Index

Pondichéry avril 2014....1
Liban mai 2014....3
Amérique du Nord mai 2014....5
Centres étrangers juin 2014....7
Polynésie 13 juin 2014....8
Asie juin 2014....9
Antilles-Guyane 19 juin 2014....11
Métropole 19 juin 2014....12

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, la cohérence globale des réponses sont valorisées.
Le recours à des tableaux et graphiques pour soutenir une argumentation ou présenter des résultats est valorisé, sous réserve qu'un commentaire en précise clairement la signification.
Extrait du B.O. concernant la notation de l'épreuve au baccalauréat.

Pondichéry avril 2014

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note : X_n l'événement « la marque X est utilisée le mois n »,
Y_n l'événement « la marque Y est utilisée le mois n »,
Z_n l'événement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des événements X_n, Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n, y_n, z_n.

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.
Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :
- 50 % de chance de rester fidèle à cette marque,
- 40 % de chance d'acheter la marque Y,
- 10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :
- 30 % de chance de rester fidèle à cette marque,
- 50 % de chance d'acheter la marque X,
- 20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :
- 70 % de chance de rester fidèle à cette marque,
- 10 % de chance d'acheter la marque X,
- 20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. a. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.

On admet que : $y_{n+1}=0{,}4x_n+0{,}3y_n+0{,}2z_n$ et que $z_{n+1}=0{,}1x_n+0{,}2y_n+0{,}7z_n$.

b. Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On définit la suite (U_n) par $U_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=A\times U_n+B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n=0$), on estime que $U_0=\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et i des entiers naturels. A, B et U des matrices
Entrée et initialisation	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$
Traitement	Tant que i < n U prend la valeur $A\times U+B$ i prend la valeur $i+1$ Fin de Tant que
Sortie	Afficher U

a. Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n=1$ puis pour $n=3$.

b. Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I-A$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a. Démontrer que $C=A\times C+B$ équivaut à $N\times C=B$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$.

En déduire que $C=\begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4. On note V_n la matrice telle que $V_n=U_n-C$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1}=A\times V_n$.

b. On admet que $U_n=A^n\times(U_0-C)+C$.

Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ?

Liban mai 2014

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.

Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.

Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.

Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.

Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.

les premières observations montrent que, d'un jour au jour suivant :

* 5 % des individus tombent malades ;

* 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier *n*, on note a_n la proportion d'individus sains *n* jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades *n* jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris *n* jours après le début de l'expérience.

On suppose qu' au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est-à-dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. Calculer a_1, b_1, c_1.

2. a) Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

b) Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n.

On admet que $c_{n+1} = 0{,}2\,b_n + c_n$

Pour tout entier *n*, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet qu'il existe une matrice inversible *P* telle que $D = P^{-1}\times A\times P$ et que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, $A^n = P\times D^n\times P^{-1}$.

3. a) Vérifier que pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} = A\times U_n$

On admet que, pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} = A^n\times U_0$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(3 - 4\times 0{,}95^n + 0{,}8^n\right) & 1-0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$.

4. a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \frac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right)$.

b) Déterminer la limite de la suite (b_n).

c) On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroit.

On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

À cet effet, on utilise l'algorithme donné en annexe 2 (à rendre avec la copie), dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en annexe 2.

Conclure.

Annexe 2

À rendre avec la copie

Algorithme et tableau à compléter

Variables :	b, b', x, y sont des réels
	k est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à b la valeur 0
	Affecter à b' la valeur 0,05
	Affecter à k la valeur 0
	Affecter à x la valeur 0,95
	Affecter à y la valeur 0,8
Traitement :	Tant que $b < b'$ faire :
	Affecter à k la valeur $k + 1$
	Affecter à b la valeur b'
	Affecter à x la valeur $0{,}95x$
	Affecter à y la valeur $0{,}80\,y$
	Affecter à b' la valeur $\cdots\cdots$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $\cdots\cdots$

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$
Après le 7ième passage dans la boucle TantQue	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	Vrai
Après le 8ième passage dans la boucle TantQue						
Après le 9ième passage dans la boucle TantQue						

Amérique du Nord mai 2014

Un volume constant de 2 200m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

* au départ, le bassin A contient 1 100m^3 d'eau et le bassin B contient 1 100m^3 d'eau ;

* tous les jours, 15%du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré vers le bassin A ;

* tous les jours, 10%du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin A est transféré vers le

bassin B, et, pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m^3 du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

* a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;

* b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1\,100$ et $b_0 = 1\,100$.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins. Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	Jour N°	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100,00	1100,00
3	1		
4	2	1187,50	1012,50
5	3	1215,63	984,38
6	4	1236,72	963,28
7	5	1252,54	947,46
8	6	1264,40	935,60
9	7	1273,30	926,70
10	8	1279,98	920,02
11	9	1284,98	915,02
12	10	1288,74	911,26
13	11	1291,55	908,45
14	12	1293,66	906,34
15	13	1295,25	904,75
16	14	1296,44	903,56
17	15	1297,33	902,67
18	16	1298,00	902,00
19	17	1298,50	901,50
20	18	1298,87	901,13

3. Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}85 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. On note $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $S = MS + R$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} - S = M(X_n - S)$.

