Table des matières

Préliminaire

Quelques noms importants: Gottfried Leibniz(1646-1716), Isaac Newton (1643-1727), **Bernhard Riemann** (1826-1866), **Henri-Léon Lebesgue** (1875-1941)

Avec les aires

unité d'aire

Pour tout ce chapitre, on se situe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'aire du rectangle *OIKJ* où $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ est l'unité d'aire notée en abrégé *u.a.*

On a donc: $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 1$ *u.a.*

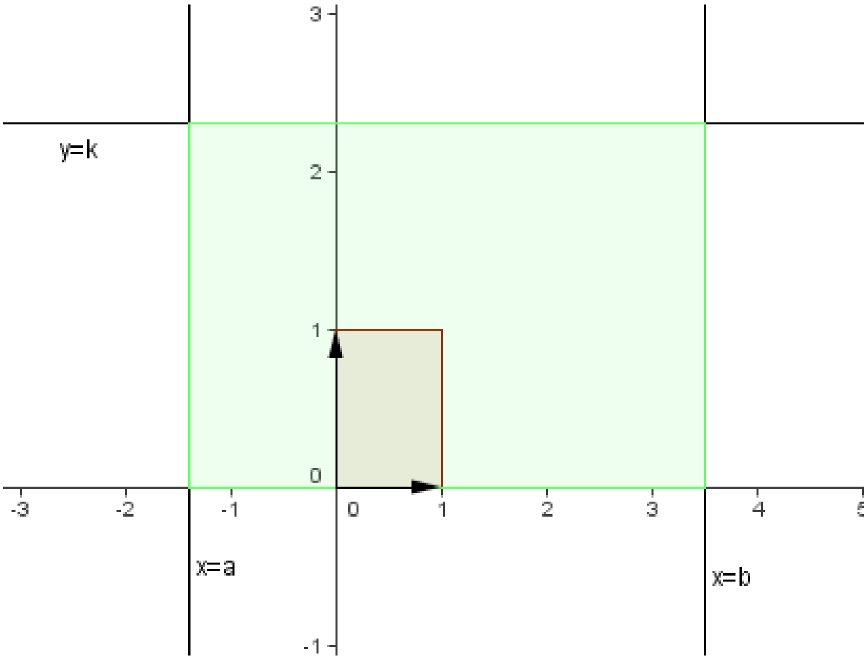
fonction constante et rectangle

Soit k un réel strictement positif. La fonction $f: x \mapsto k$ est représentée par une droite.

On considère l'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M(x; y)$ définis par $\mathscr{D} = \{M(x; y) / a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

$\mathscr{D}$ est un rectangle délimité par l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$, la droite d'équation $x = b$ et la droite d'équation $y = k$.

L'aire de $\mathscr{D}$ est $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = k.(b - a)$ *u.a*



fonction affine

f est une fonction affine définie par $f: x \mapsto mx + p$ (on suppose $m \neq 0$)

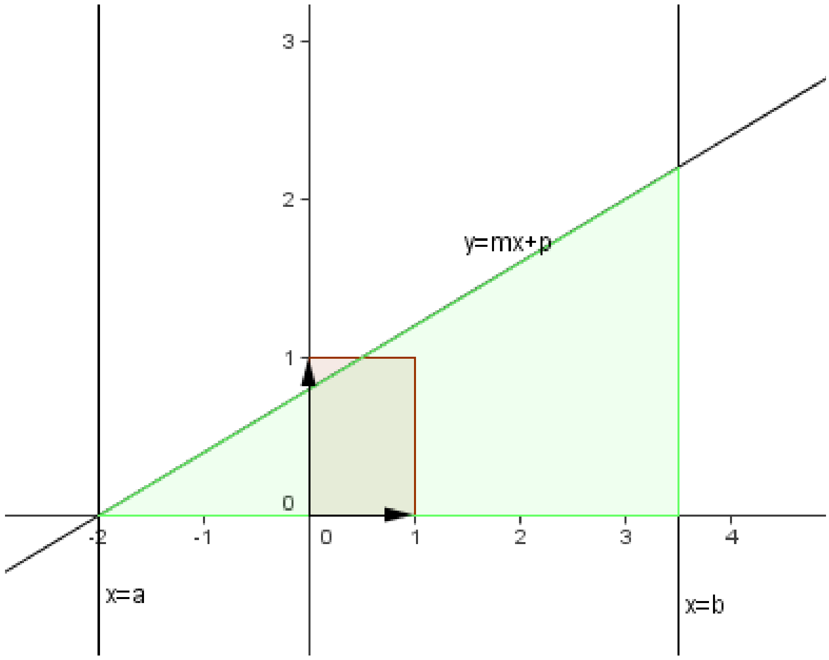
Elle est représentée par une droite qui coupe l'axe des abscisses au point $A(a; 0)$ avec $a = -\dfrac{p}{m}$

triangle

On choisit $m > 0$ et $b > a$.
On considère l'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M(x; y)$ définis par $\mathscr{D} = \{M(x; y)/ \ a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

$\mathscr{D}$ est un triangle délimité par l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = b$ et la droite d'équation $y = mx + p$.

