Table des matières

Préliminaire: en pratique, pour les fonctions à étudier en exercice au début de l'année, on utilisera les théorèmes de première sur limites et opérations de fonctions.

1- Limites en l'infini- Asymptotes

1-1- Limite finie en l'infini

1-1-1- Définition

f est une fonction numérique définie sur $[\alpha;+\infty[$.

Dire que la fonction *f* a pour limite *l* en +∞ signifie que tout intervalle ouvert contenant *l* contient toutes les valeurs *f* (*x*) dès que *x* est suffisamment grand.
ou encore:
Soit *I* un intervalle ouvert contenant *l*.
Il existe x_0 dans [α;+∞[tel que $x>x_0$ implique $f(x) \in I$

On écrit: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

1-1-2- Interprétation graphique:

Dans un repère, la droite d'équation $y=l$ est **asymptote** (horizontale) à la courbe représentative C_f de *f*.
On peut écrire $f(x)=l+\phi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x)=0$

illustration avec GeoGebra

1-1-3- Exemple:

$f(x)=3-\dfrac{1}{x}$. Étude sur]0;+∞[
Soit un intervalle ouvert *I* contenant 3.
On peut trouver $n\in\mathbb{N}$ tel que $]3-10^{-n};3+10^{-n}[\ \subset I$
Or, $3-\dfrac{1}{x} \in\ ]3-10^{-n};3+10^{-n}[$ (c'est-à-dire: x>0 et $3-10^{-n}<3-\dfrac{1}{x}<3+10^{-n}$) dès que $x>10^n$
La propriété 1-1 est bien vérifiée.
Pour n'importe quel intervalle ouvert contenant 3, toutes les images par *f* des réels supérieurs à 10^n sont dans cet intervalle.
Animation

1-2- Limite infinie en l'infini

1-2-1- Définition

f est une fonction numérique définie sur [α;+∞[.
Dire que la fonction *f* a pour limite +∞ en +∞ signifie que tout intervalle ouvert]*A*;+∞[contient toutes les valeurs *f* (*x*) dès que *x* est suffisamment grand.
ou encore:
Soit *A* un réel.
Il existe x_0 dans [α;+∞[tel que $x>x_0$ implique $f(x) \in\ ]A;+\infty[$

On écrit: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

illustration avec GeoGebra
Remarque:
La limite en +∞ d'une fonction *f* est −∞ lorsque la fonction *g* définie sur l'intervalle [α;+∞[par $g(x)=-f(x)$ a pour limite +∞ en +∞.
Les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

1-2-2- Exemple:

$f(x)=x^2$ sur [0;+∞[
Soit un réel *A* strictement positif.
Si $x>\sqrt{A}$ alors $x^2>A$
La propriété 1-2 est bien vérifiée.

Tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ ($A > 0$) contient les images par *f* des réels supérieurs à $\sqrt{A}$
On a donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et aussi, $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty$

Animation

1-2-3- Asymptote (oblique)

Dans un repère, la droite d'équation $y=ax+b$ est **asymptote** (oblique) à la courbe représentative C_f de *f* en $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b) = 0$

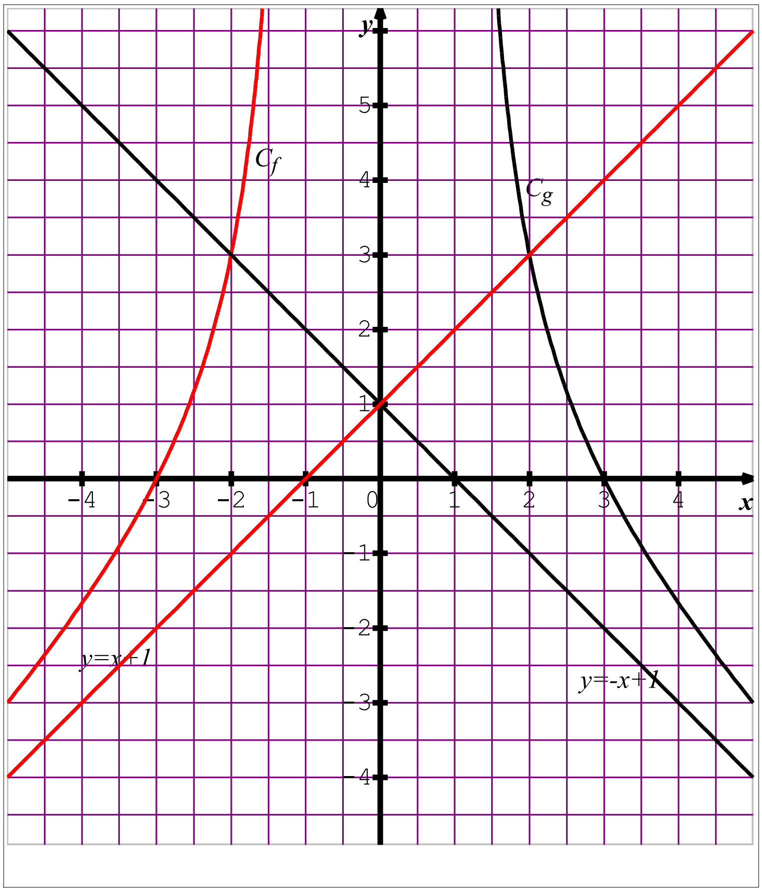
ou encore
On peut écrire $f(x)=ax+b+\phi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$
Dans $(O;\vec{i},\vec{j})$, si $M(x;ax+b)$ et $N(x;f(x))$ alors $\overrightarrow{MN} = \phi(x)\,\vec{j}$

