n > 0{,}99$ c'est-à-dire à $0{,}8^n < 0{,}01$.

La fonction ln étant croissante sur $]0; +\infty[$, on trouve $n \ln(0{,}8) < \ln(0{,}01)$ donc $n > \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$ car $\ln(0{,}8) < 0$

soit $n > 21$.

Il faut que $n > 21$ pour que $p_n > 0{,}99$.

2. Si on sort le 1, l'événement est réalisé si le ballon est crevé en un coup.

Si on sort le nombre k, l'événement est réalisé si "k tirs suffisent pour crever le ballon"

Pour chaque valeur de k compris entre 1 et 4, la probabilité de crever le ballon est la probabilité p_k , calculée en 1) c) : $p_k = 1-0{,}8^k$.

Le dé n'est pas pipé donc chaque face a la même probabilité de sortie égale à $\dfrac{1}{4}$

La probabilité de crever le ballon est : $\frac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = ... = 0{,}4096$.

3. (a) Les fréquences sont : $f_1 = \frac{58}{200} = \frac{29}{100}$; $f_2 = \frac{49}{200}$; $f_3 = \frac{52}{200}$ = 13/50 et $f_4 = \frac{41}{200}$.

(b) Alors $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2 = ... = 0{,}00375$.

(c) On constate que $d^2 < D_9$.

Au risque de 10%, on peut considérer que le dé n'est pas pipé. Table des matières

---

Exercice 2 Polynésie septembre 2005

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique: 1 cm)

Partie A

$\mathscr{H}$ a pour équation dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$ $y^2 - x^2 = 16$

On pose $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ et $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans ce repère.

On note $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$. Une équation de $\mathscr{C}'$ est donc $y = -f(x)$

1) $M(x; y) \in \mathscr{H}$ si et seulement si $y^2 = x^2 + 16$ si et seulement si $y = \sqrt{x^2+16}$ ou $y = -\sqrt{x^2+16}$ si et seulement si $y = f(x)$ ou $y = -f(x)$ si et seulement si $y \in \mathscr{C}$ ou $y \in \mathscr{C}'$.

2) a) Limites:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (limites de fonctions composées: $\lim_{x\to-\infty} x^2+16 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$, ...)

Variation:

la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

Preuve:

fonction composée (u: $x \mapsto x^2+16$ strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ à valeurs dans $[0; +\infty[$ suivie de $x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante sur $[0; +\infty[$)

ou

dérivée ... $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ du signe de x ...

Asymptote:

$f(x) - x = \sqrt{x^2+16} - x = \frac{(\sqrt{x^2+16}-x)(\sqrt{x^2+16}+x)}{\sqrt{x^2+16}+x} = \frac{16}{\sqrt{x^2+16}+x}$ qui tend vers 0 en $+\infty$, d'où, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Tracé

Commencer par tracer l'asymptote d'équation $y = x$ et la tangente horizontale au point (0; 4)

Remarquer la parité de f, d'où, l'axe des ordonnées est un axe de symétrie.

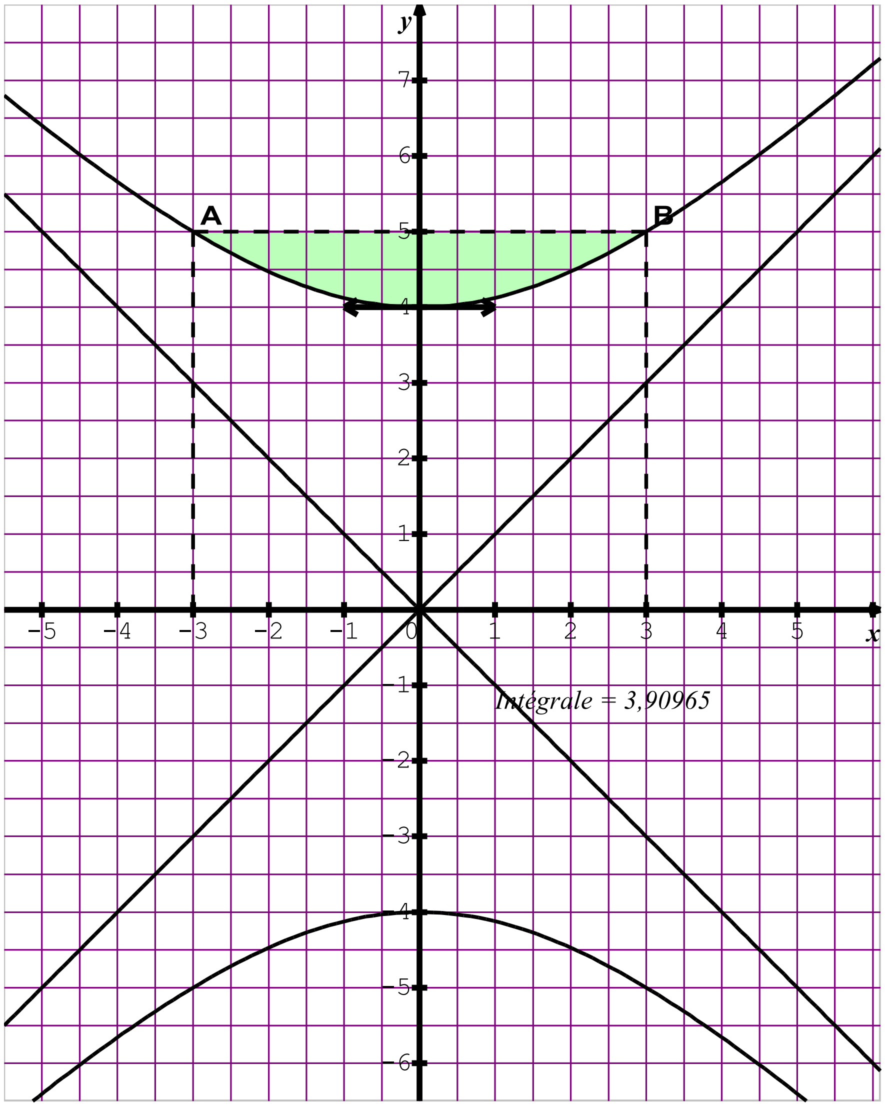
Tracer $\mathscr{C}'$ par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Ne pas oublier aussi le tracé des asymptotes par symétrie