L'aire de $\mathscr{D}$ est $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \dfrac{f(b).(b-a)}{2}\ u.a$

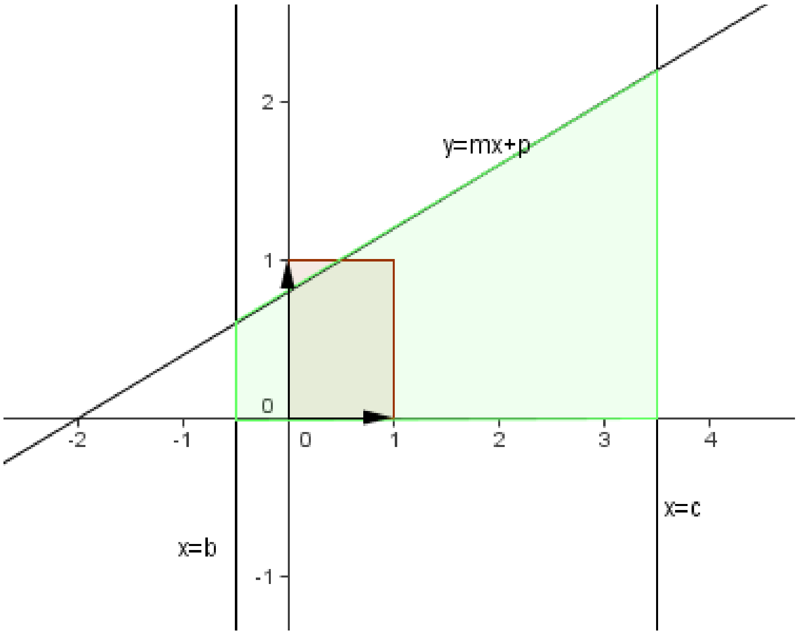


trapèze

On choisit $m > 0$ et $c > b > a$.
On considère l'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M(x; y)$ définis par $\mathscr{D} = \{M(x; y)/ \ b \leqslant x \leqslant c$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

$\mathscr{D}$ est un trapèze délimité par l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = b$, la droite d'équation $x = c$ et la droite d'équation $y = mx + p$.

L'aire de $\mathscr{D}$ est $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \dfrac{(f(b)+f(c)).(c-b)}{2}\ u.a$

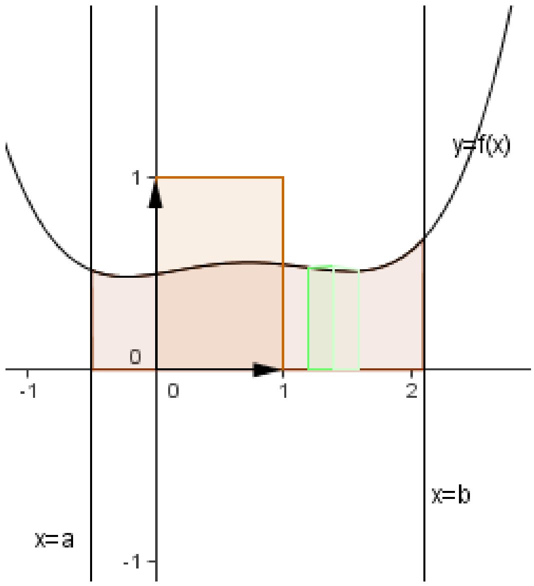


Fonction continue et positive sur [*a*, *b*]

On considère l'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M(x; y)$ définis par $\mathscr{D} = \{M(x; y) / \ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

On découpe la surface sous la courbe en éléments de plus en plus petits assimilables à des rectangles. À une abscisse x comprise entre a et b, on considère que la hauteur du rectangle est $f(x)$ et sa largeur Δx. L'aire de chaque rectangle est donc $f(x).\Delta x$

En faisant la somme des aires élémentaires, on obtient une valeur approchée de l'aire sous la courbe et plus Δx est proche de 0, plus l'erreur est faible



I- Intégrale d'une fonction sur un intervalle

I-1- Définition

* Soit f une fonction **continue et positive** sur l'intervalle $[a; b]$ (Nécessairement: $a \leqslant b$)

On appelle nombre intégral ou intégrale de f entre a et b l'aire en $u.a.$ de la surface limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

** Soit f une fonction **continue et négative** sur l'intervalle $[a; b]$ (Nécessairement: $a \leqslant b$)

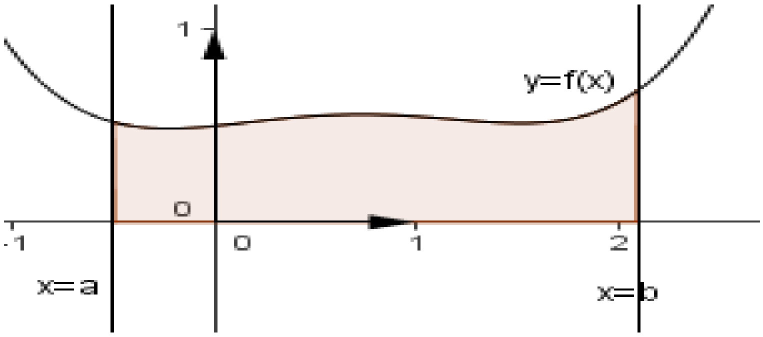
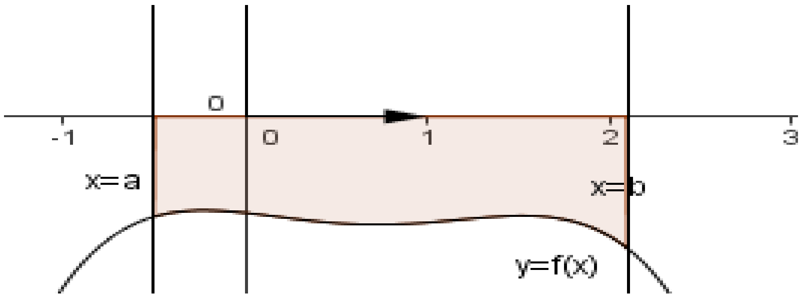
L'intégrale de f entre a et b est ***l'opposé*** de l'aire en $u.a.$ de la surface limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