Exemple: Soit la fonction *f* définie sur $]1;+\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{x^2+3x}{x-1}$

On peut vérifier: $f(x)=x+4+\dfrac{4}{x-1}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$, on obtient: la limite en $+\infty$ de *f* est celle de la fonction affine $x \mapsto x+4$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Dans un repère, la droite d'équation $y=x+4$ est asymptote à C_f

Remarque: les définitions sont données lorsque x tend vers $+\infty$.
Si *f* est une fonction définie sur $]-\infty;\alpha]$, on définit les limites en $-\infty$, en étudiant la fonction *g* définie sur $[-\alpha;+\infty[$ par $g(x)=f(-x)$ en $+\infty$.
Les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Exemple:
Soit $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$ définie sur $]-\infty;-1[$.
La fonction *g* définie par
$g(x)=f(-x)=\dfrac{x^2-2x-3}{-x+1}$ est définie lorsque
$-x \in]-\infty;-1[$, soit, $x \in]1;+\infty[$
On peut vérifier: $g(x)=-x+1-\dfrac{4}{-x+1}$ et comme
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{-x+1} = 0$, on en déduit:
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et la droite d'équation $y=-x+1$ est asymptote à C_g en $+\infty$.
Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, il vient: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à C_f en $-\infty$.



2- Limites d'une fonction en *a* où *a* ∈ ℝ

Dans ce paragraphe, *f* est une fonction définie au voisinage de *a*
C'est-à-dire que *f* est définie sur des intervalles tels que *a* est un élément de cet intervalle ou une borne ouverte de cet intervalle.

2-1- Limite infinie en a

2-1-1- Définition

f est une fonction numérique définie sur un voisinage *D* de *a*.
Dire que la fonction *f* a pour limite $+\infty$ en *a* signifie que $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut dès que *x* est suffisamment proche de *a*
ou encore:
Soit *A* un réel.
Il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $x \in D$ et $|x-a|<\epsilon$ implique $f(x) > A$.

On écrit: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

2-1-2- Interprétation graphique:

Dans un repère, la droite d'équation $x=a$ est **asymptote** (verticale) à la courbe représentative C_f de *f*.
illustration avec GeoGebra

2-1-3- Exemple:

f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$
Soit *A* un réel strictement positif.
En prenant $1<x<1+\dfrac{1}{A}$ $\left(0<x-1<\dfrac{1}{A}\right)$, on a: $\dfrac{1}{x-1}>A$
La propriété 1-2 est bien vérifiée.

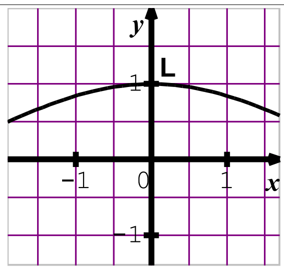
Animation

(Internet)

2-2- Limite finie en a

2-2-1- Définition

f est une fonction numérique définie sur un voisinage *D* de *a*.
Dire que la fonction *f* a pour limite *l* en *a* signifie que $f(x)$ peut être rendu aussi proche de *l* dès que *x* est suffisamment proche de *a*
On écrit: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
illustration avec GeoGebra



Courbe représentative de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$

2-2-2-Interprétation graphique:

Les points de la courbe C_f sont de plus en plus près du point $L(a;l)$. Ce point n'est pas un point de C_f lorsque *f* n'est pas définie en *a*.

