# Index

I- NOMBRE DÉRIVÉ....1
I-1 – Accroissement moyen....1
Accroissement de la variable: ....2
Accroissement de (des valeurs prises par) la fonction:....2
Accroissement moyen de la fonction:....2
I-1-1- Coefficient directeur d'une sécante....2
I-1-2- Vitesse moyenne d'un mobile....2
I-1-3- Fonction affine....2
I-2- Nombre dérivé....3
I-2-1- Théorème....3
I-2-2- Définition du nombre dérivé....3
Définition:....3
Remarque: ....3
I-2-3- Dérivabilité et continuité en un point....4
Propriété:....4
IMPORTANT: La réciproque est fausse....4
I-2-4- Tangente....4
Cas des tangentes verticales....4
Cas des demi-tangentes....5
I-2-5- Vitesse instantanée....5
I-2-6- Approximation affine; méthode d'Euler....5
Interprétation graphique de l'égalité f(a + h) = f(a) + h×f'(a) + h.ϵ(h) ....6
II- FONCTION DÉRIVÉE....6
II-1- Définition et notations....6
II-1-1-Définition....6
II-1-2- Dérivées successives....6
II-1-3- Notations différentielles....6
II-2- Dérivée des fonctions usuelles....6
II-3- Opérations et dérivées....7
II-4- Dérivée de la composée de deux fonctions....8
II-4-1- Théorème:....8
II-4-2- Encore des formules....9
Quelques exemples:....9
III- APPLICATIONS ....9
III-1- Dérivée et sens de variation....9
III-2- Dérivée et limites ....10
III-3- Primitives....11

# I- NOMBRE DÉRIVÉ

## *I-1 – Accroissement moyen*

Notations usuelles: le plus souvent, la variable est notée $x$, $t$

la fonction est notée $f$, $g$,

la valeur prise par la fonction est notée $y$.

### *Accroissement de la variable:*

Soit on forme la différence $x_2 - x_1$ où $x_1$ et $x_2$ sont deux valeurs distinctes de la variable,

soit on écrit $\Delta x$ où $\Delta x$ est un nombre réel non nul,

ou encore $h$ où $h$ est un réel non nul.

### *Accroissement de (des valeurs prises par) la fonction:*

Selon les notations choisies pour l'accroissement de la variable, on aura les écritures suivantes:

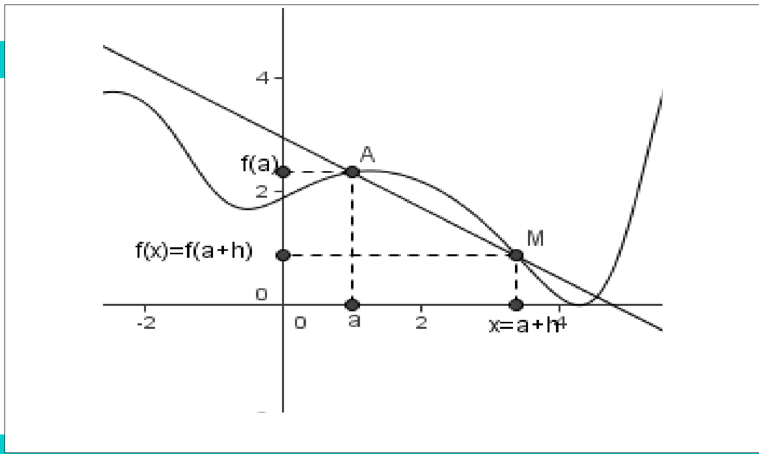
$f(x_2) - f(x_1)$, $f(x+\Delta x) - f(x)$, $f(x+h) - f(x)$, $y_2 - y_1$ et de façon générale $\Delta f$ ou $\Delta y$

### *Accroissement moyen de la fonction:*

On forme le rapport de l'accroissement de la fonction sur l'accroissement de la variable:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