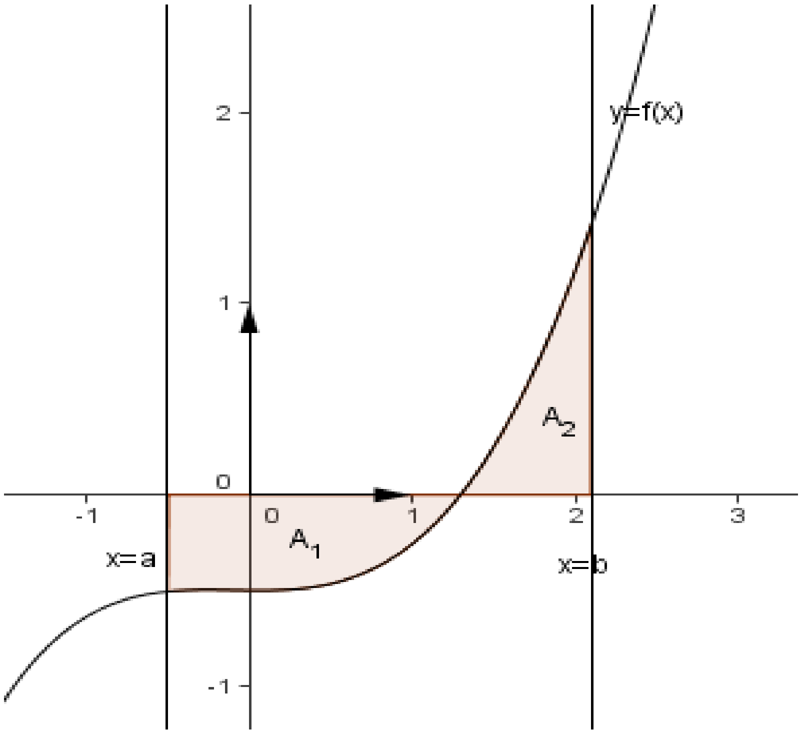
*** Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle $[a; b]$. Si f change de signe sur $[a; b]$, l'intégrale de f entre a et b est la somme des intégrales définies sur les intervalles où f garde un signe constant.

Dans tous les cas, on note: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ... (intégrale de a à b de f ou somme de a à b de f).

(Le symbole $\int$ correspond à un S stylisé pour somme).

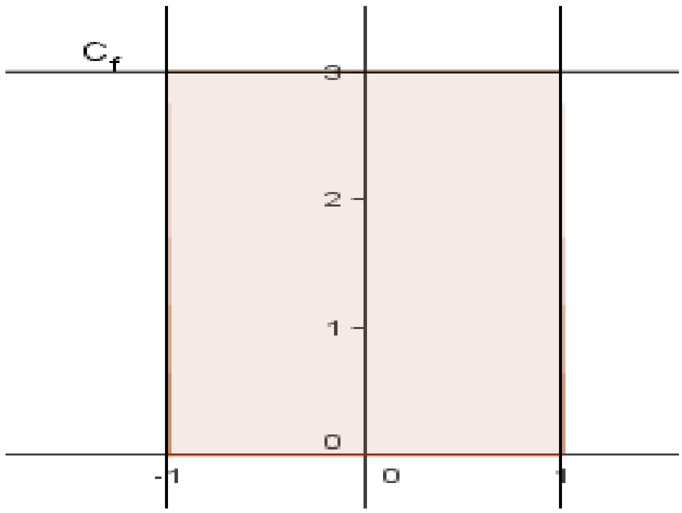
Illustrations:

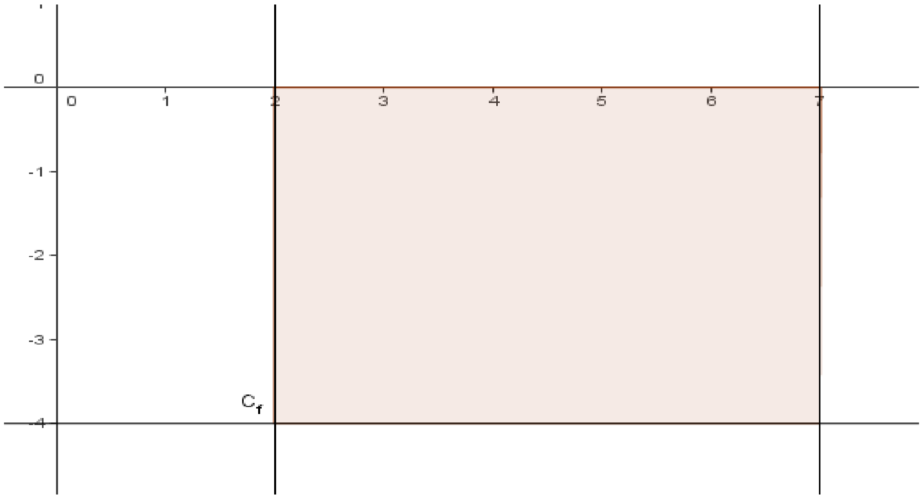
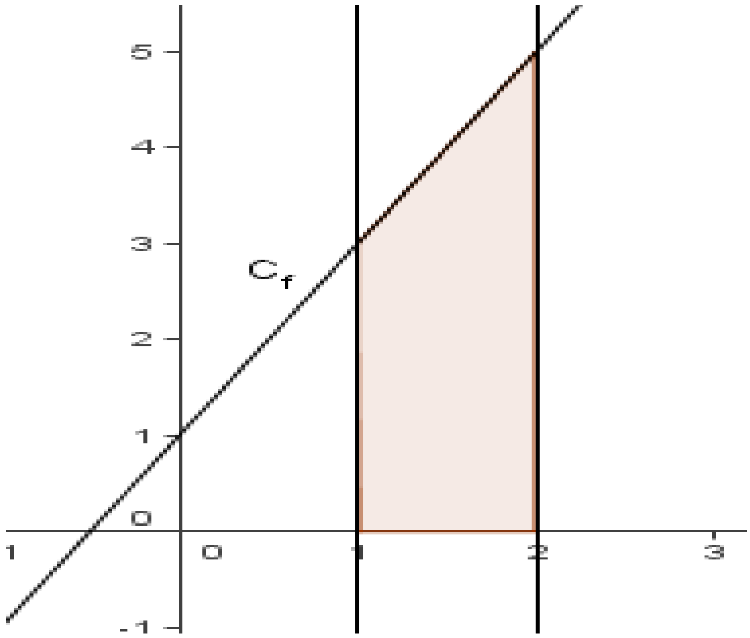
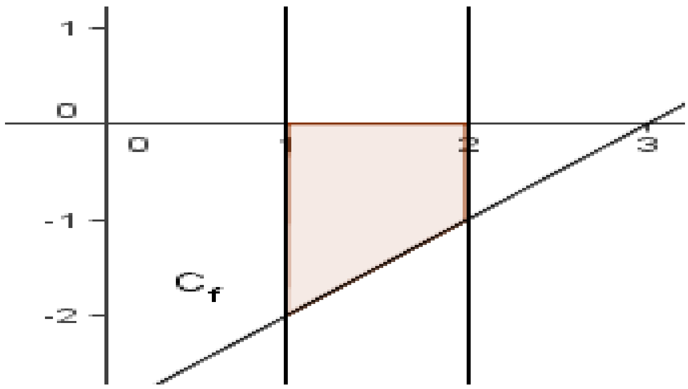
1) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire en $u.a.$ de la surface colorée d'où $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$	
2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire en $u.a.$ de la surface colorée d'où $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$	

3) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A_1+A_2$ où les A_i sont les mesures d'aires....	

Exemples

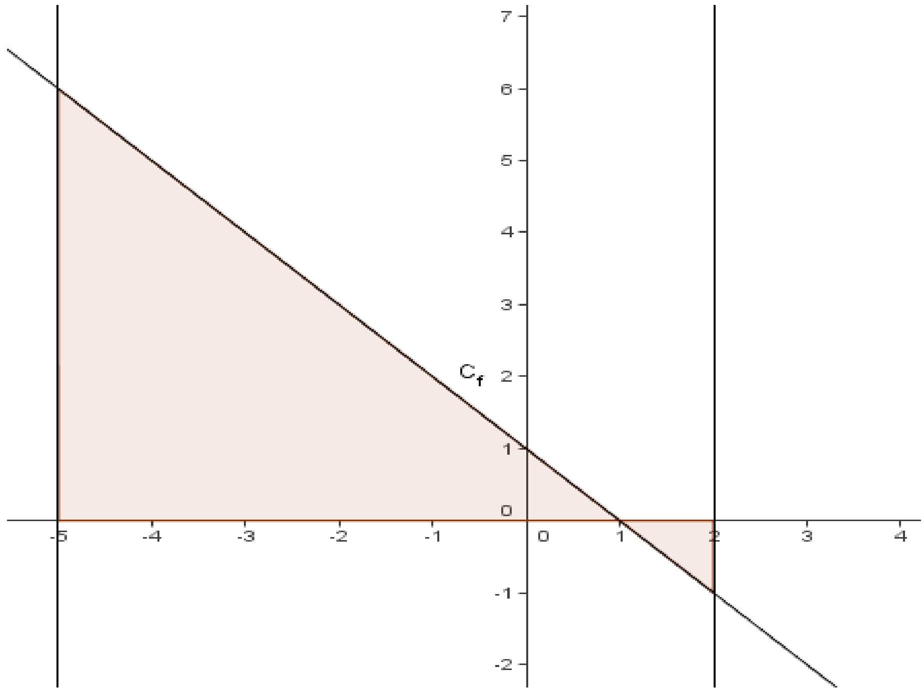
Calculer les intégrales suivantes: $\int_{-1}^{1} 3\,\mathrm{d}x$, $\int_{2}^{7} -4\,\mathrm{d}t$, $\int_{1}^{2} (2x+1)\,\mathrm{d}x$, $\int_{1}^{2} (t-3)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-5}^{2} (-x+1)\,\mathrm{d}x$