2-2-3-Exemple:

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$ définie par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$;

on peut démontrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ (résultat à connaître)

Comme f n'est pas définie en 0, il n'existe pas de point d'abscisse 0 sur C_f.

IMPORTANT:

Si f admet une limite en a alors cette limite est unique

Si f admet une limite en a **et si *f* est définie en *a*** alors cette limite est $f(a)$

Droites asymptotes (Résumé)

La variable tend vers l'infini

C_f est la courbe représentative d'une fonction définie sur $[A;+\infty[$ (ou sur $]-\infty, A]$)

Δ est la droite d'équation $y = ax + b$

Δ est une droite asymptote à C_f si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$)

Le cas où Δ est parallèle à l'axe des abscisses correspond à a = 0

La variable tend vers un réel a

C_f est la courbe représentative d'une fonction définie sur un intervalle **ouvert en *a*** ou une réunion d'intervalles **ouverts en *a*.**

Δ est la droite d'équation $x = a$

Δ est une droite asymptote à C_f si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$.

3- Théorèmes de comparaisons. théorème des gendarmes

Dans ce paragraphe: ω représente un réel ou l'infini.

3-1- Théorème (des gendarmes)

Si, sur un voisinage de ω, $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{\omega} f=\lim\limits_{\omega} h=l$ alors $\lim\limits_{\omega} g=l$

Démonstration avec $\omega = +\infty$

"Traduction" des différentes conditions:

Soit I un intervalle contenant l.

condition 1: "sur un voisinage de $+\infty$, $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ "

signifie qu'il existe un réel x_1 tel que $x\in[x_1;+\infty[$ implique $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$

condition 2: $\lim\limits_{+\infty} f=l$ signifie qu'il existe un réel x_2 tel que $x>x_2$ implique $f(x)\in I$

condition 3: $\lim\limits_{+\infty} h=l$ signifie qu'il existe un réel x_3 tel que $x>x_3$ implique $h(x)\in I$

Choisissons un réel x_4 supérieur ou égal aux trois réels x_1, x_2 et x_3 ($x_4=\sup\{x_1;x_2;x_3\}$)

On a alors: si $x>x_4$ alors $x>x_2$ et $f(x)\in I$ *(i)*

si $x>x_4$ alors $x>x_3$ et $h(x)\in I$ *(ii)*

Or, on a aussi, si $x > x_4$ alors $x > x_1$ et $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *(iii)*

Finalement: si $x > x_4$ alors, d'après (i), (ii) et (iii), $g(x) \in I$

Ce qui prouve: $\lim\limits_{+\infty} g = l$ *(voir définition du paragraphe 1-1)*

3-2- Les autres théorèmes de comparaison:

Si, sur un voisinage de ω, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{\omega} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{\omega} g = +\infty$

Si, sur un voisinage de ω, $g(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{\omega} h = -\infty$ alors $\lim\limits_{\omega} g = -\infty$

Utilisation courante avec les fonctions trigonométriques associées aux fonctions polynômes.

4- Limites et opérations sur les fonctions

4-1- Somme, produit et quotient de fonctions

Voir tableau du livre et/ou cours de première

Bien comprendre la structure des énoncés: Si (P) alors (Q)

si $\lim\limits_{\omega} f = \ldots$ et si $\lim\limits_{\omega} g = \ldots$ alors

Lorsque les conditions (P) sont vérifiées alors on peut appliquer la proposition (Q)

Lorsque les tableaux indiquent ? ou "forme indéterminée" (abrégé en FI) cela signifie que l'on ne peut pas conclure et qu'il faut trouver une autre méthode (théorèmes de comparaisons et/ou transformation des écritures ...)