## I-1-1- Coefficient directeur d'une sécante




Soit $C_f$ la courbe représentative d'une fonction $f$, $A(a\,;f(a))$ un point fixe de $C_f$ et $M$ un point courant de $C_f$ d'abscisse $x = a + h$

La droite $(AM)$ est une sécante à $C_f$ et le coefficient directeur de $(AM)$ est:

$$\alpha = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

## I-1-2- Vitesse moyenne d'un mobile

$f$ est la loi horaire d'un mobile. (Cette loi donne la position d'un mobile sur une trajectoire connue)
À l'instant $t$, le mobile est à la position $f(t)$.
Entre deux dates, $t_0$ et $t_1 = t_0 + h$, la vitesse moyenne du mobile est donnée par:

$$V_M = \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

***Exemple***: Lorsqu'un corps chute dans le vide sans vitesse initiale, la loi horaire est donnée par $f(t) = \frac{1}{2}\, g\,t^2$ où $g$ est l'accélération due à la pesanteur. (unité $m.s^{-2}$)

La trajectoire est une droite verticale.
À la date $t = 2$ sec, le mobile est à la position $x_2 = f(2) = 2g$ mètres et à la date $t = 6$ sec, $x_6 = f(6) = 18g$ mètres et

la vitesse moyenne sur l'intervalle [2; 6] est $\frac{x_6-x_2}{4} = 4g\ m.s^{-1}$

En prenant:

$g \approx 10\ m.s^{-2}$

| | |
|---|---|
| $t = 0$ | $x = 0$ |
| $t = 1$ | $x \approx 5$ |
| $t = 2$ | $x \approx 20$ |
| $t = 3$ | $x \approx 45$ |
| $t = 4$ | $x \approx 80$ |

## I-1-3- Fonction affine

Une fonction affine $f$ est caractérisée par la propriété suivante:

Pour tous réels distincts $x_1$ et $x_2 = x_1 + h$, on a: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} =$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \textbf{Constante}$$

## I-2- Nombre dérivé

La plupart des phénomènes ne sont pas représentés des fonctions affines. Mais, en considérant un accroissement $\Delta x$ "très petit", on peut assimiler sur cet intervalle de largeur $\Delta x$ la fonction $f$ et une fonction affine.

Graphiquement, cela revient à considérer une courbe comme une ligne brisée constituée de segments "très petits".

En faisant tendre $\Delta x$ vers 0, on cherche la meilleure approximation possible et cela mène au théorème suivant:

### I-2-1- Théorème

Dans ce paragraphe, $f$ est une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ contenant $a$, $a + h$ et $x$.

$h$ est un réel non nul.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$ où $L \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$ où $L \in \mathbb{R}$.

(iii) Il existe un réel $L$ tel que $f(a + h) = f(a) + h \times L + h.\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$

*Démonstration:*

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Il suffit de poser $h = x - a$ pour démontrer l'équivalence

(i) $\Leftrightarrow$ (iii)

On a vu dans le cours sur les limites que:

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$ équivaut à $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L + \epsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$

### I-2-2- Définition du nombre dérivé

***Définition:***

Lorsqu'une de ces propositions du théorème précédent est vérifiée, on dit que la fonction $f$ est dérivable en $a$ et le nombre dérivé de $f$ en $a$, noté $f'(a)$, est le réel $L$.

***Remarque**:*

*Cela signifie que, dans la plupart des cas, une méthode pour montrer que f est dérivable en a, il faut former l'accroissement moyen et étudier sa limite*

L'égalité $f(a + h) = f(a) + h \times f'(a) + h.\epsilon(h)$ est le ***développement limité d'ordre 1*** de la fonction $f$ en $a$

## I-2-3- Dérivabilité et continuité en un point

***Propriété:***

Si une fonction $f$ est dérivable en $a$ alors elle est continue en $a$.

