# Index



# I- Relations d'ordre: rappels et compléments

## I-1- Les symboles- le vocabulaire

| Symbole | se lit | Vocabulaire |
|---|---|---|
| $<$ | | inférieur à, strictement inférieur à |
| $>$ | | supérieur à, strictement supérieur à |
| $\leqslant$ | | inférieur ou égal à |
| $\geqslant$ | | supérieur ou égal à |

| Symbole | se lit | Vocabulaire |
|---|---|---|
| $x < 0$ | | $x$ strictement négatif |
| $x > 0$ | | $x$ strictement positif |
| $x \leqslant 0$ | | $x$ négatif; $x$ négatif ou nul |

| Symbole | se lit | Vocabulaire |
|---|---|---|
| $x \geqslant 0$ | | $x$ positif; $x$ positif ou nul |

## I-2- Définitions

Dire que $a < b$ (ou $b > a$) équivaut à $b - a$ est un réel strictement positif.

Dire que $a \leqslant b$ (ou $b \geqslant a$) équivaut à $b - a$ est un réel positif ou nul.

## I-3- Propriété (transitivité de la relation d'ordre)

Si $a < b$ et $b < c$ alors, $a < c$.

***Preuve:***

On sait: $a < b$ et $b < c$

d'où $b - a > 0$ et $c - b > 0$

On cherche le signe de $c - a$.

Or, $c - a = (c - b) + (b - a)$.

La somme de deux nombres strictement positifs est strictement positive, d'où, $c - a > 0$

Conclusion: $a < c$

***Une méthode pour comparer:***

Pour comparer deux nombres ou deux expressions numériques, on forme leur différence et on étudie le signe de cette différence.

***Exemple***: $n \in \mathbb{N}$, comparer les nombres $\frac{n+2}{n+1}$, $\frac{n}{n+1}$, $\frac{n+1}{n+2}$ et 1.

*Recherche: Une analyse de l'énoncé (par exemple en cherchant quelques cas particuliers) suggère l'ordre suivant,*

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} < 1 < \frac{n+2}{n+1}$$

***Calculs***: On va former les différences suivantes: $\frac{n+2}{n+1} - 1$, $1 - \frac{n+1}{n+2}$, $\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$

$$\frac{n+2}{n+1} - 1 = \frac{n+2-(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} > 0$, d'où, $1 < \frac{n+2}{n+1}$ (1)

$$1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-(n+1)}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+2} > 0$, d'où, $\frac{n+1}{n+2} < 1$ (2)

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1)-n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$, d'où, $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ (3)

Par comparaison de (1), (2) et (3), il vient d'après la propriété I-3-: $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} < 1 < \frac{n+2}{n+1}$

## I-4- Opérations et inégalités

*a*, *b*, *c* et *d* sont des nombres réels.

### I-4-1- Inégalités et sommes

#### I-4-1-1 Ajout d'un terme

On ne change pas une inégalité en ajoutant ou en retranchant un même nombre réel aux deux membres de l'inégalité.
ou encore:
Pour tout réel $c$, si $a < b$ alors $a + c < b + c$.

***Preuve***: $(b+ c) – (a + c) = b – a$
Ces deux différences ayant le même signe, les nombres sont dans le même ordre.

#### I-4-1-2 Somme d'inégalités

En **ajoutant** membre à membre des inégalités de **même sens**, on obtient une inégalité de même sens.
ou encore:
Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$

***Preuve:***
Comme $a < b$ , d'après la propriété précédente I-4-1-1: $a + c < b + c$. (1)
Comme $c < d$ , d'après la propriété précédente I-4-1-1: $b + c < b + d$. (2)
Par comparaison de (1) et (2), il vient d'après la propriété I-3- : $a + c < b + d$

### I-4-2- Inégalités et produits

#### I-4-2-1- Facteur positif

On ne change pas une inégalité en multipliant par un même nombre réel **strictement positif** les deux membres de l'inégalité.
ou encore:
Si $a < b$ et si $\boldsymbol{c > 0}$,alors $a \times c < b \times c$.

#### I-4-2-2- Facteur négatif

On **change** l'inégalité en multipliant par un même nombre réel **strictement négatif** les deux membres de l'inégalité.
ou encore:
Si $a < b$ et si $\boldsymbol{c < 0}$,alors $a \times c > b \times c$.