4-2- Limite d'une fonction composée

f est la fonction composée $v \circ u$.
f est définie lorsque u est définie **et** que les images par u sont dans l'ensemble de définition de v.
Description de la méthode:

On a le schéma suivant: $\mathbb{D}_u \to \mathbb{D}_v \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto u(x) \mapsto v(u(x)) = f(x)$$

On veut déterminer la limite en ω de f. ω est un réel fini ou l'infini

On cherche $\lim\limits_{\omega} u$ Soit $\lim\limits_{x\to\omega} u(x) = a$ (a est un réel fini ou infini)

puis $\lim\limits_{a} v$ $\lim\limits_{x\to a} v(x) = b$ (b est un réel fini ou infini)

On conclut: $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = b$

Théorème: (limite d'une fonction composée)

Soit $f = v \circ u$ (*la composition est possible*)

Si $\lim\limits_{\omega} u = a$ et si $\lim\limits_{a} v = b$ alors $\lim\limits_{\omega} f = b$

Exemple: Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$

Notons u la fonction définie par $u(x) = x^2-2x-3$ $\quad \mathbb{D}_u = \mathbb{R}$.

et v la fonction définie par $v(x) = \sqrt{x}$ $\quad \mathbb{D}_v = [0;+\infty[$.

f est donc définie sur l'ensemble $E_f = \{x/\ x \in \mathbb{R}$ et $x^2-2x-3 \geqslant 0\}$
Or, $x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$, d'où, $E_f =]-\infty; -1] \cup [3;+\infty[$
Recherche des limites aux bornes:

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x-3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x-3} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x-3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x-3} = +\infty$.

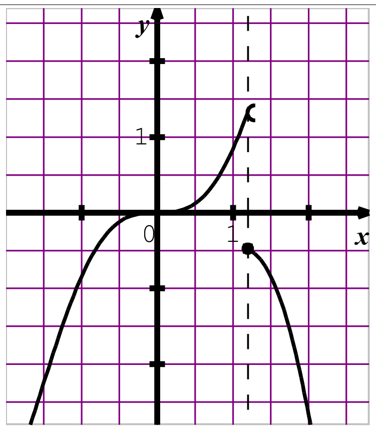
$\lim\limits_{x\to-1} x^2-2x-3 = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x} = 0$, donc, $\lim\limits_{x\to-1} \sqrt{x^2-2x-3} = 0$

$\lim\limits_{x\to3} x^2-2x-3 = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x} = 0$, donc, $\lim\limits_{x\to3} \sqrt{x^2-2x-3} = 0$

5 -Continuité

5-1- Recherche d'une définition:

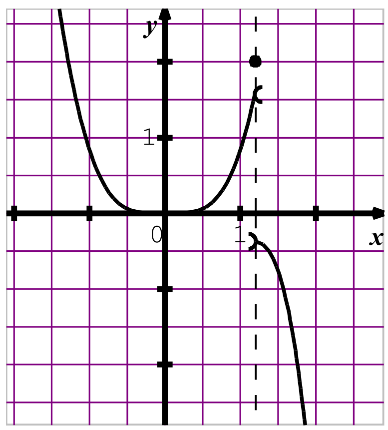
Il s'agit de traduire le fait que la courbe représentative d'une fonction peut se construire sans lever le crayon (en continu) sur un intervalle.
Soit $a \in E_f$ (C'est-à-dire que $f(a)$ existe)



Fonction définie en a, non continue en a.

Il n'y a pas de limite en a.

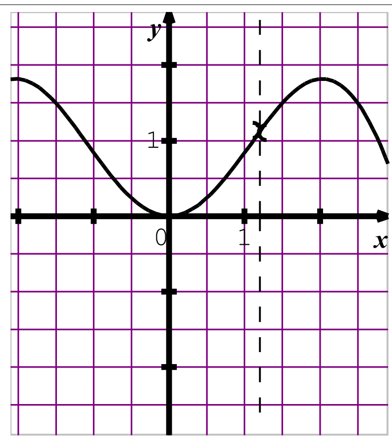
Les limites à droite et à gauche de a sont distinctes



Fonction définie en a, non continue en a.

Il n'y a pas de limite en a.

Les limites à droite et à gauche de a sont distinctes



Pour que la fonction soit continue en a, il est nécessaire que la fonction admette une limite en a et que cette limite soit $f(a)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ a<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ a>a}} f(x) = f(a)$

5-2- Définition 1: continuité en a

Dire que f est continue au point a signifie que
f est définie sur un intervalle ouvert contenant a et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Remarque: Lorsque a est la borne d'un intervalle fermé, on étudie la limite à gauche ou la limite à droite en a selon les cas.

5-3- Définition 2: continuité sur un intervalle

Dire que f est continue sur un intervalle I signifie que f est continue en tout point a de I.

