Index

centres étrangers juin 2012 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation : les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2k\ ;\ 13 + 3k)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

L'affirmation est vraie :

Attention : il ne suffit pas de vérifier que les couples sont solutions, il faut aussi montrer que ce sont les seules.
Démarche des résolutions d'équations diophantiennes …. Classique
étape 1 : $(9\ ;\ 13)$ solution particulière
étape 2 : Si $(x\ ;\ y)$ solution de (E) alors $3x - 2y = 3\times9 - 2\times13$
Puis : $3(x - 9) = 2(y - 12)$ et Gauss …
étape 3 : vérification.

2. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par : $a = 3n + 1$ et $b = 2n + 3$.
Affirmation : le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

L'affirmation est vraie :

Attention, il s'agit de prouver une équivalence

Soit d le PGCD de a et b.
d est un diviseur positif commun à a et b.
d divise toute combinaison linéaire d'entiers donc d divise $-2a + 3b = 7$
d vaut 1 ou 7.

Soit $n \equiv 2$ (mod. 7) On a alors : $a \equiv 3\times2 + 1\ (7)$ et $b \equiv 2\times2 + 3\ (7)$
$a \equiv 0\ (7)$ et $b \equiv 0\ (7)$
Si $n \equiv 2$ alors 7 est le plus grand commun diviseur de a et b.

Si $d = 7$ alors $3n + 1 \equiv 0\ (7)$ et $2n + 3 \equiv 0\ (7)$, soit : $3n \equiv -1\ (7)$ et $2n \equiv -3\ (7)$
On cherche dans la table de multiplication des congruences de 7, un entier k tel que $3k \equiv 1\ (7)$
$k = 5$ convient car $3\times5 = 15 \equiv 1\ (7)$
et un entier k' tel que $2k' \equiv 1\ (7)$ $k' = 4$ convient
$3n \equiv -1\ (7)$ implique $n \equiv -5 \equiv 2\ (7)$
$2n \equiv -3\ (7)$ implique $n \equiv -12 \equiv 2\ (7)$

L'équivalence est démontrée

3. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par : $a = 2n^2 + 7n + 21$ et $b = 2n + 2$.
Affirmation : pour tout entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et $n + 17$.

Ici, un contre-exemple suffit à montrer que **l'affirmation est fausse.**

Posons $q = n + 2$ et $r = n + 17$, il faut : $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$
$n = 0$ $a = 21$, $b = 2$, $q = 2$ et $r = 17$ $17 > 2$ ce qui contredit la définition de la division euclidienne.

Remarque : $(2n + 2)(n + 2) + n + 17 = 2n^2 + 7n + 21$ et $0 \leqslant n + 17 < 2n + 2$
$n + 17 < 2n + 2$ si et seulement si $n > 15$.
La proposition est vraie si et seulement si $n > 15$
4 & 5. Hors programme

Antilles-Guyane juin 2012 Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les quatre questions sont indépendantes.
1. a. Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation (E) $11x - 5y = 14$.
b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ vérifiant l'équation (E).
Classique …. voir tous les exercices de ce type.
$\mathcal{S} = \{(4 + 5k ; 6 + 11k), k \in \mathbb{Z}\}$

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$.
Classique :
$2^{3n} = (2^3)^n$ et $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1$ (7), d'où, ...

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.
$2011 = 7\times287 + 2$, d'où, $2011 \equiv 2$ (7), et, $2012 = 3\times670 + 2$
Donc : $2011^{2012} \equiv 2^{3\times670+2}$ (7)
$2^{3\times670+2} = (2^3)^{670} \times 2^2$
$2011^{2012} \equiv 4$ (7)
Comme $0 \leqslant 4 < 7$, le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7 est 4.

3- hors programme.

4. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```
A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que N ⩽ √A
        Si A/N − Ent(A/N) = 0 alors Afficher N et A/N.
        Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?
Comme $3 \leqslant \sqrt{12} < 4$, le déroulement de l'algorithme s'arrêtera lorsque N = 4
Première boucle N = 1, condition vérifiée , affichage 1 et 12,
N prend la valeur 2.

Affichage : 1 et 12, 2 et 6 ; 3 et 4
Deuxième boucle N = 2, condition vérifiée , affichage 2 et 6,
N prend la valeur 3.