***Preuve:*** $(b\times c) – (a\times c) = c\times(b – a)$
Deux cas,
** si $\boldsymbol{c > 0}$**,** les deux différences $(b\times c) – (a\times c)$ et $(b – a)$ ayant le même signe, les nombres sont dans le même ordre.

** si $c < 0$, ces deux différences ayant des signes contraires, les nombres sont dans l'ordre inverse.

#### I-4-2-3- Produit d'inégalités

En **multipliant** membre à membre des inégalités de **nombres positifs** et de **même sens**, on obtient une inégalité de même sens.
ou encore:
Si $0 < a < b$ et $0 < c < d$ alors $a \times c < b \times d$

***Preuve:***
Comme $a < b$ et $c > 0$, d'après la propriété précédente I-4-2-1-: $a \times c < b \times c$. (1)
Comme $c < d$ et $b > 0$, d'après la propriété précédente I-4-2-1-: $b \times c < b \times d$. (2)
Par comparaison de (1) et (2), il vient d'après la propriété I-3- : $a \times c < b \times d$

#### I-4-3- Inégalités et inverses

On **change** l'inégalité en prenant l'**inverse** des deux membres **strictement positifs** d'une inégalité.
ou encore:
Si $0 < a < b$,alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

***Preuve:***

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$$

Comme $a$ et $b$ sont strictement positifs, le produit $ab$ est strictement positif.

Les différences $b - a$ et $a - b$ sont opposées. $b - a = -(a - b)$

#### I-4-4- Attention! Danger!

Les propriétés des § I-4-1-2 Somme d'inégalités et I-4-2-3- Produit d'inégalités ne peuvent pas être appliquées pour des différences, des produits lorsqu'un facteur est négatif et des quotients.

## II- Variations de fonctions

Dans ce paragraphe, $f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$.

***Objectif***: il s'agit de traduire l'action d'une fonction numérique sur la relation d'ordre.

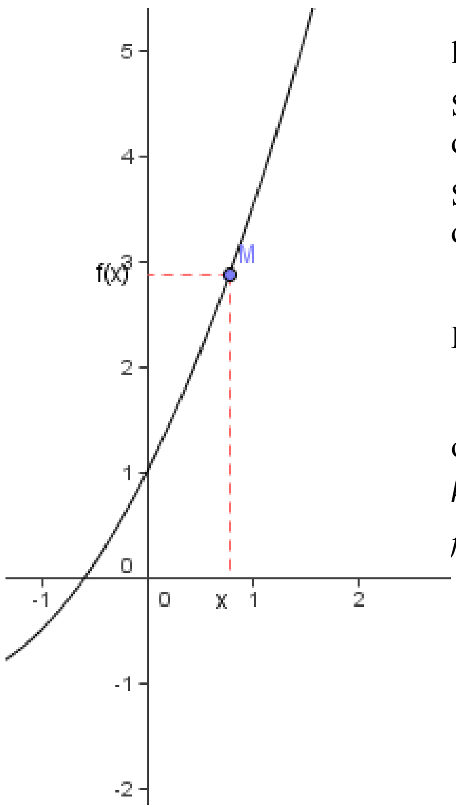
Au départ, on a deux nombres (antécédents) classés dans un certain ordre,

on applique la fonction

on obtient à l'arrivée des nombres (les images) et selon ce qui se produit, on a:

## *II-1- Fonction strictement croissante*

### II-1-1- Observation




Lorsqu'on déplace $x$ sur l'axe des abscisses, son image $f(x)$ se déplace sur l'axe des ordonnées.

Si $x$ se déplace de la gauche vers la droite ($x$ augmente) alors $f(x)$ se déplace de bas en haut ($f(x)$ augmente)

Si $x$ se déplace de la droite vers la gauche ($x$ diminue) alors $f(x)$ se déplace de haut en bas ($f(x)$ diminue)

Les antécédents et les images se déplacent dans le même ordre.

ou encore, si on prend en abscisses deux nombres quelconques classés $\alpha$ et $\beta$, (par exemple: $\alpha < \beta$ alors leurs images sont dans le même ordre

$f(\alpha) < f(\beta)$.