5-4- Un exemple: la fonction partie entière notée E

Soit x un réel.
Il existe un entier n tel que $n \leqslant x < n+1$ (Le réel x est encadré par deux entiers ***consécutifs*** et sa partie entière est le plus petit de ces deux entiers).
$E(2{,}78) = 2$; $E(\pi) = 3$, $E(-7{,}2) = -8$, $E(5\pi) = 15$, $E(10\pi) = 31$, $E(8{,}75 + 12{,}34) = 21$
Ce dernier calcul montre que E n'est pas une fonction linéaire.
Représentation graphique de E sur $[-4; 4]$ (Sur la TI: menu MATH, NUM, int,
sur la Casio, option, num , int (OPTN->NUM *(OPTN - F6 - F4)*)

Si $-4 \leqslant x < -3$ alors $E(x) = -4$

Si $-3 \leqslant x < -2$ alors $E(x) = -3$

Si $-2 \leqslant x < -1$ alors $E(x) = -2$

Si $-1 \leqslant x < 0$ alors $E(x) = -1$

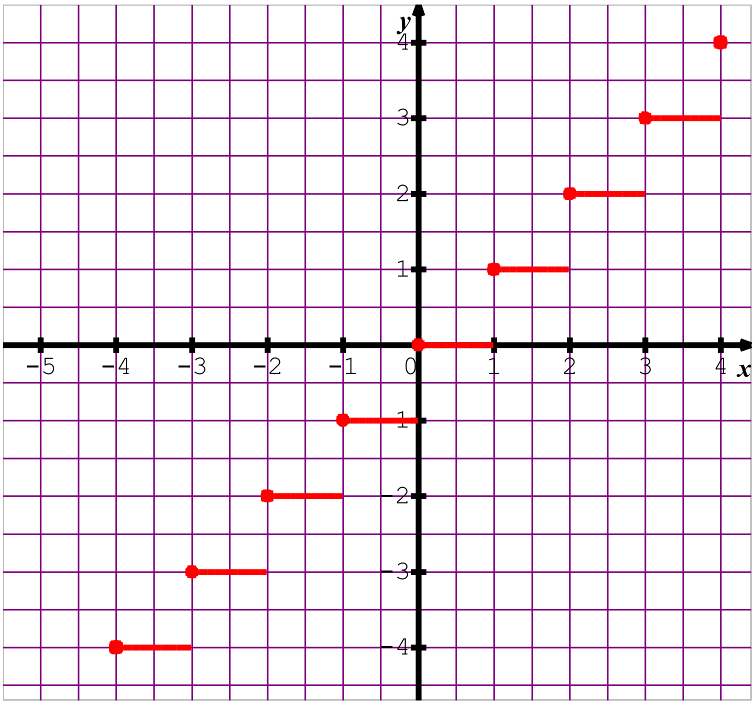
Si $0 \leqslant x < 1$ alors $E(x) = 0$

Si $1 \leqslant x < 2$ alors $E(x) = 1$

Si $2 \leqslant x < 3$ alors $E(x) = 2$

Si $3 \leqslant x < 4$ alors $E(x) = 3$

Si $x = 4$ alors $E(x) = 4$



Convention: Dans un tableau de variations, on ne coupe pas les flèches sur les intervalles où la fonction f est continue et monotone.