***Preuve:***

D'après la proposition (iii), on a:

Il existe un réel $L$ tel que $f(a+h) = f(a) + h \times f'(a) + h.\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$

On en déduit: $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

Ce qui prouve la continuité de $f$ en $a$

***IMPORTANT: La réciproque est fausse.***

***Deux contre-exemples***: 1) La fonction "valeur absolue" est continue en 0, mais, n'est pas dérivable en 0.

En effet: soit $f: x \mapsto |x|$, on a: $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$ (continuité en 0)

et $\frac{(|0+h|) - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1 & \text{si } h<0 \\ 1 & \text{si } h>0 \end{cases}$. L'accroissement moyen n'a pas de limite en 0. La fonction "valeur absolue" n'est pas dérivable en 0

2) La fonction "racine carrée" est continue en 0, mais, n'est pas dérivable en 0.

En effet: soit $f: x \mapsto \sqrt{x}$, on a: $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ (continuité en 0)

et $\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. L'accroissement moyen a une limite infinie en 0. La fonction "racine carrée" n'est pas dérivable en 0

## I-2-4- Tangente

$f$ est une fonction dérivable en $a$ et $C_f$ est la représentation graphique de $f$ dans un repère.
La droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est la tangente $T$ à $C_f$ en $A$.

On a donc: $M(x; y) \in T$ si et seulement si $\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Une équation de $T$ est alors: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

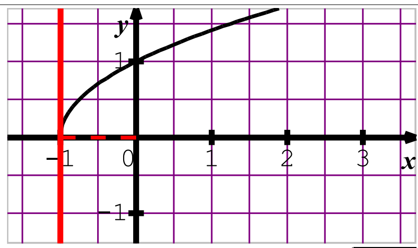
***Cas des tangentes verticales***

La tangente à $C_f$ est la position limite des sécantes $(AM)$

(voir §I-1-1).

Lorsque le point $M$ tend vers $A$, les sécantes peuvent tendre vers une position limite donnée par une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Le coefficient directeur tend vers + ou – ∞




Courbe de la fonction: $x \mapsto \sqrt{x+1}$

Si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors, la courbe $C_f$ admet une tangente en

$A(a; f(a))$parallèle à l'axe des ordonnées.

*Exemple*: La courbe représentative de la fonction "racine carrée" en $O(0; 0)$

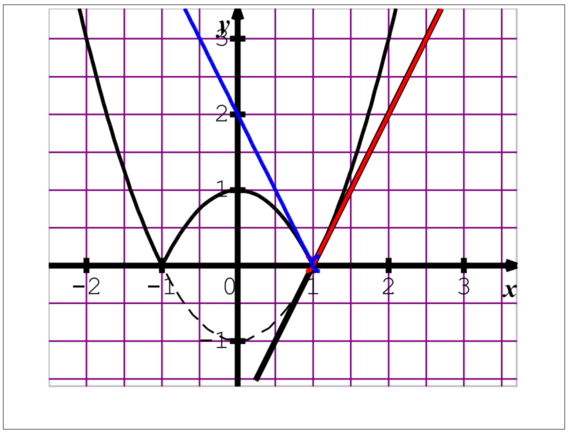
### *Cas des demi-tangentes.*

De même, $f$ peut ne pas être dérivable en $a$, mais, l'accroissement moyen a une limite finie à gauche (ou à droite). La courbe $C_f$ admet alors une demi-tangente en ce point.

Exemple: On trace la parabole d'équation $y = x^2 - 1$, puis,

on considère la fonction $f$ définie par $f$: $x \mapsto |x^2 - 1|$

La représentation de $C_f$ s'obtient en gardant la partie d'ordonnée positive de ($P$) et en symétrisant par rapport à l'axe des abscisses la partie d'ordonnée négative.