Troisième boucle N = 3, condition vérifiée , affichage 3 et 4,
N prend la valeur 4.
Fin de l'algorithme.

Que donne cet algorithme dans le cas général ?
Cet algorithme donne les diviseurs de N.

Métropole septembre 2012 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.
1. Soit (E) $5x + 6y = 3$, où x et y sont des entiers relatifs.
Les seuls couples qui sont solutions de l'équation (E) sont les couples $(18k + 3, -15k - 2)$ où k est un entier relatif.
Affirmation fausse
Les seuls couples qui sont solutions de l'équation (E) sont les couples $(6k + 3, -5k - 2)$
(il ne faut pas multiplier l'ensemble des solutions de $5x + 6y = 1$ par 3, mais, une des solutions particulières, puis, utiliser le théorème de Gauss).
un contre-exemple suffit :
le couple (9 ; –7) est tel que $5\times 9 + 6\times(-7) = 3$ et on ne peut pas trouver d'entier k tel que $18k + 3 = 9$

2. Le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 7 est égal à 6.
Affirmation fausse
Commencer par chercher le premier exposant x donnant $3^x \equiv 1$ (7) ou $3^x \equiv -1$ (7)
Dans les puissances de 3 : 9 = 7 + 2, 27 = 21 + 6 = 28 – 1
$3^3 \equiv -1$ (7), d'où, comme $2012 = 3\times 670 + 2$, $3^{2012} \equiv (-1)^{670}\times 3^2$ (7)
$3^{2012} \equiv 9 \equiv 2$ (7)
Le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 7 est égal à 2.
3-4-5 Hors programme.

Amérique du Nord mai 2012 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La première question n'est plus au programme
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit S la transformation du plan qui, à tout M d'affixe z , associe le point M′ d'affixe z' telle que :
$z' = 5iz + 6i + 4$.
Partie A
Hors programme : 1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S .
S est une similitude directe de rapport 5 et d'angle $\frac{\pi}{2}$
2. On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z' .
Démontrer que : $\begin{cases} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{cases}$
(Remarque :

Avec le nouveau programme cette question peut être présentée à l'aide de matrices : $M' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. $M' = TM + U$

ou encore $N' = (x'\ y')$ $N = (x\ y)$ $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $U_1 = (4\ 6)$ $N' = NT_1 + U_1$ *)*

Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que $-3 \leqslant x \leqslant 5$ et $-3 \leqslant y \leqslant 5$.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble de ces points M.

On rappelle que les coordonnées (x'; y') du point M′, image du point M par la transformation S , sont $x' = -5y + 4$ et $y' = 5x + 6$.

1. a. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (a ; b) tels que $4a + 3b = 5$.

b. En déduire l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x ; y) tels que $-3x' + 4y' = = 37$.

2. Soit M un point de l'ensemble $\mathscr{E}$ et M′ son image par la transformation S .

a. Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.

b. Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.

En déduire que si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.

c. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que : $x'^2 - y'^2 = 20$.

A- 2) Avec les notations de l'exercice :

$z' = 5iz + 6i + 4 \Leftrightarrow x' + iy' = 5i(x + iy) + 6i + 4 = -5y + 4 + i(5x + 6)$

les nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont leur partie réelle égale ET leur partie imaginaire égale.

$$\begin{cases} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{cases}$$

B- $4a + 3b = 5$ a une solution évidente : $a = 5$ et $b = -5$

$4a + 3b = 5 \Leftrightarrow 4a + 3b = 4\times5 + 3\times(-5) \Leftrightarrow 4(a - 5) = 3(-b - 5)$

Comme 3 et 4 sont premiers entre eux, on a d'après le théorème de Gauss :

4 divise $-b - 5$.

Il existe un entier k tel que $-b - 5 = 4k$.

En substituant dans l'équation, il vient : $4(a - 5) = 3\times4k$, soit : $a - 5 = 3k$.