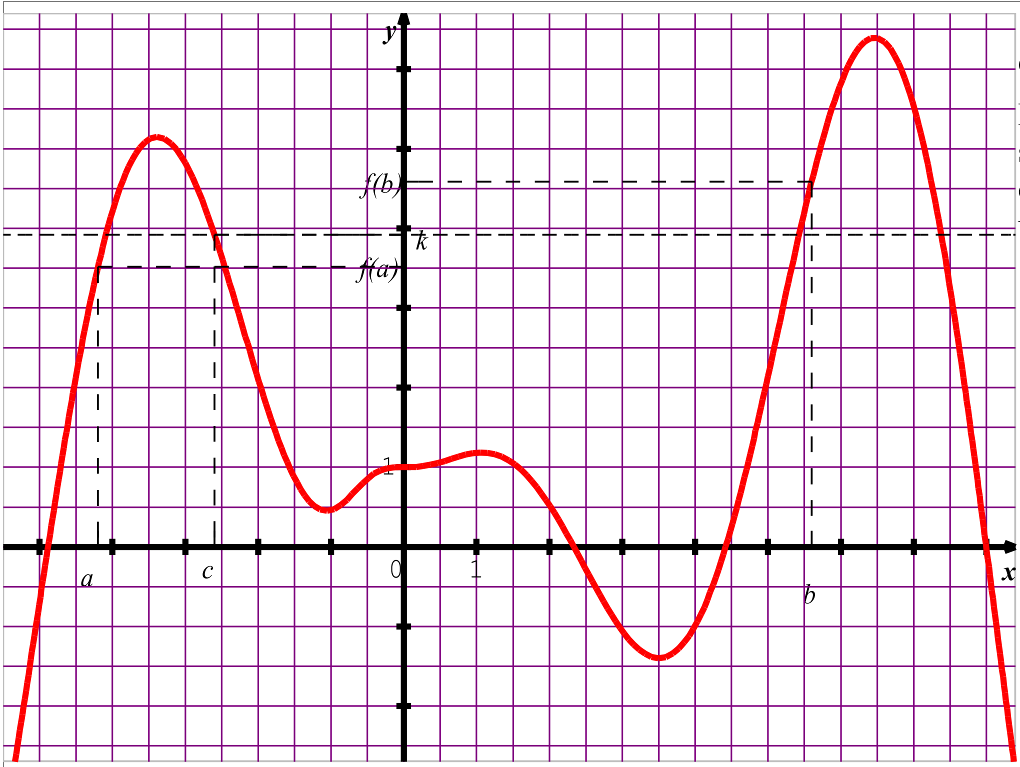
x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↘	m	↗	‖	↘	

Ce tableau représente par convention une fonction continue sur $]-\infty; 0[$, sur $]0; 3[$ et sur $]3; +\infty[$

Les fonctions de référence (fonctions polynômes, fonctions rationnelles, fonction racine carrée, fonction cosinus, fonction sinus) sont continues sur chacun des intervalles de leur ensemble de définition.

6- Théorème des valeurs intermédiaires- Bijection

6-1- Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

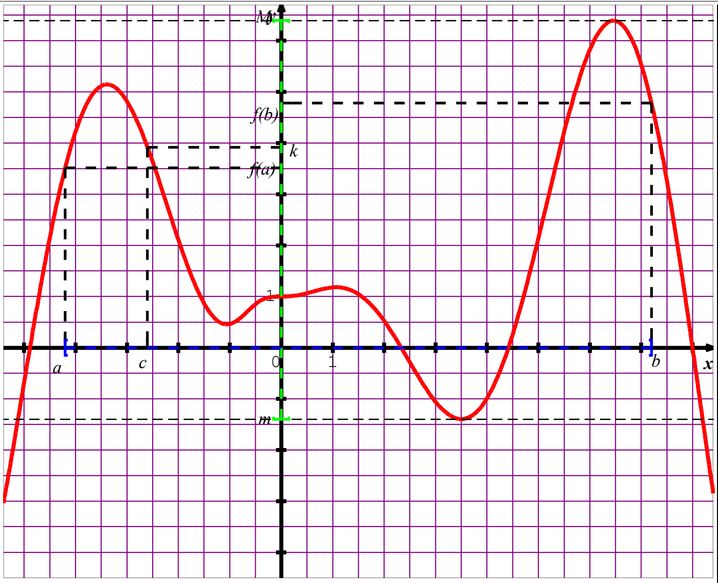


k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

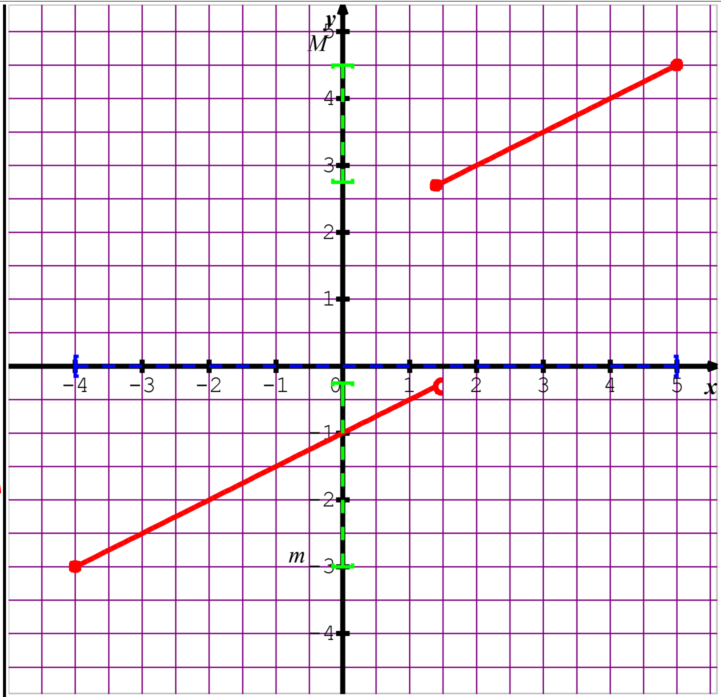
Lorsque la fonction est continue sur un intervalle, la droite d'équation $y = k$ coupe au moins une fois C_f entre a et b.