$\mathscr{D} = \{M(x; y) / -3 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } \sqrt{x^2+16} \leqslant y \leqslant 5\}$

L'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm² (1 $u.a$ = 1 cm²) est exprimée par: $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = 30 - \int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

En effet, l'aire au dessous de $\mathscr{C}$ vaut $\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ ....



Partie B

r est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

1)a) L'écriture complexe de r est: $z \mapsto e^{-i\frac{\pi}{4}} z$ ou $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}} z$

On en déduit: $x' + iy' = (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))(x + iy)$.

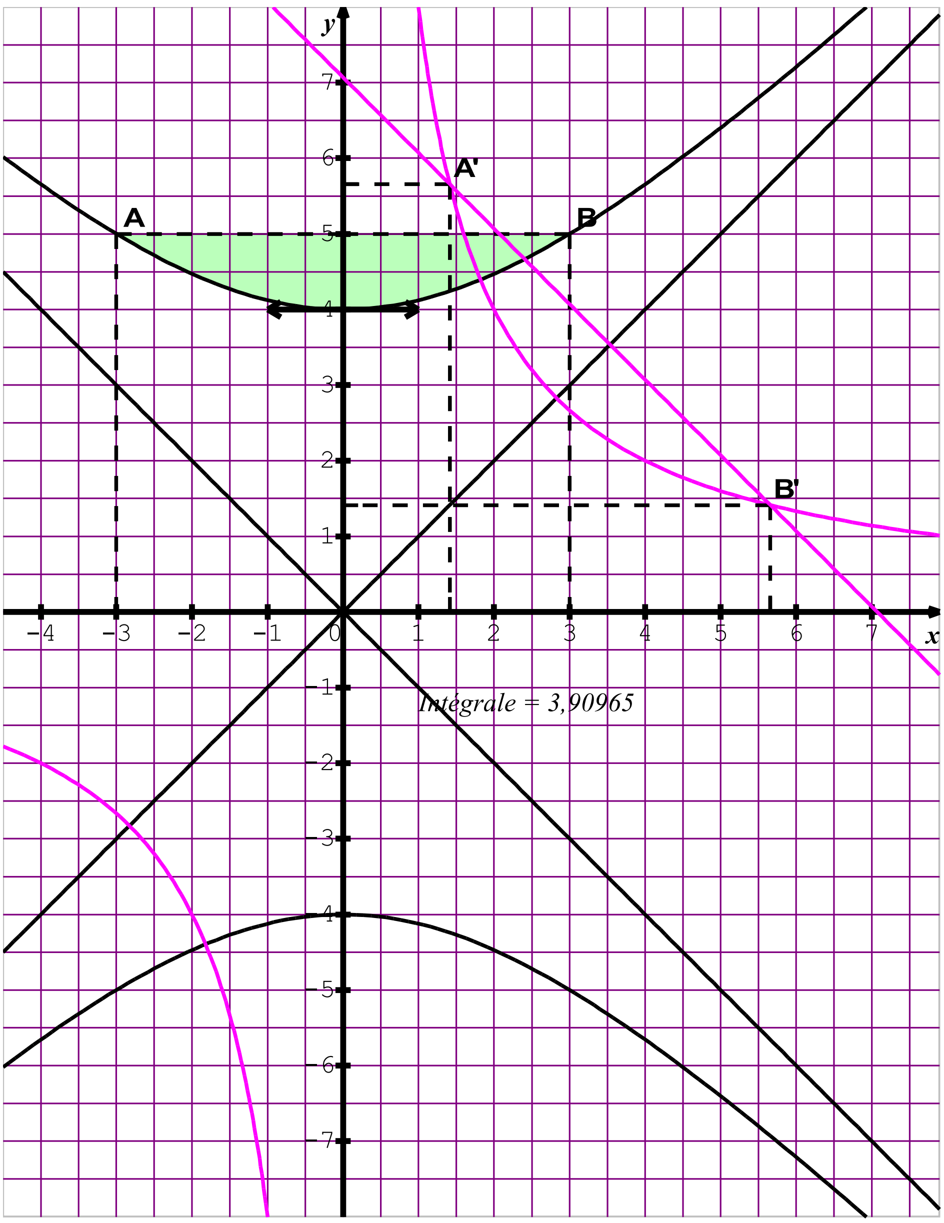
On sait: $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