$\int_{-1}^{1} 3\,\mathrm{d}x = 6$ (un rectangle)	

$\int_{2}^{7} -4\,\mathrm{d}t = -20$ (encore un rectangle)	
$\int_{1}^{2} (2x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{3+5}{2} = 4$ (un trapèze)	
$\int_{1}^{2} (t-3)\,\mathrm{d}t = -\frac{1+2}{2} = -\frac{3}{2}$	

$\int_{-5}^{2} (-x+1)\,\mathrm{d}x =$

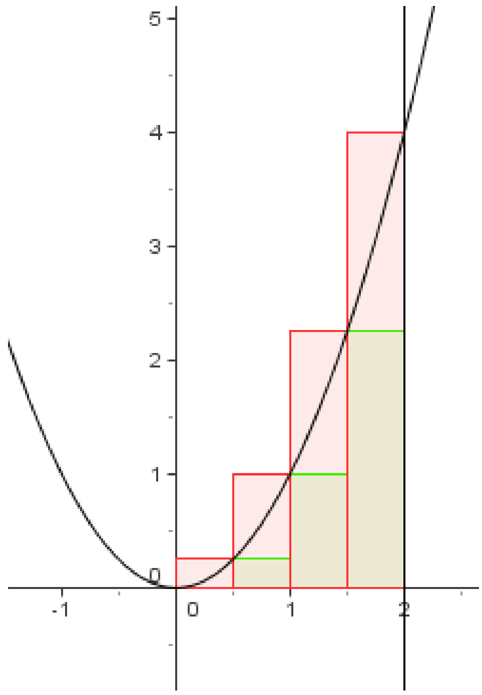
$\frac{6\times 6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$



À la façon d'Archimède (ou presque...)

Calculer $\int_{-2}^{2} t^2\,\mathrm{d}t$

Comme la fonction carré est paire (et donc la courbe symétrique par rapport à l'origine), il est évident d'après la définition que: $\int_{-2}^{2} t^2\,\mathrm{d}t = 2\times \int_{0}^{2} t^2\,\mathrm{d}t$



On divise alors l'intervalle [0; 2] en n parties égales: on a ainsi $n+1$ points d'abscisses a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$.

On a: $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{2}{n}$, $a_2 = \dfrac{4}{n}$, ..., $a_{n-1} = \dfrac{2(n-1)}{n}$ et $a_n = 2$

Les rectangles construits sous la courbe ont pour aire: $\left(\dfrac{2i}{n}\right)^2 \times \dfrac{2}{n}$ avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$

Les rectangles construits sau-dessus de la courbe ont pour aire: $\left(\dfrac{2(i+1)}{n}\right)^2 \times \dfrac{2}{n}$ avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$

On a donc: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{8i^2}{n^3} \leqslant \int_0^2 t^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{8(i+1)^2}{n^3}$

On peut démontrer (on l'admet pour cet exercice) que la somme des carrés des entiers de 1 à n est $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (*Pour la démonstration une récurrence ...*).

En factorisant $\dfrac{8}{n^3}$, on a: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{8i^2}{n^3} = \frac{8}{n^3} \times \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{8}{n^3} \times \frac{(n-1)\times n\times(2n-1)}{6} = u_n$

et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{8(i+1)^2}{n^3} = \frac{8}{n^3} \times \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = \frac{8}{n^3} \times \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6} = v_n$

Finalement: $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^2 t^2 \,\mathrm{d}t \leqslant v_n$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{8}{3}$, (quotient des termes de plus haut degré)

on a d'après le théorème des gendarmes: $\displaystyle\int_0^2 t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}$

et, $\displaystyle\int_{-2}^2 t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{16}{3}$

I-2- Valeur moyenne d'une fonction sur [a; b]

I-2-1- Définition

Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$,

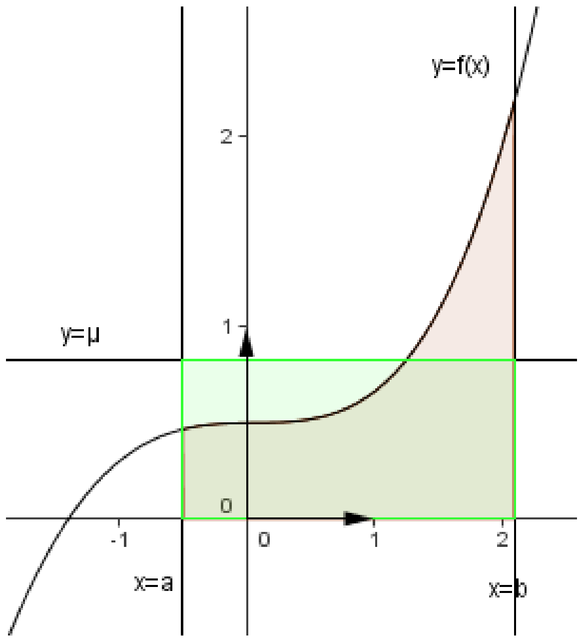
on appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque: Cette définition étend la définition d'une moyenne pondérée m. Si on considère les nombres y_i pondérés par les coefficients α_i, on a: $m = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \times \displaystyle\sum_{1}^{n} y_i \times \alpha_i$

I-2-2- Interprétation graphique

Lorsque f est une fonction ***positive ou nulle*** sur $[a; b]$, la valeur moyenne μ de f sur $[a; b]$ est la hauteur du rectangle de largeur $(b-a)$ ayant la même aire que le domaine sous la courbe.

