Index

Liban mai 2006

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'À ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramétre λ, avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale À

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. Déterminer λ, arrondi À 10^{-1} prés, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale À 0,3.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.
2. À quel instant t, À un mois prés, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la premiére fois est-elle de 0,5 ?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premiéres années est $e^{-0,4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premiéres années, quelle est, À 10^{-2} prés, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considére un lot de 10 robots fonctionnant de maniére indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premiéres années.

1) Comme $P(X > 6) = 1 - P(X \leqslant 6) = 1 - \int_0^6 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^6 = ... = e^{-6\lambda}$

on a: $e^{-6\lambda} = 0,3$.

ln étant la fonction réciproque de l'exponentielle, il vient: $-6\lambda = \ln 0,3$, soit: $\lambda = -\dfrac{\ln 0,3}{6} \approx 0,2$

2) On cherche t tel que $P(X \leqslant t) = 0,5$, soit: $1 - e^{-0,2t} = 0,5$

$1 - e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,2t = \ln 0,5 \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln 0,5}{0,2}$ ≈ 3 ans et 6 mois à un mois près par excès.

3) On cherche $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = e^{-0,2\times 2} = e^{-0,4}$

4) On cherche $P_{(X \geqslant 2)}(X \geqslant 6)$

Or, $P_{(X \geqslant 2)}(X \geqslant 6) = P(X \geqslant 4)$ (Propriété de la loi de durée de vie sans vieillissement)

$P_{(X \geqslant 2)}(X \geqslant 6) = P(X \geqslant 4) = e^{-0,2\times 4} = e^{-0,8}$

On peut aussi faire: $P_{(X \geqslant 2)}(X \geqslant 6) = \dfrac{P((X \geqslant 2) \cap (X \geqslant 6))}{P(X \geqslant 2)} = \dfrac{P(X \geqslant 6)}{P(X \geqslant 2)} = \dfrac{e^{-0,2\times 6}}{e^{-0,4}} = e^{-0,8}$

5) L'événement contraire de " au moins un robot n'a aucune panne " est " aucun robot n'a de panne "

Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de robots n'ayant aucune panne en 2 ans.

Puisque les 10 robots fonctionnent de manière indépendante,

Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10;\ e^{-0,4})$, d'où, $P(Y = k) = \binom{n}{k}(e^{-0,4})^k(1 - e^{-0,4})^{n-k}$

la probabilité pour qu'aucun robot n'a de panne au bout de 2 ans est donc: $P(Y = 0) = (1 - e^{-0,4})^{10}$

la probabilité pour qu'au moins un robot n'a pas de panne au bout de 2 ans est: $1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - e^{-0,4})^{10}$

Antilles- Guyane septembre 2005

EXERCICE 4 **4 points**

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t min est définie par :

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx.$$

1. a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$ en fonction de t.

   b. En déduire que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$.

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min? plus de 5 min?

3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min? Comment expliquez-vous ce résultat ?

1 a) On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ d'où, $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-\lambda x}$

Les fonctions u, v sont dérivables à dérivées continues, d'où,

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} d x = \left[-x\times e^{-\lambda x}\right]_0^t - \int_0^t 1\times(-e^{-\lambda x}) d x = -t\, e^{-\lambda t} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t = -t\, e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} d x = \frac{1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

b) On sait (croissance comparée) : $\lim_{t\to+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} = 0$, d'où, $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} d x = \frac{1}{\lambda}$

2) Le temps moyen étant de 5 min, on a: $\frac{1}{\lambda} = 5$, d'où, $\lambda = 0,2$

On en déduit: $P(X \geqslant 10) = 1 - \int_0^{10} 0,2\, e^{-0,2 x} d x = 1 - \left[-e^{-0,2 x}\right]_0^{10} = e^{-0,2\times 10} = e^{-2}$

et $P(X \geqslant 5) = 1 - \int_0^5 0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0{,}2x}\right]_0^5 = \mathrm{e}^{-0{,}2\times 5} = \mathrm{e}^{-1}$

3) On cherche $P_{(X \geqslant 10)}(X \geqslant 15) = \dfrac{P(X\geqslant 10)\cap(X\geqslant 15)}{P(X\geqslant 10)} = \dfrac{P(X\geqslant 15)}{P(X\geqslant 10)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}} = \mathrm{e}^{-1} = P(X \geqslant 5)$

$P_{(X \geqslant 10)}(X \geqslant 15) = P(X\geqslant 5)$ (Loi de durée de vie sans vieillissement)