On développe, réduit et on identifie les parties réelles et imaginaires:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases}$$

Les coordonnées de $A' = r(A)$ sont: $x_{A'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-3+5) = \sqrt{2}$ et $y_{A'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3+5) = 4\sqrt{2}$

Les coordonnées de $B' = r(B)$ sont: $x_{B'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3+5) = 4\sqrt{2}$ et $y_{B'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-3+5) = \sqrt{2}$



2) a) $\mathscr{H}'$ est l'hyperbole d'équation $xy = 8$, soit, $y = \dfrac{8}{x}$ avec $x \neq 0$.

(Voir graphique au-dessus)

b) En reprenant les notations du B/1.

$M'(x'; y') \in \mathscr{H}'$ si et seulement si $x'.y' = 8$ si et seulement si $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \times \dfrac{-x+y}{\sqrt{2}} = 8$

si et seulement si $y^2 - x^2 = 16$ si et seulement si $M(x; y) \in \mathscr{H}$.

Tout point de $\mathscr{H}'$ est l'image d'un point de $\mathscr{H}$ par r.

$\mathscr{H}'$ est donc l'image de $\mathscr{H}$ par r.

3) Le domaine $\mathscr{D}'$ image de $\mathscr{D}$ par r est défini par: $\mathscr{D} = \{M(x; y) / \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4\sqrt{2}$ et $\dfrac{8}{x} \leqslant y \leqslant 5\sqrt{2} - x\}$

Remarque: la droite d'équation $y = 5\sqrt{2} - x$ est la droite $(A'B')$ image par r de la droite (AB) d'équation $y = 5$

a) b) L'aire de $\mathscr{D}'$ en cm² (= *u.a.*) est $\mathscr{A}(\mathscr{D}') = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}} \left(5\sqrt{2} - x - \frac{8}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[5\sqrt{2}x - \frac{x^2}{2} - 8 \times \ln(x)\right]_{\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}}$

$\mathscr{A}(\mathscr{D}') = 40 - \dfrac{32}{2} - 8\ln(4\sqrt{2}) - (10 - \dfrac{2}{2} - 8\ln(\sqrt{2})) = 15 - 8\ln(4) = 15 - 16\ln(2)$

Comme une isométrie conserve les aires $\mathscr{A}(\mathscr{D}') = \mathscr{A}(\mathscr{D}) \approx 3{,}910$ à 10^{-3} par excès. Table des matières

---

Exercice 1 Nouvelle-Calédonie novembre 2005

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique: 3 cm)

Voir graphique à la fin de l'exercice

f est l'application (transformation du plan dans lui-même) d'écriture complexe $z' = \dfrac{(3+4\mathrm{i})z + 5\bar{z}}{6}$

1) $A(1 + 2\mathrm{i})$ a pour image A' d'affixe $z_{A'} = \dfrac{(3+4\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) + 5(1-2\mathrm{i})}{6} = \ldots = 0$

$B(1)$ a pour image A' d'affixe $z_{B'} = \dfrac{(3+4\mathrm{i}) \times 1 + 5 \times 1}{6} = \ldots = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$

$C(3\mathrm{i})$ a pour image C' d'affixe $z_{C'} = \dfrac{(3+4\mathrm{i})(3\mathrm{i}) + 5(-3\mathrm{i})}{6} = \ldots = -2 - \mathrm{i}$