Énoncé: Si la fonction f est définie et **continue** sur un **intervalle** I.
alors, pour tous a et b de I et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins réel c de I, tel que $f(c) = k$.

Conséquence: L'image d'un intervalle $[a; b]$ par une fonction continue est un intervalle.
Cet intervalle image a pour bornes m et M où m et M sont le minimum et le maximum de f sur $[a; b]$
En effet: il existe α de $[a; b]$ tel que $f(\alpha) = m$ (le minimum de la fonction est atteint en α)
et il existe β de $[a; b]$ tel que $f(\beta) = M$ (le maximum de la fonction est atteint en β)
Tout réel k de $[m; M]$ a au moins un antécédent dans $[a; b]$.
L'intervalle $[m; M]$ est entièrement décrit par les images de f.
Lorsque la fonction f est définie et non continue, il peut exister des réels de l'intervalle $[m; M]$ qui ne sont pas images par f .



Fonction continue: L'**intervalle** $[a; b]$ (en bleu) a pour image par f l'**intervalle** $[m; M]$ (en vert)



Fonction non continue: L'intervalle $[a; b]$ en bleu n'a pas pour image un intervalle, mais une réunion d'intervalles disjoints (en vert).

6-2 théorème de la bijection

6-2-1 qu'est-ce qu'une bijection?

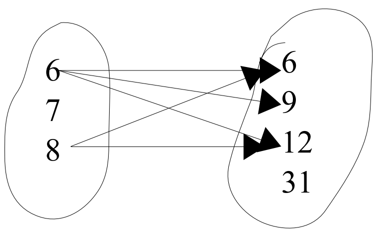
Soient deux ensembles E et F .

On peut mettre en **relation l**es éléments de E vers les éléments F (par exemple être inférieur dans des ensembles numériques, avoir un diviseur commun autre que 1 dans des sous-ensembles d'entiers naturels). Un élément de E peut être mis en relation avec plusieurs éléments de F. Certains éléments ne sont pas en relation.

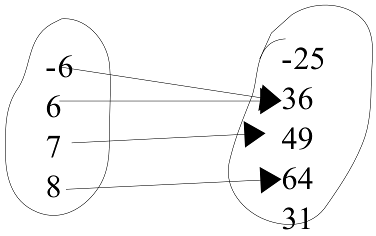
Lorsque cette relation est une **fonction** (avec la définition donnée en classe de seconde), les éléments de E ont tous un et un seul correspondant (appelé ***image***) dans F. Un élément de F n'est pas nécessairement atteint et un élément de F peut être en correspondance avec plusieurs éléments (***antécédents***) de E.

On dit que cette fonction est une **bijection** lorsque tout élément de F a un et un seul antécédent dans E. En ce cas, la fonction f définie de E dans F admet une fonction ***réciproque*** notée f^{-1} de F dans E et on a les équivalences suivantes.

On a l'équivalence suivante: $x \in E, y \in F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

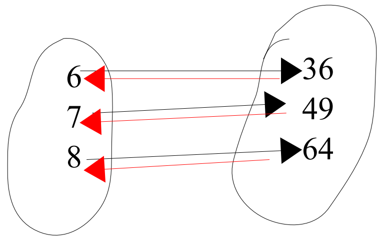


"... a un diviseur commun autre que 1 avec ... " (ce n'est pas une fonction)



" ..a pour carré ...".