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel *n*, $X_n - S = M^n(X_0 - S)$ et que

$$M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times 0{,}75^n & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}75^n \\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}75^n & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}75^n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $X_n = \begin{pmatrix} 1300-200\times 0{,}75^n \\ 900+200\times 0{,}75^n \end{pmatrix}$.
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.
4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel *n* vérifie
   $1300 - a_n < 1{,}5$ et $b_n - 900 < 1{,}5$.
   Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.

Centres étrangers juin 2014

Partie A : Préliminaires

1 a) n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$n^2 \equiv N - 1$ modulo N.

Montrer que $n \times n^3 \equiv 1$ modulo N.

b) Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1$ modulo 26.

On admettra que l'unique entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1$ modulo 26 vaut 21.

2- On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice $6A - A^2$.

b) En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut se noter sous la forme

c) Vérifier que : $B = 5\,A^{-1}$

d) Démontrer que si $AX = Y$ alors $5X = BY$.

Partie B : procédure du codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

* Le mot à coder est remplacer par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

* La matrice X est transformée est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

* La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

* Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : OU (mot à coder) $\rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1- Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.

2- En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que:

$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases}$ modulo 26

3- Décoder le mot « QP ».

Polynésie 13 juin 2014

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.
Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire » .

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare :

« Votre anniversaire tombe le 1er août ! » .

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

2. a. Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.

b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B
Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z=12j+31m$. *Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.*

1. Première méthode :
On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :     j et m sont des entiers naturels

Traitement :    Pour m allant de 1 à 12 faire :
                    Pour j allant de 1 à 31 faire :
                        z prend la valeur 12j+31m
                        Afficher z
                    Fin Pour
                Fin Pour
```

Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j+31m=503$.

2. Deuxième méthode :

a. Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12.

c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

3. Troisième méthode :

a. Démontrer que le couple $(-2;17)$ est solution de l'équation $12x+31y=503$.

b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x;y)$ est solution de l'équation $12x+31y=503$, alors $12(x+2)=31(17-y)$.

c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x;y)$, solutions de l'équation $12x+31y=503$.

d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x;y)$ tel que $1\leqslant y\leqslant 12$.

En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

Asie juin 2014

Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini, en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini *n* de nombres premiers, notés p_1, p_2, …, p_n.

On considère le nombre *E*, produit de tous les nombres premiers augmentés de 1 :

$$E = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$$

démontrer que *E* est un entier supérieur ou égal à 2, et, que *E* est premier avec chacun des nombres p_1, p_2, …, p_n.

2. En utilisant le fait que *E* admet un diviseur premier, conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.

On dit que M_k est le *k*-ième nombre de Mersenne.

1. a) Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

b) D'après le tableau précédent, si *k* est un nombre premier, peut-on conclure que le nombre M_k est premier ?

2. Soient *p* et *q* deux entiers naturels non nuls.

a) Justifier l'égalité : $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots + (2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$.

b) En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

c) En déduire que, si un entier *k* supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3 a) Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

b) Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1.b) ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel *n* :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2 .$$

Si *n* est un entier supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_k est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0$ modulo M_n. Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier.

2. Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 3.

L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables : u, M, n et i sont des entiers naturels.

Initialisation : u prend la valeur 4

Traitement : Demander un entier $n \geqslant 3$

M prend la valeur ….

Pour i allant de 1 à … faire

  u prend la valeur ….

Fin Pour

Si M divise u alors afficher " M …... "

  sinon afficher " M …... "

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il remplisse la condition voulue.

Antilles-Guyane 19 juin 2014

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B.

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.

Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

1. a) Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et à 9.

b) Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples (x ; y) possibles.

Entrées: x et y sont deux nombres

Traitement : Pour x variant de 0 à ….. (1)

  Pour y variant de 0 à ….. (2)

    Si …. (3)

      Afficher x et y

    Fin Si

  Fin Pour

Fin Pour

Fin traitement

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3. a) Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

   b) Déterminer une telle solution.

   c) Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4. Le randonneur se souvient d'avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

Calculer ces nombres.

Métropole 19 juin 2014

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- - il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- - la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.
  Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.
En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0=200$ et celui du bassin B est $b_0=100$.

1. Justifier que $a_1=400$ et $b_1=300$ puis calculer a_2 et b_2.
2. On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=AX_n+B$.
   b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+B$.
   c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n=\begin{pmatrix} a_n+400 \\ b_n+300 \end{pmatrix}$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1}=AY_n$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n=Y_{2n}$.
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1}=A^2Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1}=2Z_n$.
   b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n, $Y_{2n} = 2^n Y_0$
   En déduire que $Y_{2n+1}=2^nY_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n, $a_{2n}=600\times 2^n-400$ et $a_{2n+1}=800\times 2^n-400$.

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels
Traitement :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600\times 2^n - 400$
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800\times 2^n - 400$
	Fin de Si
Sortie :	Afficher a

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.