2) Avec les notations usuelles: $x' + \mathrm{i}y' = \dfrac{(3+4\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) + 5(x-\mathrm{i}y)}{6} = \ldots = \dfrac{4x-2y}{3} + \mathrm{i}\,\dfrac{2x-y}{3}$

D'où $\mathscr{R}\mathrm{e}(z') = x' = \dfrac{4x-2y}{3}$ et $\mathscr{I}\mathrm{m}(z') = y' = \dfrac{2x-y}{3}$

3) Les points invariants par f sont les points $M(x; y)$ vérifiant le système: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$, on a donc:

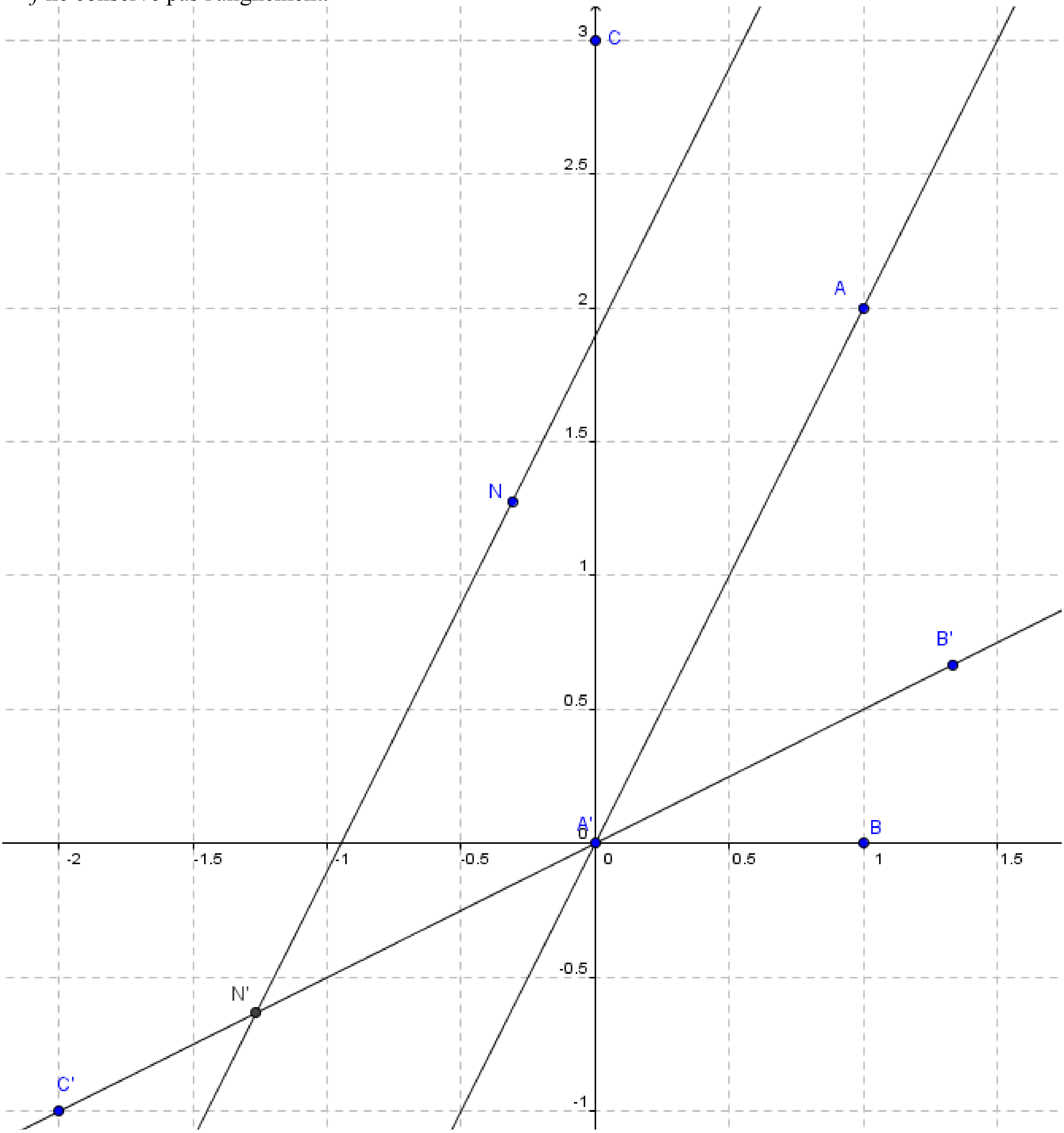
$\begin{cases} x=\dfrac{4x-2y}{3} \\ y=\dfrac{2x-y}{3} \end{cases}$. Les **deux** équations mènent à $y = \dfrac{1}{2}x$ équation de la droite (D).