En effet, l'aire du rectangle est $\mu(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qui est l'aire sous C_f lorsque $f \geqslant 0$ sur $[a; b]$



I-3- Propriétés

Ne pas perdre de vue le lien avec les aires lorsque les fonctions sont positives. Les propriétés sont alors évidentes.

Dans le cas général, elles se démontrent facilement à l'aide d'une primitive (paragraphe suivant)

Dans ce paragraphe f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois réels de I et k, λ et μ des constantes réelles.

I-3-1 *Relation de Chasles:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a fx\,\mathrm{d}x = 0 \text{ et } \int_b^a fx\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Illustration en termes d'aire: Lorsque f est positive ou nulle et $a \leqslant b \leqslant c$, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ de a à c est la somme des aires des domaines $\mathcal{D}_1$ de a à b et $\mathcal{D}_2$ de b à c.

I-3-2 *Linéarité de l'intégrale:*

$$\int_a^b k.f(x)\,\mathrm{d}x = k.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$ (On "sort" les constantes)

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (\lambda f(x)+\mu\, g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

I-3-3 *Positivité (Conservation de l'ordre:)*

si $a \leqslant b$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

si $a \leqslant b$ et $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Illustration en termes d'aire: Si les fonctions sont positives, l'aire du domaine sous C_f est inférieure à celle du domaine sous C_g.

I-3-4 Inégalités de la moyenne.

f étant une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ est bornée.
Il existe m et M réels tels que pour tout x de $[a; b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$,
on a alors: $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$ ou encore $m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$.
Illustration en termes d'aire: Lorsque f est positive l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est comprise entre les aires des rectangles de hauteurs m et M et de largeur $b-a$

II- Primitives et calcul intégral

Rappel du vocabulaire et des premières propriétés: voir § III- 3- du chapitre sur la dérivation.

Formulaire à construire à partir des formulaires sur la dérivation.

II-1- Propriétés

1) Toute fonction continue sur $[a; b]$ admet une intégrale sur $[a; b]$

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$.

On construit la fonction F définie sur I par: $F: x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

(ou encore: pour tout x de I, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$)

La fonction F est dérivable sur I et $F' = f$ (ou encore F est une primitive de f sur I).

3) Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

4) Si F est une primitive de f sur I alors la fonction $G = F + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f.

5) Si F et G sont deux primitives de f sur I alors $G - F$ est une constante réelle.

6) Si f admet une primitive sur I alors il existe une infinité de primitives de f sur I, et, il existe une et une seule de ces primitives prenant une valeur donnée y_0 en x_0 de I.

$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

7) Si F est une primitive de f définie sur I alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \left[F(t)\right]_a^b$

Quelques éléments de preuve: (voir aussi activité: aire sous l'hyperbole, vers le logarithme népérien)

1) 2) 3) Lorsque f est continue, positive et croissante sur un intervalle $[a, b]$,

la fonction $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de *f* qui s'annule en *a*.

En effet, par l'encadrement des aires, on a, pour tout x_0 de *I*, $f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.

Comme *f* est continue sur *I*, le théorème des gendarmes prouve que le taux d'accroissement de *F* en x_0 a pour limite $f(x_0)$.

On admet que ce résultat se généralise pour toute fonction continue.

4) Si *F* est une primitive de *f* alors $G' = (F + k)' = F' + 0 = f$.

5) Si *F* et *G* sont deux primitives de *f* alors $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. On a donc: $G - F = k$ où $k \in \mathbb{R}$.

6) Soit $A(x_0; y_0)$ et *F* une primitive de *f*. Les autres primitives de *f* sont les fonctions $G = F + k$.

Or, si $k = y_0 - F(x_0)$ (valeur fixée), on a: $G(x_0) = F(x_0) + y_0 - F(x_0) = y_0$

En particulier, $G: x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie $G(a) = 0$

7) *F* et $G: x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ étant deux primitives de *f*, on a: $G(x)= F(x) + k$. Or $G(a) = 0$, donc, $k = -F(a)$.

On a donc $G(x) = F(x) - F(a)$.

En particulier: $G(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

On note $[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

II-2- Calculer des intégrales

II-2-1- À l'aide des primitives

D'après la propriété 7) du paragraphe précédent, on a ainsi un procédé de calcul d'une intégrale dont on connaît une primitive.

Exemples: $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{16}{3}$

$$\int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^4 = \ln(4)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$$

II-2-2- Intégration par parties

u, *v* étant deux fonctions dérivables sur un intervalle *I*, telles que leurs dérivées *u'* et *v'* sont continues sur *I*.