Les solutions sont de la forme $(5 + 3k ; -5 - 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : les couples $(5 + 3k ; -5 - 4k)$ vérifient : $4\times(5 + 3k) + 3(-5 - 4k) = 5$

L'ensemble des solutions de $4a + 3b = 5$ est l'ensemble $\mathscr{S} = \{(5 + 3k ; -5 - 4k), k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $-3x' + 4y' = = 37 \Leftrightarrow -3(-5y + 4) + 4(5x + 6) = 37 \Leftrightarrow 4x + 3y = 5$ (après réduction par 5)

D'après a), il reste à déterminer k tels que $-3 \leqslant 5 + 3k \leqslant 5$ et $-3 \leqslant -5 - 4k \leqslant 5$

$$-\frac{8}{3} \leqslant k \leqslant 0 \text{ et } -\frac{1}{2} \geqslant k \geqslant -\frac{5}{2}$$

$k = -1$ ou $k = -2$ Si $k = -1$, $x = 2$ et $y = -1$, si $k = -2$, $x = -1$ et $y = 3$

$\mathscr{E} = \{(2 ; -1), (-1 ; 3)\}$

2. Soit M un point de l'ensemble $\mathscr{E}$ *et M′ son image par la transformation S .*

a. Démontrer que $x' + y'$ *est un multiple de 5.*

$x' + y' = -5y + 4 + 5x + 6 = 5(x - y + 2)$.
puisque x et y sont des entiers, la somme $x + y + 2$ est entière, d'où,
$x' + y'$ est un multiple de 5.

b. Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.
En déduire que si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.

$x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2 si et seulement si $(x' - y') - (x' + y') \equiv 0\ (2)$
Comme $(x' - y') - (x' + y') = 2(-y')$, la proposition est vraie

$x'^2 - y'^2 = (x' - y')(x' + y')$
Si $(x' - y')(x' + y') = 2q$ avec $q \in \mathbb{Z}$ alors 2 divise l'un des facteurs
Comme les deux facteurs sont congrus modulo 2,
si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.

c) $x'^2 - y'^2 = 20$.
D'après ce qui précède, $x' + y'$ est multiple de 5 et de 2,
et, $x' - y'$ est multiple de 2.
Soit : $x' + y' = 10k$ et $x' - y' = 2k'$
Le produit : $x'^2 - y'^2 = 20kk'$, donc, $kk' = 1$
$k = 1$ et $k' = 1$ ou $k = -1$ et $k' = -1$

$$\begin{cases} x'+y'=10 \\ x'-y'=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x'=12 \\ 2y'=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=6 \\ y'=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y+4=6 \\ 5x+6=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-4}{5} \\ y=\dfrac{-2}{5} \end{cases} \quad \text{(Solution exclue)}$$

ou $k = -1$ et $k' = -1$

$$\begin{cases} x'+y'=-10 \\ x'-y'=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x'=-12 \\ 2y'=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-6 \\ y'=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y+4=-6 \\ 5x+6=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

On a une et une seule solution dans $\mathcal{E}$: $(-2 ; 2)$

Polynésie juin 2012 ***Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
1. Vérifier que le couple (13 ; 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.
On rappelle le petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.
1. Soit x un entier naturel.
Démontrer que si $x \equiv a\ [7]$ et $x \equiv a\ [19]$, alors $x \equiv a\ [133]$.
2. a. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.

Démontrer que $a^6 \equiv 1$ [7] puis que $a^{108} \equiv 1$ [7].
En déduire que $(a^{25})^g \equiv a$ [7]
b. On suppose que a est un multiple de 7.
Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a$ [7]
c. On admet que pour tout entier naturel a, $(a^{25})^g \equiv a$ [19].
Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a$ [133].

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que
$a^{25} \equiv r$ [133] avec $0 \leqslant r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1$ [133] avec $0 \leqslant r_1 < 133$.
1. Justifier que $r_1 \equiv a$ [133].
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
Décoder ce message.

Partie A

On considère l'équation (E) : 25x − 108y = 1 où x et y sont des entiers relatifs.
1. Vérifier que le couple (13 ; 3) est solution de cette équation.
Évident en faisant le calcul ….
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
$25x - 108y = 1$ et $25\times13 - 108\times3 = 1$ mène à l'équation : $25(x - 13) = 108(y - 3)$
Théorème de Gauss : il existe un entier k tel que $x - 13 = 108k$,
puis, $y - 3 = 25k$.
Les solutions sont de la forme $(13 + 108k ; 3 + 25k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement :
Les couples $(13 + 108k ; 3 + 25k)$ vérifient $25\times(13 + 108k) - 108(3 + 25k) = 1$, d'où,
l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est : $\mathcal{S} = \{(13 + 108k ; 3 + 25k), k \in \mathbb{Z}\}$

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation 25g − 108c = 1.

