Index

Voici des sujets donnés en 2012 au bac …

EXERCICE centres étrangers juin 2012

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute trace de recherche sera valorisée.
1. On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation : les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2k\ ;\ 13 + 3k)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

2. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par : $a = 3n + 1$ et $b = 2n + 3$.
Affirmation : le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

3. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par : $a = 2n^2 + 7n + 21$ et $b = 2n + 2$.
Affirmation : pour tout entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et $n + 17$.
4 & 5. Hors programme

EXERCICE Antilles-Guyane juin 2012

Les quatre questions sont indépendantes.
1. a. Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation (E) $11x - 5y = 14$.
   b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ vérifiant l'équation (E).
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$.
   b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.
3- hors programme.
4. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que N $\leqslant \sqrt{A}$
    Si $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right) = 0$ alors Afficher N et $\frac{A}{N}$.
    Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?
Que donne cet algorithme dans le cas général ?

EXERCICE Métropole septembre 2012

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.
1. Soit (E) $5x + 6y = 3$, où x et y sont des entiers relatifs.
Les seuls couples qui sont solutions de l'équation (E) sont les couples $(18k + 3, -15k - 2)$ où k est un entier relatif.
2. Le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 7 est égal à 6.
3-4-5 Hors programme.

EXERCICE Amérique du nord mai 2012

La première question n'est plus au programme
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$.
Soit S la transformation du plan qui, à tout M d'affixe z , associe le point M′ d'affixe z' telle que :
$z' = 5\mathrm{i}z + 6\mathrm{i} + 4$.
Partie A
Hors programme : 1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S .
S est une similitude directe de rapport 5 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
2. On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z' .
Démontrer que : $\begin{cases} x' = -5y+4 \\ y' = 5x+6 \end{cases}$
(Remarque :
Avec le nouveau programme cette question peut être présentée à l'aide de matrices : M′ = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *M =* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
T = $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ *U =* $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. *M′ = TM + U*
ou encore N′ = (x′ y′) N =(x y) $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $U_1 = (4\ 6)$ $N' = NT_1 + U_1$ *)*

Partie B
Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que $-3 \leqslant x \leqslant 5$ et $-3 \leqslant y \leqslant 5$.
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces points M.
On rappelle que les coordonnées $(x'; y')$ du point M′, image du point M par la transformation S , sont $x' = -5y + 4$ et $y' = 5x + 6$.
1. a. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(a ; b)$ tels que $4a + 3b = 5$.
   b. En déduire l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x ; y)$ tels que $-3x' + 4y' = = 37$.
2. Soit M un point de l'ensemble $\mathcal{E}$ et M′ son image par la transformation S .
   a. Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.
   b. Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.
   En déduire que si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.
   c. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $x'^2 - y'^2 = 20$.

EXERCICE 4 Polynésie juin 2012

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
1. Vérifier que le couple (13 ; 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.
On rappelle le petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1$ [p].
1. Soit x un entier naturel.
Démontrer que si $x \equiv a$ [7] et $x \equiv a$ [19], alors $x \equiv a$ [133].
2. a. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
Démontrer que $a^6 \equiv 1$ [7] puis que $a^{108} \equiv 1$ [7].
En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [7]
b. On suppose que a est un multiple de 7.
Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [7]
c. On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [19].
Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [133].

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r$ [133] avec $0 \leqslant r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à r, l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1$ [133] avec $0 \leqslant r_1 < 133$.
1. Justifier que $r_1 \equiv a$ [133].
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
Décoder ce message.