### II-1-2- Définition

On dit que $f$ est une fonction strictement croissante sur un intervalle $I$ lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour tous $\alpha$ et $\beta$ de $I$, si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$

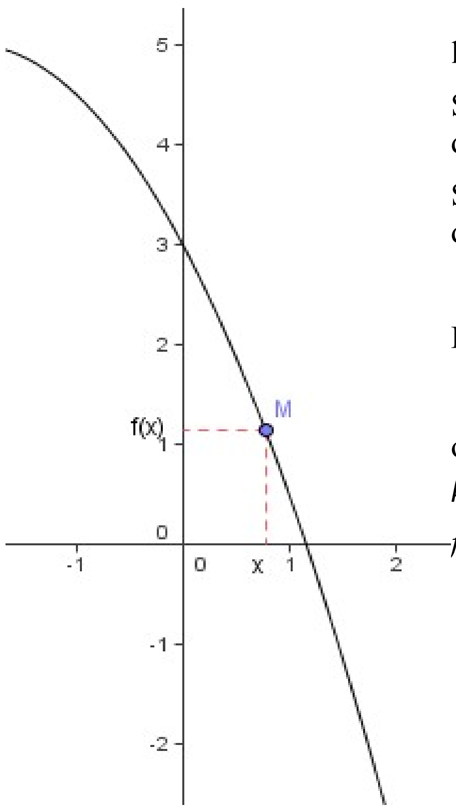
ou encore

les antécédents et les images sont classés dans le même ordre

Une fonction **strictement croissante** sur un intervalle $I$ **conserve** l'ordre.

## *II-2- Fonction strictement décroissante*

### II-2-1- Observation




Lorsqu'on déplace $x$ sur l'axe des abscisses, son image $f(x)$ se déplace sur l'axe des ordonnées.

Si $x$ se déplace de la gauche vers la droite ($x$ augmente) alors $f(x)$ se déplace de haut en bas ($f(x)$ diminue)

Si $x$ se déplace de la droite vers la gauche ($x$ diminue) alors $f(x)$ se déplace de bas en haut ($f(x)$ augmente)

Les antécédents et les images se déplacent dans l'ordre inverse.

ou encore, si on prend en abscisses deux nombres quelconques classés $\alpha$ et $\beta$, (par exemple: $\alpha < \beta$ alors leurs images sont dans l'ordre inverse.

$f(\alpha) > f(\beta)$.

### II-2-2- Définition

On dit que $f$ est une fonction strictement décroissante sur un intervalle $I$ lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour tous $\alpha$ et $\beta$ de $I$, si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$

ou encore

les antécédents et les images sont classés dans l'ordre inverse.

Une fonction **strictement décroissante** sur un intervalle $I$ **inverse** l'ordre.

## *II-3- Tableau de variations*

***Étudier les variations*** d'une fonction, c'est déterminer les intervalles où la fonction est croissante et ceux où la fonction est décroissante.

On dit qu'une fonction est ***monotone sur un intervalle*** lorsqu'elle ne change pas de variations sur cet intervalle.

On résume les variations dans un ***tableau de variations:***

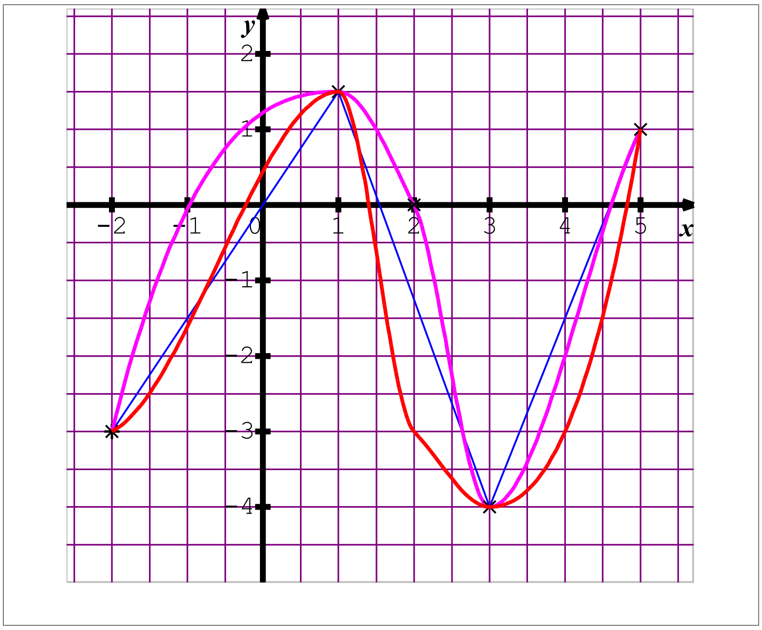
***Exemple:***

On sait qu'une fonction définie sur l'intervalle [–2; 5] est strictement croissante sur les intervalles [-2; 1] et [3;5] et qu'elle est strictement décroissante sur l'intervalle [1; 3], et que $f(-2) = -3$, $f(1) = 1{,}5$, $f(3) = -4$ et $f(5) = 1$ aura le tableau de variations suivant:

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | ↗ | $1{,}5$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $1$ |

**Exercice:**

Construire sur un même graphique trois courbes susceptibles de représenter la fonction *f* du tableau ci-dessus, et classer *f*(0) et *f*(0,5), *f*(1,5) et $f(\sqrt{2})$ , *f*(3,2) et *f*($\pi$)




On sait: $-2 < 0 < 0{,}5 < 1$ et *f* strictement croissante sur [–2; 1], donc, $f(0) < f(0{,}5)$
On sait: $1 < \sqrt{2} < 1{,}5 < 3$ et *f* strictement décroissante sur [1; 3], donc, $f(\sqrt{2}) > f(1{,}5)$
On sait: $3 < \pi < 3{,}2 < 5$ et *f* strictement croissante sur [3; 5], donc, $f(\pi) < f(3{,}2)$

## *II-4- Extremum: maximum- minimum*

On dit que $f(x_0)$ est un **maximum** de *f* sur l'intervalle *I* lorsque pour tout *x* de *I*, $f(x) \leqslant f(x_0)$ .

On dit que $f(x_0)$ est un **minimum** de *f* sur l'intervalle *I* lorsque pour tout *x* de *I*, $f(x) \geqslant f(x_0)$ .

Un **extremum** est un maximum ou un minimum de *f*.

***Dans l'exemple*** du paragraphe précédent II-3-

*f* a pour maximum 1,5 sur l'intervalle [–2; 5]. Ce maximum est atteint en 1
*f* a pour minimum –4 sur l'intervalle [–2; 5]. Ce minimum est atteint en 3.
Sur l'intervalle [–2; 1], le minimum de *f* est –3 atteint en –2.
Sur l'intervalle [3; 5], le maximum de *f* est 1 atteint en 5.

***Autre exemple:***
*Énoncé*: Montrer que la fonction *f* définie par $f(x) = x^2-4x+3$ a pour minimum –1.
*Analyse d'une méthode: D'après la définition, il faut montrer que pour tout x réel* $x^2-4x+3 \geqslant -1$ *et qu'il existe une valeur* $x_0$ *telle que* $f(x_0) = -1$.
*pour montrer l'inégalité, on étudie le signe de la différence*
*Démonstration:*
Soit $x^2-4x+3-(-1) = x^2-4x+4$
Or, $x^2-4x+4 = (x-2)^2$
Un carré étant toujours positif ou nul, on a:

pour tout $x$ réel, $x^2-4x+3 \geqslant -1$
D'autre part, le même calcul prouve que lorsque $x = 2$, la différence est nulle, d'où, $f(2) = -1$
Conclusion:
la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2-4x+3$ a pour minimum $-1$ et ce minimum est atteint en 2.

## III- Des méthodes pour étudier les variations

### *III-1- Exemple 1*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$

On prend deux réels $a$ et $b$ tels que $a < b$

$a < b$ En multipliant par $(-2)$ qui est strictement négatif, l'ordre change et on obtient:
$-2a > -2b$ En ajoutant 1, l'ordre ne change pas, on obtient:
$-2a + 1 > -2b + 1$
Soit $f(a) > f(b)$
On a montré: si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$
La fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Résumé dans un tableau de variations:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | |

### *III-2- Exemple 2*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+1$

On prend deux réels $a$ et $b$ tels que $a < b$ et on cherche le signe de la différence $f(b) - f(a)$.

$f(b) - f(a) = (b^2+1) - (a^2+1) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

Or, comme $a < b$, on a : $b - a > 0$.

Il reste à étudier le signe de la somme $b$ + a et le signe de $f(b) - f(a)$ sera celui de $b - a$.

On sait que si les deux termes $a$ et $b$ de la somme sont positifs alors la somma $b + a$ est positive, et, que si les deux termes $a$ et $b$ de la somme sont négatifs alors la somma $b + a$ est négative.

On a donc: si $0 \leqslant a < b$ alors $b + a > 0$ et $f(b) - f(a) > 0$, soit, $f(a) < f(b)$, et

si $a < b \leqslant 0$ alors $b + a < 0$ et $f(b) - f(a) < 0$, soit, $f(a) > f(b)$

On a montré: Sur $[0;+\infty[$, la fonction $f$ est strictement croissante

Sur $]-\infty; 0]$, la fonction $f$ est strictement décroissante.