On constate (et on vérifie ensuite ...) que les points A', B' et C' sont sur la droite (D).

Remarques:

* Tout point de D est invariant (son image est sur D), mais, il y a des points de D qui ne sont pas images d'eux-mêmes.

** f ne conserve pas l'alignement.



4) D'après les relations trouvées au 2), $y' = \frac{1}{2}x'$ ce qui prouve que $M' = f(M)$ est un point de (D).

5) a) $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{(3+4\mathrm{i})z+5\bar{z}-6z}{6z_A} = \frac{(-3+4\mathrm{i})z+5\bar{z}}{6z_A} = \frac{(-3+4\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})z+5(1-2\mathrm{i})\bar{z}}{6(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} =$
$\frac{(5+10\mathrm{i})z+(5-10\mathrm{i})\bar{z}}{6\times 5} = ... = \frac{z+\bar{z}}{6} + \mathrm{i}\,\frac{z-\bar{z}}{3}$

Or, $z + \bar{z} = 2\mathscr{R}e(z)$ est un réel et $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathscr{I}m(z)$ est un imaginaire pur, d'où, $\mathrm{i}\,\frac{z-\bar{z}}{3}$ est un réel.

La somme est donc un réel.

b) On a alors, si $M' \neq M$, $\arg\frac{z'-z}{z_A} = 0\ [\pi]$, soit $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}) = 0\ [\pi]$.

Les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6) Pour construire $N' = f(N)$,
si $N \in D$ alors $N' = N$.
si $N \notin D$ alors N' est le point d'intersection de la parallèle à (OA) passant par N avec la droite D.

Table des matières

Exercice 2 Nouvelle-Calédonie novembre 2005

(u_n) et (v_n) sont définies par: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \quad \text{pour } n \geqslant 2 \end{cases}$ et $v_n = u_n - \ln n$ pour $n \geqslant 1$.

1 a) $u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $u_3 = u_2 + \frac{1}{3} = ... = \frac{11}{6}$, $u_4 = u_3 + \frac{1}{4} = ... = \frac{25}{12}$

b) ***Une méthode***

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \\ u_{n-1} = u_{n-2} + \frac{1}{n-1} \\ \dots \\ u_2 = u_1 + \frac{1}{2} \\ u_1 = 1 \end{cases}$$ En sommant membre-à-membre les n lignes, on obtient l'égalité:

$u_n + u_{n-1} + ... + u_2 + u_1 = u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{2} + 1$

et après simplification: $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{2} + 1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Une autre méthode (récurrence)

Initialisation: $u_1 = 1$ et $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$, ...

Hérédité: supposons pour un entier $n \geqslant 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

on a alors: $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}$

Conclusion: Pour tout entier $n \geqslant 1$, ...

2 a) Soit k un entier naturel non nul, on a successivement:

$k \leqslant x \leqslant k+1$ Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, il vient:

$\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{k+1}$ Comme l'intégration sur $[k; k+1]$ conserve l'ordre, on a:

$\int_k^{k+1} \dfrac{1}{k} \mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1} \dfrac{1}{k+1} \mathrm{d}x$, soit : $\dfrac{1}{k} \left[x\right]_k^{k+1} \geqslant \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x \geqslant \dfrac{1}{k+1} \left[x\right]_k^{k+1}$

Finalement: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{k}$

b) L'encadrement du 2a) pour $k = 1$ à $n-1$ donne:

$\dfrac{1}{2} \leqslant \int_1^{2} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant 1$

$\dfrac{1}{3} \leqslant \int_2^{3} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{2}$

...

$\dfrac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

En sommant membre-à-membre les $n-1$ lignes, on obtient l''encadrement:

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} \leqslant \int_1^{2} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x + \int_2^{3} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x + ... + \int_{n-1}^{n} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n-1}$

D'après 1b) le premier membre vaut: $u_n - 1$

D'après la relation de Chasles, le deuxième membre vaut: $\int_1^{n} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln n$

D'après 1b), le troisième membre vaut: $u_n - \dfrac{1}{n}$

Finalement: $u_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant u_n - \dfrac{1}{n}$

puis $-u_n + 1 \geqslant -\ln n \geqslant -u_n + \dfrac{1}{n}$ En ajoutant u_n à chaque membre,

$1 \geqslant u_n - \ln n \geqslant \dfrac{1}{n}$ qui est positif.

Conclusion: $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

3a) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_{n+1} + \ln(n) = u_{n+1} - u_n - (\ln(n+1) - \ln n) = \dfrac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x$

b) D'après 2a), $\dfrac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant 0$.

La suite (v_n) est décroissante.