Calcul de la limite en 1 de l'accroissement moyen:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{|(1+h)^2-1|-0}{h} = \frac{|h^2+2h|}{h} = \begin{cases} h+2 \text{ si } h>0 \\ -(h+2) \text{ si } -2<h<0 \end{cases}$$

On a alors: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$ $\qquad \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -2$

La courbe $C_f$ admet deux demi-tangentes au point $A(1;0)$, l'une à droite de coefficient directeur 2, l'autre à gauche de coefficient directeur –2.

## I-2-5- Vitesse instantanée

$f$ étant une loi horaire (voir I-1-2),

la vitesse instantanée à la date $t_0$ est la limite de la vitesse moyenne $V_M(t_0) = \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ quand $h$ tend vers 0.

La vitesse instantanée est donc $v(t_0) = f'(t_0)$

## I-2-6- Approximation affine; méthode d'Euler

La fonction $h$ : $\mapsto f'(a).h + f(a)$ est l'approximation affine de $f$ en $a$.

Cela revient à prendre l'ordonnée du point d'abscisse $a + h$ sur la tangente $T$ et non sur $C_f$ pour valeur approchée de $f(a + h)$.

On a: $f(a + h) \approx f(a) + f'(a).h$

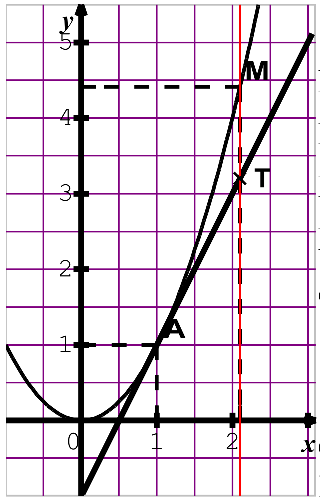
La ***méthode d'Euler*** permet de construire pas-à-pas la représentation graphique approchée de $C_f$ (ou de calculer les valeurs approchées des images) dès que l'on connaît la dérivée d'une fonction $f$ et une valeur initiale de $f$ (condition initiale: $y_0 = f(x_0)$ )

Pour un pas $h$ suffisamment petit, on construit le point $A_0(x_0; y_0)$, puis les point $A_1(x_1; y_1)$, ..., $A_n(x_n; y_n)$ où les termes des suites $(x_n)$ et $(y_n)$ vérifient: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = f(x_n) + h.f'(x_n) \end{cases}$.

Remarquer que la suite $(x_n)$ est suite arithmétique de premier terme $x_0$ et de raison $h$.

Voir activité au tableur

### *Interprétation graphique de l'égalité $f(a+h) = f(a) + h \times f'(a) + h.\epsilon(h)$*




Soit $f$ une fonction dérivable en $a$ et $C_f$ sa représentation graphique.

Le point $A(a; f(a))$

La tangente $T$ à $C_f$ en $A$ a pour équation $y = f'(a).(x-a) + f(a)$

Le point $M(a+h; f(a+h))$

Le point $T(a+h; f'(a)(a+h-a) + f(a))$

d'où, $T(a+h; f'(a).h + f(a))$ (Voir approximation affine.

$\overrightarrow{TM} \begin{pmatrix} 0 \\ f(a+h)-(f'(a).h+f(a)) \end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{TM} \begin{pmatrix} 0 \\ h.\epsilon(h) \end{pmatrix}$

On a donc $\|\overrightarrow{TM}\| = |h.\epsilon(h)|$ représente l'erreur commise en remplaçant $f(a+h)$ par la valeur approchée $f'(a).h + f(a)$

# II- FONCTION DÉRIVÉE

## *II-1- Définition et notations*

### II-1-1-Définition

Lorsque $f$ est dérivable en tout point $a$ d'un intervalle $I$, on obtient une fonction, notée $f'$ définie sur $I$ par:

$$f' : a \mapsto f'(a)$$

$f'$ est la fonction dérivée première de $f$.