Pour tous réels *a* et on a: $\displaystyle\int_a^b u(x).v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\,\mathrm{d}x$

Preuve:

u, *v* étant deux fonctions dérivables sur un intervalle *I*, le produit *uv* est dérivable sur I et, $(uv)' = u'v + uv'$

On a donc: $uv' = (uv)' - u'v$ (1)
Comme u' et v' sont continues sur I, les produits uv' et $u'v$ sont continues sur I et leur différence $(uv)'$ aussi.
D'autre part, une primitive de $(uv)'$ est uv, d'où, en intégrant l'égalité (1) de a à b, il vient:

$$\int_a^b u(x).v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b ((u.v)'(x) - u'(x).v(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x).v(x)\,\mathrm{d}x \text{ (linéarité de l'intégrale)}$$

et pour conclure: $\displaystyle\int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x = \left[u(x).v(x)\right]_a^b$

Remarque: l'intégration par parties (I.p.p) est souvent utilisée pour calculer des intégrales de fonctions produits d'un polynôme par une des fonctions ln, exp, cos, sin.

II-2-3- Quelques exemples de calculs

II-2-3-1- Avec les dérivées des fonctions composées

Méthode: on fait apparaître les formes $u'u^{\alpha}$ ($\alpha \neq -1$), $\dfrac{u'}{u}$, $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'.\cos(u)$, $u'.\sin(u)$, $u'e^{u}$

Dans les exemples qui suivent, f est la fonction à intégrer, F une primitive de f.

1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{3t+4}\,\mathrm{d}t$ On pose $u(t) = 3t + 4$ qui est **strictement positive** sur $[-1; 2]$. $u'(t) = 3$

On peut donc écrire $f = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'}{u}$ et $F = \dfrac{1}{3}\ln(u)$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{3t+4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\times\ln(3t+4)\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(\ln(10) - \ln(1)) = \frac{1}{3}\ln(10)$$

2) $\displaystyle\int_{-5}^{-2} \frac{1}{3t+4}\,\mathrm{d}t$ On pose $u(t) = 3t + 4$ qui est **strictement négative** sur $[-5; -2]$. $u'(t) = 3$

On peut donc écrire $f = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{-u'}{-u}$ et $F = \dfrac{1}{3}\ln(-u)$

$$\int_{-5}^{-2} \frac{1}{3t+4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\times\ln(-3t-4)\right]_{-5}^{-2} = \frac{1}{3}(\ln(2) - \ln(11)) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{11}{2}\right)$$

3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$ On pose $u(x) = \sin(x)$, d'où, $u'(x) = \cos(x)$

On peut donc écrire $f = u'.u^3$ qui a pour primitive $F = \dfrac{1}{4}u^4$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\sin^4(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = \ldots = -\frac{1}{4}$$

4) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$ On pose $u(x) = 3x + 1$ qui est **strictement positive** sur $[1; 2]$. $u'(x) = 3$

On peut donc écrire $f = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ et $F = \dfrac{2}{3}\sqrt{u}$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_{1}^{2} = \frac{2}{3}(\sqrt{7}-\sqrt{4}) = \frac{2}{3}(\sqrt{7} - 2)$$

5) $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x$ On pose $u(x) = 3x + 1$ qui est **strictement positive** sur $[1; 2]$. $u'(x) = 3$

On peut donc écrire $f = \dfrac{1}{3} \times u'\times\sqrt{u} = \dfrac{1}{3}\times u'\times (u)^{1/2}$ et $F = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times u^{3/2}$

$\int_1^2 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{9}(3x+1)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{9}\ (7\times\sqrt{7}-8)$ $\qquad$ ($7^{3/2} = \sqrt{7^3} = 7\sqrt{7}$)

6) $\int_0^1 x^2\, e^{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ On pose $u(x) = x^3-1$ $\qquad$ $u'(x) = 3x^2$

On peut donc écrire $f = \frac{1}{3}\times u'\times \mathrm{e}^{u}$ et $F = \frac{1}{3}\ \mathrm{e}^{u}$

$\int_0^1 x^2\, e^{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}e^{x^3-1}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-1}) = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{\mathrm{e}})$

II-2-3-2- Par intégration par parties

1) Un produit d'un polynôme par ln

Méthode: On dérive ln et on intègre le polynôme

$\int_1^2 (x+1).\ln(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ On pose $\begin{cases} u(x)=\ln(x) \\ v'(x)=x+1 \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v(x)=\dfrac{x^2}{2}+x \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur [1; 2] et leurs dérivées sont continues.

On peut donc appliquer le théorème d'I.p.p.

$$\int_1^2 (x+1).\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\times\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\times\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 4\ln(2) - 0 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{d}x$$

$$= 4\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}+x\right]_1^2 = 4\ln(2) - (1+2-\frac{1}{4}-1) = 4\ln(2) - \frac{7}{4}$$

2) Un produit d'un polynôme par exp (ou cos ou sin)

Méthode: On dérive le polynôme et on intègre exp (ou cos ou sin)

L'exemple qui suit mène à une double I.p.p.

$\int_0^1 x^2\, e^x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ On pose: $\begin{cases} u(x)=x^2 \\ v'(x)=\mathrm{e}^x \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(x)=2x \\ v(x)=\mathrm{e}^x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur [0; 1] et leurs dérivées sont continues.

On peut donc appliquer le théorème d'I.p.p.