4) D'après 2 b) la suite (v_n) est minorée par 0

D'après 3b), la suite (v_n) est décroissante,
par conséquent, la suite (v_n) est convergente vers un réel γ.
(Pour la culture: ce nombre γ (déterminé par Euler) a pour valeur approchée: 0.5772156649... on ignore la nature de ce nombre: rationnel? irrationnel? transcendant? ...)

Comme $u_n = v_n + \ln n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \gamma$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, la suite ($u_n$) diverge vers $+\infty$. Table des matières

---

Exercice 1 Amérique du Sud novembre 2005

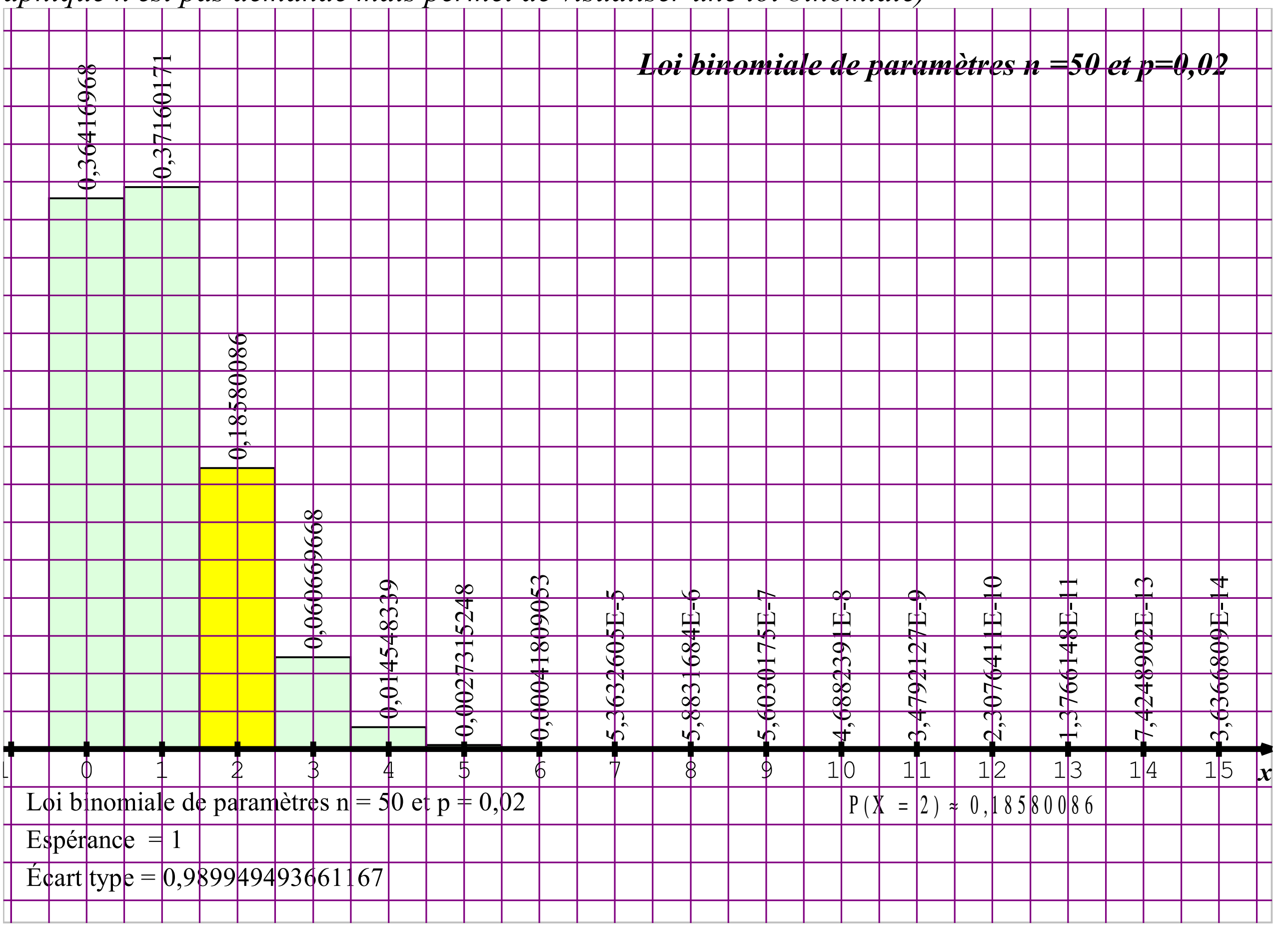
Partie A

1) La probabilité qu'un composant vendu est défectueux vaut $p = 0{,}02$.
Puisque les 50 éléments sont indépendants, la variable aléatoire X "nombre d'éléments défectueux" suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50; p)$, d'où, $P(X=2) = \binom{50}{2} 0{,}02^2\ 0{,}98^{48} = 1225\times\ 0{,}02^2\times\ 0{,}98^{48}$