### II-1-2- Dérivées successives

Si $f'$ est elle-même dérivable, sa dérivée est la dérivée seconde de $f$, notée $f''$.
Lorsque $f$ est dérivable $n$ fois, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n$-ième de $f$,
et, on définit alors, sous réserve d'existence, par récurrence, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

### II-1-3- Notations différentielles

On a aussi les notations suivantes: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ $\qquad \mathrm{d}y = f'(x).\mathrm{d}x$

Cette notation est obtenue par passage à la limite de l'accroissement moyen $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

$f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ $\qquad$ ( $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ est un opérateur dérivé qui s'applique à la fonction $f$ )

## *II-2- Dérivée des fonctions usuelles*

Voir livre page 42.

***Remarques:***

1) Une fonction est dérivable sur un **intervalle.**

Cet intervalle de dérivabilité se définit avant de dériver et non après avoir appliqué une formule de dérivation.

2) Les formules sont données à l'aide des images des fonctions, mais ne pas oublier qu'il s'agit de fonctions.

Par exemple: $f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$ doit se comprendre comme:

la dérivée de la fonction "élever au carré" est la fonction "multiplier par 2"

Dans ce tableau, $n$ est un entier naturel

| **Fonction *f*** | | **Intervalle de dérivabilité** | **Fonction dérivée *f '*** |
|---|---|---|---|
| **définie sur** | **par** | | |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto k$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto 0$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto x^n$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto n.x^{n-1}$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ | $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ | $x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}} = -n.x^{-(n+1)}$ |
| $\mathbb{R}^+$ | $x \mapsto \sqrt{x}$ | $]0; +\infty[$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto -\sin(x)$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \cos(x)$ |

***Quelques exemples de calcul:***

***Dérivée de la fonction "élever au carré"***

Pour tout réel $a$, on a: $(a+h)^2 = a^2 + (2a)h + h.h$. Comme $\lim_{h \to 0} h = 0$, d'après le (iii) de I-2-1, le nombre dérivé de la fonction carré en $a$ est $2a$ et, la fonction dérivée est la fonction $a \mapsto 2a$

***Dérivée de la fonction "inverse"***

Soit $a$ un réel non nul, on a: $\dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \dfrac{a-(a+h)}{(h.a.(a+h))} = \dfrac{-1}{a.(a+h)}$ qui a pour limite $-\dfrac{1}{a^2}$ en 0,

d'après le (i) de I-2-1, le nombre dérivé de la fonction inverse en $a$ est $-\dfrac{1}{a^2}$ et,

la fonction dérivée est la fonction $a \mapsto -\dfrac{1}{a^2}$

***Dérivée de la fonction "racine carrée"***

Soit $a$ un réel positif, on a: $\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \dfrac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ qui a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ en 0 lorsque $a > 0$ et $+\infty$ lorsque $a = 0$.

d'après le (i) de I-2-1, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, et, pour $a > 0$, le nombre dérivé de la fonction racine carrée en $a$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ et, la fonction dérivée est la fonction $a \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

## ***II-3- Opérations et dérivées***

Voir livre page 46

***Propriétés:***

Si $u$ et $v$ sont des fonctions dérivables sur le même intervalle $I$ alors les fonctions $u + v$ et $uv$ sont dérivables sur $I$ et on a: $(u + v)' = u' + v'$, et, $(uv)' = u'.v + v'.u$.

En particulier lorsqu'une des fonctions est une constante $k$, on a: $(ku)' = ku'$.

De plus, lorsque la fonction $v$ ne s'annule pas sur $I$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur $I$ et on a:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \text{ et } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

## *II-4- Dérivée de la composée de deux fonctions*

### *II-4-1- Théorème:*

Soit $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et prenant ces valeurs dans un intervalle $J$.

Soit $v$ une fonction définie et dérivable sur $J$.

La fonction $v \circ u$ est alors dérivable sur $I$, et, pour tout $x$ de $I$, on a: $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$

ou encore, $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$

***Principe de la démonstration:***

$f : I \overset{u}{\mapsto} J \overset{v}{\mapsto} \mathbb{R}$ $\qquad f = v \circ u$.

