# Index



La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, la cohérence globale des réponses sont valorisées.
Le recours à des tableaux et graphiques pour soutenir une argumentation ou présenter des résultats est valorisé, sous réserve qu'un commentaire en précise clairement la signification.
Extrait du B.O. concernant la notation de l'épreuve au baccalauréat.

### *Amérique du Sud novembre 2013*

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.
Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

• Si un internaute est sur la page n° 1, alors il ira, soit sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

• Si un internaute est sur la page n° 2, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il restera sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

• Si un internaute est sur la page n° 3, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ,soit il restera sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel $n$, on définit les événements et les probabilités suivants :
$A_n$ : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 » et on note $a_n = P(A_n)$.
$B_n$ : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 » et on note $b_n = P(B_n)$.
$C_n$ : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 » et on note $c_n = P(C_n)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a $a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n$.

On admet que, de même, $b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n$ et $c_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n$.

Ainsi : $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n \end{cases}$.

2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

$U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ représente la situation initiale, avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice $3\times3$ que l'on précisera.
En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $U_n = M^nU_0$.

3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne U = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que $x + y + z = 1$ et MU = U.

4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression de $M^n$, $n$ étant un entier naturel non nul :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)\times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$. En déduire que les suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$ convergent vers des limites que l'on précisera.
5. Interpréter les résultats obtenus et donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.

---

### *Antilles-Guyane septembre 2013*

***Partie A***

On considère l'algorithme suivant :

```
A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
        Affecter à X la valeur X - 26
Fin du tant que
Afficher X
```

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?
2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

***Partie B***

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :
• ***Étape 1*** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où $x_1$ correspond à la première lettre du mot et $x_2$ correspond à la deuxième lettre du mot.

• ***Étape 2*** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

La matrice C = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

• ***Étape 3*** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} z_1 \equiv y_1 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant z_1 \leqslant 25 \\ z_2 \equiv y_2 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant z_2 \leqslant 25 \end{cases}$

• ***Étape 4*** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :

$$\text{RE} \to \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \to \text{DP}$$

Le bloc RE est donc codé en DP

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. Soient $x_1$ , $x_2$ , $x'_1$, $x'_2$ quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que
$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \ (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \ (26) \end{cases}$.

b. En déduire que $x_1 \equiv x'_1$ (26) et $x_2 \equiv x'_2$ (26) puis que $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$.

2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

a. Vérifier que la matrice C′ = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C .

b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y_2 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$

d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

3. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle $z_1$ et $z_2$ les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers $x_1$ et $x_2$ compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient $y'_1$ et $y'_2$ tels que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient $x_1$ et $x_2$ , les nombres entiers tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y'_1 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y'_2 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$.

Montrer que
$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 (26) \end{cases}$.

Conclure.

4. Décoder QC.

***Métropole septembre 2013***

***Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.***

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.

Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,

I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,

M : « l'individu est malade et infecté ».

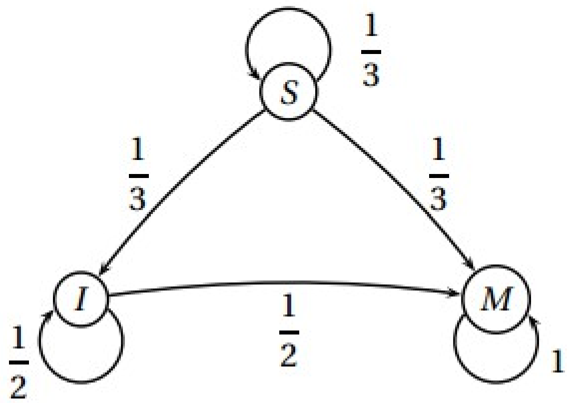
***Partie A***

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

— parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,

— parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.




On note $P_n = \begin{pmatrix} s_n & \mathrm{i}_n & m_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de *n* semaines où $s_n$, $\mathrm{i}_n$ et $m_n$ désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine.

On a alors $P_0$ = (0,99 0 0,01) et pour tout entier naturel *n*, $\begin{cases} s_{n+1}=\frac{1}{3}s_n \\ \mathrm{i}_{n+1}=\frac{1}{3}s_n+\frac{1}{2}\mathrm{i}_n \\ m_{n+1}=\frac{1}{3}s_n+\frac{1}{2}\mathrm{i}_n+m_n \end{cases}$

1. Écrire la matrice A appelée matrice de transition, telle que pour tout entier naturel *n*, $P_{n+1} = P_n \times$A.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n* non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. Déterminer l'état probabiliste $P_4$ au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à $10^{-2}$.

Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

**Partie B**

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note $Q_n$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de *n* semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix}$ où $S_n$, $I_n$ et $M_n$ désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel *n*, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$ .

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$ .

Pour la suite, on prend $Q_0 = (0{,}01 \quad 0{,}10 \quad 0{,}89)$ où les coefficients ont été arrondis à $10^{-2}$ .

1. Exprimer $S_{n+1}$ , $I_{n+1}$ et $M_{n+1}$ en fonction de $S_n$ , $I_n$ et $M_n$ .

2. Déterminer la constante réelle *k* telle que $B^2 = k\,J$ où *J* est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On en déduit que pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

3. a. Démontrer que pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b. Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.

Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

### *Nouvelle-Calédonie novembre 2013*

On note $E$ l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26.

On note $A$ l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté « ⋆ » considéré comme un caractère.

Pour coder les éléments de $A$, on procède de la façon suivante :

• Premièrement : On associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant. On a donc $a \to 0$, $b \to 1$,... $z \to 25$.

On associe au séparateur « ⋆ »le nombre 26.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | *h* | *i* | *j* | *k* | *l* | *m* | *n* |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *o* | *p* | *q* | *r* | *s* | *t* | *u* | *v* | *w* | *x* | *y* | *z* | ⋆ |
| 14 | 15 | 13 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |

On dit que $a$ a pour rang 0, $b$ a pour rang 1, ... , $z$ a pour rang 25 et le séparateur « ⋆ » a pour rang 26.

• Deuxièmement : à chaque élément $x$ de $E$ , l'application $g$ associe le reste de la division euclidienne de $4x + 3$ par 27.

On remarquera que pour tout $x$ de E , $g(x)$ appartient à $E$ .

• Troisièmement : Le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$.

Exemple :

$s \to 18$, $g(18) = 21$ et $21 \to v$ . Donc la lettre $s$ est remplacée lors du codage par la lettre $v$ .

1. Trouver tous les entiers $x$ de $E$ tels que $g(x) = x$, c'est-à-dire invariants par $g$ .

En déduire les caractères invariants dans ce codage.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $x$ appartenant à $E$ et tout entier naturel $y$ appartenant à $E$ ,

si $y \equiv 4x + 3$ modulo 27 alors $x \equiv 7y + 6$ modulo 27.

En déduire que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

3. Proposer une méthode de décodage.

4. Décoder le mot « $v\,f\,v$ ».