$P(X=2) \approx 0{,}2$ à 10^{-1} près par excès

2) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}98^{50} \approx 0{,}64$ à 10^{-2} près par excès

3) Le nombre moyen de composants défectueux est $E(X) = 50\times0{,}02 = 1$
(Ce graphique n'est pas demandé mais permet de visualiser une loi binomiale)



Partie B

1 a) Le composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5\times\ 10^{-4}$, d'où, la probabilité que sa durée de vie soit supérieure à 1 000 heures est:

$P(T_1 \geqslant 1\,000) = 1 - \int_0^{1000} 5\times10^{-4}\mathrm{e}^{-5\times10^{-4}x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-5\times10^{-4}x}\right]_0^{1000} = ...= \mathrm{e}^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 0,61$ à 10^{-2} près par excès

b) Le composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$, d'où, la probabilité que sa durée de vie soit supérieure à 1 000 heures est:

$P(T_2 \geqslant 1\,000) = 1 - \int_0^{1000} 10^{-4}\mathrm{e}^{-10^{-4}x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-10^{-4}x}\right]_0^{1000} = ... = \mathrm{e}^{-0,1} \approx 0,90$ à 10^{-2} près par défaut.

2) Un composant acheté est soit défectueux (D), soit non défectueux ($\overline{D}$) .
On a ainsi une partition de l'univers, et, l'événement $(T \geqslant t) = (D \cap T_1) \cup (\overline{D} \cap T_2)$
(Ne pas hésiter à faire un arbre).

$P(T \geqslant t) = P(D \cap T_1) + P(\overline{D} \cap T_2) = 0,02\times(1 - \int_0^{t} 5\times10^{-4}\mathrm{e}^{-5\times10^{-4}x}\,\mathrm{d}x) + 0,98\times(1 - \int_0^{1000} 10^{-4}\mathrm{e}^{-10^{-4}x}\,\mathrm{d}x)$

$P(T \geqslant t) = 0,02\times(1 - \left[-\mathrm{e}^{-5\times10^{-4}x}\right]_0^{t}) + 0,98\times(1 - \left[-\mathrm{e}^{-10^{-4}x}\right]_0^{t}) = ... = 0,02\times \mathrm{e}^{-5\times10^{-4}t} + 0,98\times \mathrm{e}^{-10^{-4}t}$

3) La probabilité d'avoir un composant défectueux sachant qu'il est encore en état de fonctionner au bout de 1 000 heures est:

$$P_{T\geqslant1000}(D) = \frac{P(D\cap(T\geqslant1000))}{P(T\geqslant1000)} = \frac{0,02\times\mathrm{e}^{-0,5}}{0,02\times\mathrm{e}^{-0,5}+0,98\times\mathrm{e}^{-0,1}} \approx 0,01 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}$$

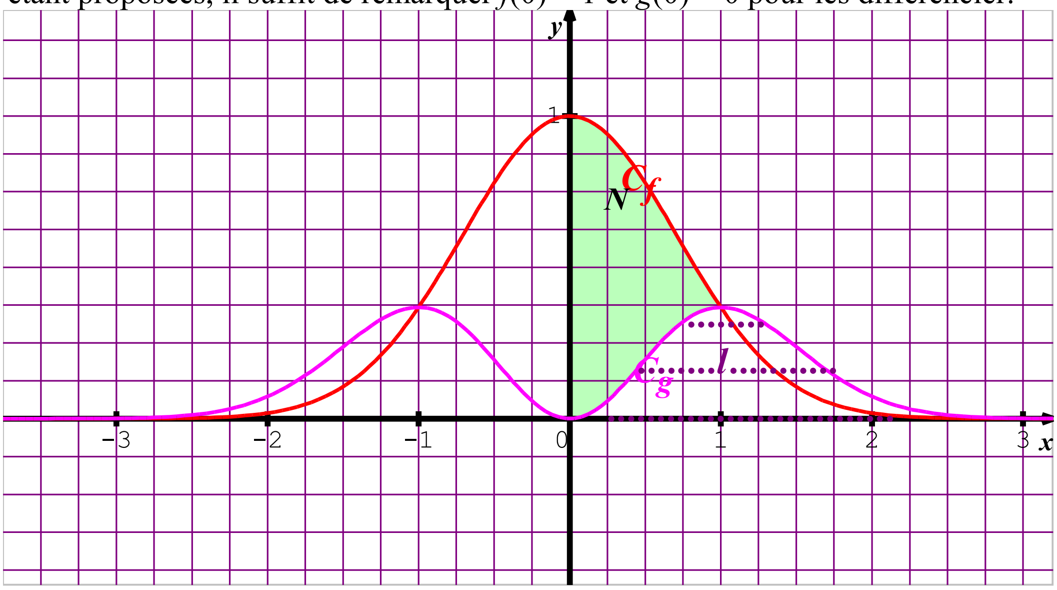
Table des matières

Exercice 4 Amérique du Sud novembre 2005

Partie A

C_f et C_g sont les représentations graphiques dans un repère orthogonal des fonctions f et g définies sur ℝ par:
$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et $g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$