On va chercher un développement limité d'ordre 1 de $f$ (pour appliquer le (iii) du §-I-2-1.

On cherche donc: $f(a + h)$ avec $a \in I$ et $a + h \in I$.

Or, $f(a + h) = v \circ u\,(a + h) = v[u(a + h)]$

Comme $u$ est dérivable sur $I$, on sait: $u(a + h) = u(a) + h.\,u'(a) + h.\epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$

On pose $k = h.\,u'(a) + h.\epsilon(h)$

Ce nombre $k$ tend vers 0 avec $h$, et, on a alors $u(a + h) = u(a) + k$.

Ce qui permet d'écrire $f(a + h) = v(\,u(a) + k)$

On admet que $h$ peut être choisi de sorte que $u(a) + k$ est dans $J$, et, en posant $u(a) = b$,

comme $v$ est dérivable sur $J$, on sait: $v(b + k) = v(b) + k.v'(b) + k.\varphi(k)$ avec $\lim\limits_{k\to 0} \varphi(k) = 0$

En remplaçant $b$ par $u(a)$ et $k$ par $h.\,u'(a) + h.\epsilon(h)$, on a:

$f(a + h) = v(\,u(a) + k) = v(u(a)) + (h.\,u'(a) + h.\epsilon(h)).v'(u(a)) + (h.\,u'(a) + h.\epsilon(h)).\varphi(k)$

$\qquad = v(u(a)) + h.\,u'(a).v'(u(a)) + h.[\epsilon(h)).v'(u(a)) + (u'(a) + \epsilon(h))\varphi(k)]$

Ce qui est important est de remarquer que l'expression $\psi(h) = \epsilon(h)).v'(u(a)) + (u'(a) + \epsilon(h))\varphi(k)$ tend vers 0 avec $h$.

Ainsi, on obtient: $f(a + h) = f(a)) + h.\,u'(a).v'(u(a)) + h.\psi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \psi(h) = 0$

***Remarque:*** La notation différentielle permet de mettre en évidence la formule

$f : I \overset{u}{\mapsto} J \overset{v}{\mapsto} \mathbb{R}$ $\qquad f = v \circ u$.

$\quad x \mapsto u(x) = t \mapsto v(t) = y$

On a vu au §II-1-3, l'écriture différentielle $\mathrm{d}y = f'(x).\mathrm{d}x$

Comme $y = v(t)$, on a: $\mathrm{d}y = v'(t).\mathrm{d}t$ et comme $t = u(x)$, on a: $\mathrm{d}t = u'(x).\mathrm{d}x$, soit, $\mathrm{d}y = v'(t).\,u'(x).\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}y = f'(x).\mathrm{d}x$ $\qquad$ et $\qquad$ $\mathrm{d}y = v'(u(x)).\,u'(x).\mathrm{d}x$

on retrouve la formule: $f'(x) = v'(u(x)).\,u'(x)$ qu'on peut aussi présenter sous la forme: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

### *II-4-2- Encore des formules*

En appliquant le théorème précédent aux fonctions usuelles, on a: ($n$ est un entier naturel)

Soit $u$ une **fonction dérivable sur un intervalle $I$**,

$(\cos u)' = -u' \sin u$ en effet, $\cos u$ est de la forme $v \circ u$ avec $v = \cos$, ...

$(\sin u)' = u' \cos u$ même démarche avec $v = \sin$

$(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ même démarche avec $v(x) = x^n$

De plus, si $u$ ne s'annule pas sur $I$, on a:

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = (u^{-n})' = \frac{-n\,u'}{u^{n+1}} = -n\,u'\,u^{-(n+1)}$$

Lorsque $u$ est dérivable et strictement positif sur $I$, on a: $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

#### Quelques exemples:

1) $f$ est la fonction définie sur ℝ par $x \mapsto \cos(x^2+1)$

$f$ est la composée de $u : x \mapsto x^2+1$ dérivable sur ℝ, suivie de la fonction cosinus, d'où, $f$ est dérivable sur ℝ, et, pour tout $x$ réel, $f'(x) = 2x.(-\sin(x^2+1)) = -2x.\sin(x^2+1)$

2) $g$ est la fonction définie sur $[\frac{1}{3};+\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{(3x-1)^5}$

$g$ est la composée de $u : x \mapsto (3x-1)^5$ dérivable sur ℝ, suivie de la fonction racine carrée, d'où, $g$ est dérivable lorsque $(3x-1)^5 > 0$.