Résumé dans un tableau de variations:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | |

# IV- Utilisation des variations

## IV-1- Pour comparer des images

On reprend l'exemple du II-3:

On sait que $f$ a le tableau de variations suivant:

| $x$ | $-2$ | $-\sqrt{2}$ | $-1{,}2$ | $1$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{2}+1$ | $3$ | $4{,}789$ | $4{,}79$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | $1{,}5$ | | | | | | $1$ |
| | $-3$ | $\nearrow$ | | | $\searrow$ | | $-4$ | $\nearrow$ | | |

Si on prend deux réels dans un intervalle où la fonction reste monotone, on peut alors comparer leurs images.

**Énoncé**: Comparer $f(-\sqrt{2})$ et $f(-1{,}2)$; $f(\sqrt{2}+1)$ et $f(\sqrt{5})$, $f(4{,}789)$ et $f(4{,}79)$, $f(0)$ et $f(2)$

On sait que $-\sqrt{2} < -1{,}2$ et que $-2 < -\sqrt{2} < -1{,}2 < 1$
Sur l'intervalle $[-2;1]$, la fonction $f$ est strictement croissante, d'où, $f(-\sqrt{2}) < f(-1{,}2)$

Comparaison de $\sqrt{2}+1$ et $\sqrt{5}$ Les valeurs approchées données par la calculatrice montrent que:
$1 < \sqrt{5} < \sqrt{2}+1 < 3$
Sur l'intervalle $[1; 3]$, la fonction $f$ est strictement décroissante, d'où, $f(\sqrt{5}) > f(\sqrt{2}+1)$

On sait que $4 < 4{,}789 < 4{,}79 < 5$
Sur l'intervalle $[4; 5]$, la fonction $f$ est strictement croissante, d'où, $f(4{,}789) < f(4{,}79)$

0 et 2 étant sur un intervalle où la fonction $f$ change de variations, on ne peut pas comparer par cette méthode les images $f(0)$ et $f(2)$.

## IV-2- Pour encadrer

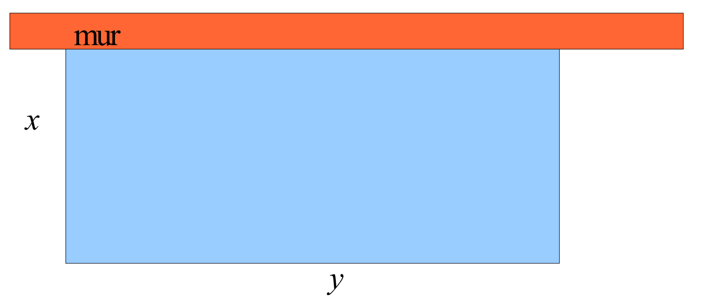
Quand on connaît les extremums de $f$ sur un intervalle $I$, pour toute valeur $x$ de $I$, on a:

minimum $\leqslant f(x) \leqslant$ maximum

## IV-3- Problème d'optimisation

Dans les problèmes où une grandeur (prix, longueur, aire, volume ...) dépend d'une autre grandeur variable, on cherche à optimiser lorsqu'on cherche pour quelle valeur on aura un minimum ou un maximum selon le problème.
Obtenir le bénéfice maximal ou un coût minimal de production.
Avoir le plus grand volume d'un récipient avec le moins de métal ...

***Exemple:***
On veut clôturer un terrain rectangulaire sur trois côtés (l'autre côté est par exemple le long d'un mur) avec une longueur fixée (100 mètres) de clôture et obtenir la plus grande surface possible.




L'aire du rectangle $xy$

La longueur de la clôture $2x + y$.

On pose $x$ et $y$ les deux dimensions en mètres du rectangle, et, on a: $2x + y = 100$, soit $y = 100 - 2x$.

L'aire est $\mathcal{A}(x) = xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$

On a donc une fonction $\mathcal{A}$ qui donne l'aire du terrain en fonction d'une des dimensions.

On montre que $-2x^2 + 100x \leqslant 1250$
En effet, $-2x^2 + 100x - 1250 = -2(x^2 - 50x + 625) = -2(x-25)^2$ qui est négatif ou nul.
Comme $f(25) = 1\,250$, on a montré:

L'aire est maximale lorsque $x = 25$ mètres et donc $y = 100 - 2\times 25 = 50$ mètres.