C'est une fonction non bijective



Une bijection: En noir le sens direct. En rouge, la réciproque

Quelques exemples:

*** la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas une bijection

*** la fonction $g : x \mapsto x^2$ définie de $[0; +\infty[$ dans $[0;+\infty[$ est une bijection et la bijection réciproque est la fonction $g^{-1} = \sqrt{\ }$ définie de de $[0; +\infty[$ dans $[0;+\infty[$

*** la fonction $h : x \mapsto x^2$ définie de $]-\infty;0]$ dans $[0;+\infty[$ est une bijection et la bijection réciproque est la fonction $h^{-1} = -\sqrt{\ }$ définie de de $[0; +\infty[$ dans $]-\infty;0]$

*** La fonction inv: $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ est une bijection et la bijection réciproque $\mathrm{inv}^{-1} = \mathrm{inv}$ définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

*** La fonction $k : x \mapsto 2x + 1$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et la bijection réciproque est la fonction k^{-1} définie par $k^{-1} : x \mapsto \dfrac{x-1}{2}$. En effet: $2x + 1 = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y-1}{2}$ (à un réel, on associe ce réel – 1, le tout divisé par 2)

6-2-2 Énoncé du théorème de la bijection

Si la fonction f est définie, **continue et strictement monotone** sur $[a; b]$ alors pour ***k*** **compris entre** $\boldsymbol{f(a)}$ **et** $\boldsymbol{f(b)}$, il existe un et un seul réel c de $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

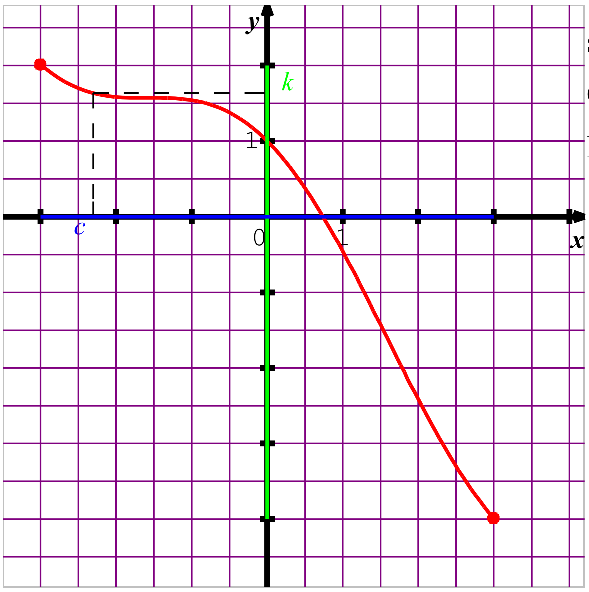
ou encore

L'équation $f(x) = k$ a une et une seule solution c dans $[a; b]$

ou encore

f réalise une bijection de $[a; b]$ sur $[f(a); f(b)]$ ou sur $[f(b); f(a)]$ selon que f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Illustration dans le cas où f est strictement décroissante:



Pour tout k de l'intervalle image (en vert), il existe un et un seul réel c antécédent.

Ce réel est l'abscisse du point d'ordonnée k de C_f.

Le réel c est l'unique solution dans $[a; b]$ de l'équation $f(x) = k$

Démonstration: *(le théorème des valeurs intermédiaires étant admis, il reste à prouver que dans le cas où la fonction est strictement monotone, le réel c est unique)*
On peut supposer que f est strictement croissante sur $[a; b]$.
On pose $g(x) = f(x) - k$ avec $f(a) < k < f(b)$
Puisque f est strictement croissante sur $[a; b]$ alors g est strictement croissante sur $[a; b]$.

On a donc: $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$, d'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c tel que $g(c) = 0$.
Soit un autre réel $c' \neq c$ tel que $g(c') = 0$
On peut toujours supposer qu'on nomme c le plus petit réel entre c et c'.
On obtient alors: $c < c'$ et $g(c) = g(c') = 0$. Ce qui contredit que g est **strictement** croissante sur $[a; b]$.
On ne peut donc pas trouver un autre réel $c' \neq c$ tel que $g(c') = 0$.

Le théorème se généralise à tous les intervalles en considérant les limites aux bornes dans le cas des intervalles ouverts.

Voir utilisation en exercices

6-2-3- Application: les racines n-ièmes d'un réel positif

Soit les fonctions f_n de $[0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$ définies par: $f_n : x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geqslant 1)$
Les fonctions f_n sont continues (polynômes), strictement croissante sur $[0;+\infty[$ (la dérivée est $x \mapsto n\ x^{n-1}$)
$I = [0;+\infty[$ et $f_n(I) = [0;+\infty[$, car, $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Les fonctions f_n réalisent donc des bijections de de $[0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$ et les bijections réciproques f_n^{-1} sont les fonctions de $[0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$, notées $\sqrt[n]{\ }$, définies par: $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$, $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$