$g$ est dérivable sur $]\frac{1}{3};+\infty[$

$u$ est la fonction composée de la fonction affine $x \mapsto 3x-1$ suivie de la fonction "puissance 5", d'où,
$u'(x) = 3\times5\times(x-1)^4$

et pour $x > \frac{1}{3}$, $f'(x) = \dfrac{15(3x-1)^4}{2\sqrt{(3x-1)^5}}$

Cela ne veut pas dire que $g$ n'est pas dérivable en $\frac{1}{3}$, mais, qu'on ne peut pas appliquer le théorème du §II-4-2 en $\frac{1}{3}$.

Pour étudier la dérivabilité de $g$ en $\frac{1}{3}$, on forme l'accroissement moyen de $g$ en $\frac{1}{3}$ et on étudie sa limite en 0.

Soit $h > 0$, $\dfrac{g\left(\frac{1}{3}+h\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)}{h} = \dfrac{\sqrt{(1+3h-1)^5}-0}{h} = \dfrac{(3h)^2.\sqrt{3h}}{h} = 9h.\sqrt{3h}$ qui tend vers 0avec $h$.

$g$ est donc dérivable en $\frac{1}{3}$ et $g'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

## III- APPLICATIONS

### *III-1- Dérivée et sens de variation*

***Théorème:***

$f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Si la dérivée $f'$ est nulle sur $I$, alors $f$ est une fonction constante sur $I$.
Si la dérivée $f'$ est strictement positive sur $I$, sauf pour des valeurs discrètes[(1)] où elle s'annule, alors $f$ est une

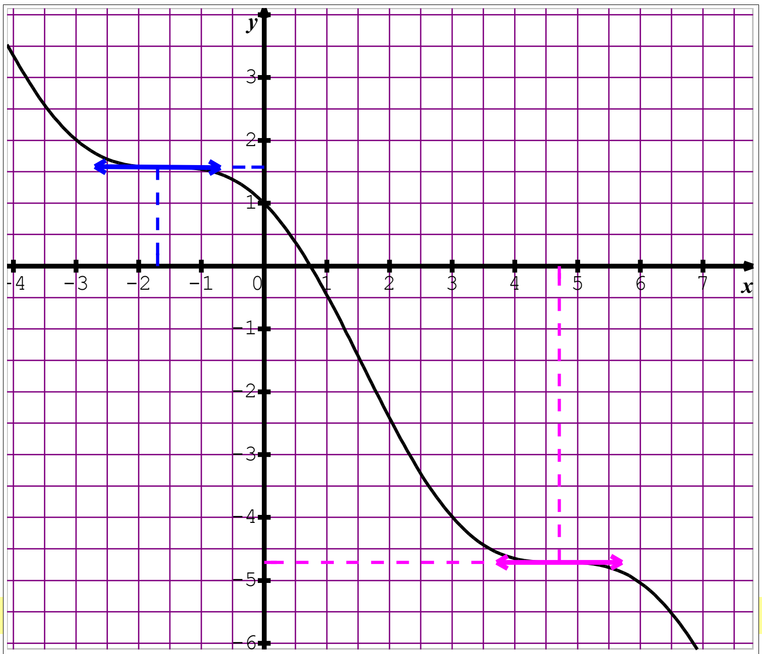
fonction strictement croissante sur $I$.
Si la dérivée $f'$ est strictement négative sur $I$, sauf pour des valeurs discrètes(1) où elle s'annule, alors $f$ est une fonction strictement décroissante sur $I$.