1. Soit x un entier naturel.
Démontrer que si x ≡ a [7] et x ≡ a [19], alors x ≡ a [133].
$x \equiv a$ [7] équivaut à $x - a$ est divisible par 7 (il existe un entier q tel que $x - a = 7q$)
$x \equiv a$ [19] équivaut à $x - a$ est divisible par 19 (il existe un entier q' tel que $x - a = 19q'$)
Comme 7 et 19 sont **premiers entre eux**, $x - a$ est divisible par $7\times19 = 133$, d'où, $x \equiv a$ [133]

(Rappel de la démonstration du cours :
x – a = 7q et x – a = 19q' implique 7q = 19q'
*Comme 7 et 19 sont **premiers entre eux**, le théorème de Gauss implique 7 divise q', d'où, q' = 7q'' …(q'' entier)*
en substituant q' par 7 q'' , on a : x – a = 19×7q'' = 103q''.)

2. a. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
Démontrer que $a^6 \equiv 1$ *[7] puis que* $a^{108} \equiv 1$ *[7].*
En déduire que $(a^{25})^g \equiv a$ *[7]*

7 est premier et a n'est pas un multiple de 7, le petit théorème de Fermat s'applique, d'où, $a^{7-1} \equiv 1$ [7].

On a bien : $a^6 \equiv 1$ [7] .
Or $6\times18 = 108$, on a : $(a^6)^{18} \equiv 1$ [7], soit : $a^{108} \equiv 1$ [7].

Or, $25g - 108c = 1$, donc, $25g = 1 + 108c$
$(a^{25})^g = a^{1+108c} = a\times(a^{108})^c$
$a^{108} \equiv 1$ [7] implique $(a^{108})^c \equiv 1$ [7], puis, $(a^{25})^g \equiv a$ [7].

b. On suppose que a est un multiple de 7.
Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a$ *[7]*

Puisque a est un multiple de 7, on a :
$a \equiv 0$ [7], d'où, $a^{25g} \equiv (a^{25})^g \equiv 0$ [7]
Par transitivité de la congruence, on obtient : $(a^{25})^g \equiv a$ [7]

c. On admet que pour tout entier naturel a, $(a^{25})^g \equiv a$ *[19].*
Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a$ *[133].*

D'après B-1, si $(a^{25})^g \equiv a$ [7] et $(a^{25})^g \equiv$ a [19] alors $(a^{25})^g \equiv a$ [133].

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que
$a^{25} \equiv r$ *[133] avec* $0 \leqslant r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1$ *[133] avec* $0 \leqslant r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a$ *[133].*
au 1), on a vu que (13 ; 3) étaient solution de (E) et le couple (g, c) intervenant dans la partie B/ est une solution de (E).
On peut donc appliquer les résultats de la partie B/ avec $g = 13$ et $c = 3$, notamment : $(a^{25})^{13} \equiv a$ [133]
$(a^{25})^{13} \equiv r^{13}$ [133] et $(a^{25})^{13} \equiv a$ [133] (partie B)
On a bien : $r_1 \equiv a$ [133].

2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
Décoder ce message.
Le message est codé par r et décoder en retrouvant a, c'est-à-dire en calculant r_1 .

$128 \equiv -5$ [133] et $(-5)^{13} \equiv -131$ [133] et $-131 \equiv 2$ [133].
Comme $1 \leqslant a \leqslant 26$, on obtient : 128 est décodé par 2.

59^{13}
en procédant par étape :
$59^2 \equiv 23$ [133], puis, $23^2 \equiv 130 \equiv -3$ [133], donc, $59^4 \equiv -3$ [133]
$59^{12} \equiv (-3)^3 \equiv -27$ [133]
$59^{13} \equiv -27\times59$ [133]
$59^{13} \equiv -130 \equiv 3$ [133]
59 est décodé par 3.