1) Les courbes étant proposées, il suffit de remarquer $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$ pour les différencier.



2) Il est évident que pour tout $x \in$ ℝ, $-x \in$ ℝ et $f(-x) = f(x)$, et, $g(-x) = g(x)$.
Les fonctions f et g sont paires.

3) f est la composée de deux fonctions définies et dérivables sur ℝ, d'où, f est dérivable sur ℝ et pour tout x réel

$f'(x) = -2x\ \mathrm{e}^{-x^2} = -2x.f(x)$ qui est du signe contraire de x, ($\mathrm{e}^X > 0$ pour tout X)
d'autre part, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
d'où, le tableau de variations suivant: *(la parité permet de n'étudier que sur [0; +∞[)*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

La fonction g est le produit de la fonction carré par la fonction f, d'où,
$g'(x) = 2x.f(x) + x^2.f'(x) = 2x.f(x)(1 - x^2) = 2x(1 - x)(1 + x)f(x)$
D'autre part, on sait: $\lim\limits_{t\to-\infty} t e^t = 0$, d'où, en posant $t = -x^2$, on montre $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1/\mathrm{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/\mathrm{e}$	$\searrow$	0

4) La position relative de C_f et C_g est donnée par le signe de $f(x) - g(x) = (1 - x^2)\ \mathrm{e}^{-x^2}$

Conclusion: C_f et C_g se coupent aux points de coordonnées $(-1;\ \frac{1}{\mathrm{e}})$ et $(1;\ \frac{1}{\mathrm{e}})$

Sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, C_f est strictement au-dessus de C_g.

Sur $]-1; 1[$, C_f est strictement au-dessous de C_g.

Partie B

1) G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$

Comme g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, G est la primitive de g qui s'annule en 0.

2) Pour $x > 0$, comme $g(x) \geqslant 0$, $G(x)$ est la mesure de l'aire du domaine délimité par l'axe des ordonnées d'équation $X = 0$, la droite d'équation $X = x$, l'axe des abscisses et la courbe C_g. (1 *u.a.* = $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$)

3) On a d'après 1), $G'(x) = g(x)$ et comme $g(x) > 0$, G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) On pose $F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (F est la primitive de f qui s'annule en 0)

Une méthode: *Cette méthode n'est possible que parce qu'on nous donne le résultat $G(x) = \frac{1}{2}\,[F(x) - x\ \mathrm{e}^{-x^2}]$*)

On sait que $G'(x) = g(x)$, déterminons la dérivée de la fonction $\Psi : x \mapsto \frac{1}{2}[F(x) - x\,\mathrm{e}^{-x^2}]$

$\Psi'(x) = \frac{1}{2}(f(x) - \mathrm{e}^{-x^2} - x(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2}) = ... = g(x)$.

Ψ est donc une primitive de g et comme $\Psi(0) = ... = 0$, Ψ est la primitive définie sur $\mathbb{R}$ de g qui s'annule en 0.
Conclusion: $G = \Psi$.

Une autre méthode: (Intégration par parties)

$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t \times t\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = t\,e^{-t^2} \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $\mathbb{R}$,

d'où, $G(x) = \left[t \times \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2} \right) \right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2} \right) \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}x.\,\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{1}{2}F(x) = \frac{1}{2}[F(x) - x\,\mathrm{e}^{-x^2}]$

5) a) On admet que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}^+$) *(pour la culture: cette limite vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)*

D'après 4), on a: $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \frac{l}{2}$ (puisque la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$ est 0 croissance comparée)

b) $N = \int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [f(t) - g(t)]\,\mathrm{d}t$

Comme sur [0; 1], $f(t) - g(t) \geqslant 0$, N est la mesure de l'aire comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et les courbes C_f et C_g.

c) N est l'aire du domaine coloré en vert sur le graphique.

l est l'aire sur $[0; +\infty[$ sous la courbe C_g (en magenta).

Par lecture graphique, on voit que l'aire en vert est supérieure à la moitié de l'aire sous C_g.

D'où, $N > \frac{l}{2}$

Table des matières