*Discret: Composé d'éléments discontinus, séparés (par opposition à continu)*
*On peut faire une liste en prenant les éléments un à un, alors que dire que $f'$ s'annule sur un intervalle, il n'est pas possible de dresser une liste d'éléments un à un. $f'$ s'annule en continu sur l'intervalle*

***Exemple***: $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x - x$.
$f$ est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x$ réel, $f'(x) = -\sin x - 1$
Comme $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, on a: $-1 \leqslant -\sin x \leqslant 1$, puis, $-2 \leqslant -\sin x - 1 \leqslant 0$
La dérivée s'annule pour une infinité de valeurs mais jamais sur un intervalle.
$f'(x) = 0$ si et seulement si

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$$

et pour $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$ , $f'(x) < 0$.
La fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



Représentation de $x \mapsto \cos x - x$

## *III-2- Dérivée et limites*

Lorsque ***f* est dérivable en *a*** et que l'on sait calculer la dérivée $f'$ sur $I$, alors on peut déterminer la limite de $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand $h$ tend vers 0 ou de $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ quand $x$ tend vers $a$.

Quelques exemples:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ On considère la fonction $f = \sin$ et on remarque $\sin(0) = 0$

On sait que $\sin' = \cos$

Comme $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$, on a: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ On considère la fonction $f = \sqrt{\ }$ et on remarque $\sqrt{4} = 2$

On sait que $(\sqrt{\ })' = \dfrac{1}{2\sqrt{\ }}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = (\sqrt{\ })'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

3) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi}$ On considère la fonction $f = \sin$ et on remarque $\sin(\pi) = 0$

On sait que $\sin' = \cos$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)-\sin(\pi)}{x-\pi} = (\sin)'(\pi) = \cos(\pi) = -1$$

4) $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}$

Comme cos(0) = 1, on reconnaît la limite de l'accroissement moyen de la fonction cosinus en 0.

Or, la fonction cosinus est dérivable sur ℝ et (cos)′ = – sin

On a donc: $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = (\cos)'(0) = -\sin(0) = 0$

## *III-3- Primitives*

***Définition***:

Une **primitive** d'une fonction *f* définie sur un intervalle *I* est une fonction *F* dérivable sur *I* telle que la dérivée de *F* est égale à la fonction *f*.

Pour tout *x* de *I*, $F'(x) = f(x)$

***Propriétés:***

1) Une condition suffisante pour qu'une fonction *f* admette des primitives sur un intervalle *I* est qu'elle y soit continue.

*La preuve sera apportée dans le chapitre sur le calcul intégral*

2) a) Si une fonction *f* admet une primitive sur un intervalle, elle en admet une infinité qui diffèrent d'une constante :
b) si $F_1$ et $F_2$ sont deux primitives de *f*, alors il existe un réel *k* tel que $F_2 = F_1 + k$

3) Si *f* est une fonction admettant une primitive *F* sur un intervalle *I*, alors pour tout réel *k*, une primitive de *kf* sur l'intervalle *I* est *kF*.

4) Si *F* et *G* sont des primitives respectives de deux fonctions *f* et *g*, alors une primitive de *f*+*g* est *F*+*G*.

***Preuves:***

2a) Soit *F* une primitive de *f*. La fonction $G = F + k$ où $k \in \mathbb{R}$ a pour dérivée: $G' = F' + 0 = f$

2b) $F_1$ et $F_2$ étant des primitives de *f*, on a: $(F_1)' = f$ et $(F_2)' = f$, d'où, $(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0$

Par conséquent, la fonction $F_2 - F_1 = k$ où $k \in \mathbb{R}$

3) et 4) évident

Exemple

Soit $f : x \mapsto \cos(2x)$

Les primitives de *f* sont les fonctions: $F : \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x) + k$