$\int_0^1 x^2\, e^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\, e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 0 - 2J$ avec $J = \int_0^1 x\, e^x\,\mathrm{d}x$

Calcul de J: on pose $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\mathrm{e}^x \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\mathrm{e}^x \end{cases}$

$J = \left[x\, e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 0 - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1$

Finalement: $\int_0^1 x^2\, e^x \,\mathrm{d}\,x = \mathrm{e}-2$

II-2-3-3- Un classique

On considère les trois intégrales $I = \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$; $J = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$; $K = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$

Calculer J; $I+J$, $I+2J+K$

En déduire I et K.

Résolution

En remarquant que $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$,

on obtient: $J = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln(2) = \ln(\frac{1+\mathrm{e}}{2})$

Par linéarité de l'intégrale, on a: $I + J = \int_0^1 1\,\mathrm{d}\,x = 1$, d'où, $I = 1 - \ln(\frac{1+\mathrm{e}}{2})$

Par linéarité de l'intégrale et en remarquant que $1 + 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} = (1+\mathrm{e}^x)^2$, on a: $I + 2J + K = \int_0^1 (1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}\,x$

d'où, $I + 2J + K = \left[x+\mathrm{e}^x\right]_0^1 = 1 + \mathrm{e} - (0+1) = \mathrm{e}$

On en déduit: $K = \mathrm{e} - I - 2J = \mathrm{e} - 1 - \ln(\frac{1+\mathrm{e}}{2})$

III- Applications du calcul intégral

III-1- Pour étudier des primitives

III-1-1- Un exemple:

On note F la primitive définie sur $I =]-1;\, 1[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui s'annule en 0.

1) Écrire F en utilisant le symbole $\int$

f, étant **continue** sur $]-1;\, 1[$, on sait: $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

2) *Donner la **variation** de F sur]–1; 1[et le **signe** de F(x) selon les valeurs de x.*

Par définition, $F' = f$. Or, $f > 0$, d'où, f strictement croissante sur $]-1;\, 1[$.

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ F(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) > 0 \text{ sur }]0;\, 1[\text{ et } F(x) < 0 \text{ sur }]-1;\, 0[.$$

Pourquoi peut-on assurer que F(I) est un intervalle et que pour tout λ de F(I), l'équation $F(x) = \lambda$ *possède une unique solution* $\alpha \in I$.

F **continue** sur I, donc, $F(I)$ est un intervalle

De plus, F strictement croissante, donc, F réalise une bijection de I sur $F(I)$.

3) *On pose* $g(x)=F(x)+F(-x)$ *. Déterminer la dérivée de g. En déduire la fonction g et la* ***parité*** *de F.*
g est la somme de la fonction F et de la fonction composée $x \mapsto -x \mapsto F(-x)$
$g'(x) = f(x) + (-1)f(-x) = ... = 0$, donc, $g(x) = k$. Or, $g(0) = 0$, donc, $g(x) = 0$ et F est une fonction impaire.

4) ***Encadrement, majoration.***
Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 1$. En déduire que, si $0 \leqslant x < 1$ alors $F(x) \geqslant x$.
$-1 < x < 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x^2 \leqslant 1$
La fonction $\sqrt{\ }$ étant strictement croissante et la fonction inverse strictement décroissante sur]0; 1],
on a: $f(x) \geqslant 1$.
d'où, si $x \geqslant 0$, $\int_0^x f(t)dt \geq \int_0^x 1\,dt$. $F(x) \geqslant x$ si $x \geqslant 0$

5) Fonction composée
On pose $\phi(x) = F \circ \sin(x)$ *pour* $x \in]-\pi/2; \pi/2[$. *Calculer* ϕ' *et déterminer* ϕ.
ϕ est bien définie car si $x \in]-\pi/2; \pi/2[$ alors $\sin(x) \in I$.
ϕ est composée de fonctions dérivables. Pour $x \in]-\pi/2; \pi/2[$, $\phi'(x) = \sin'(x) \times F'(\sin(x))$
$\phi'(x) = \cos(x) \times f(\sin(x))$.
Or, $f(\sin(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \dfrac{1}{\cos(x)}$ car, $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ et $\cos(x) > 0$ sur $]-\pi/2; \pi/2[$.
Finalement: $\phi'(x) = 1$.
On en déduit: $\phi(x) = x + k$ et comme $\phi(0) = F(\sin(0)) = F(0) = 0$, il vient: $\phi(x) = x$.
Ce qui permet de calculer quelques valeurs de F.
Par exemple: $F(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, car, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$
Remarque: F est la fonction réciproque du sinus (arcsinus).

III-1-2- Un autre exemple.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $\phi(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

La fonction f: $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2+1}$ est continue sur $]0;+\infty[$, donc, elle admet des primitives sur $]0;+\infty[$.

Soit F la primitive de f qui s'annule en 1.

On a donc: Pour $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Or, $\phi(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (Relation de Chasles), et, $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^{\frac{1}{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$

$\phi(x) = F(x) - F(\frac{1}{x})$

ϕ est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et $\phi'(x) = f(x) - (-\dfrac{1}{x^2}f(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{\ln(x)}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}+1}$

Donc, $\phi'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}+1} = \dfrac{\ln(x)}{x^2+1} - \dfrac{\ln(x)}{x^2+1} = 0$

ϕ est donc une fonction constante.

Comme $\phi(0) = \int_1^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on en déduit, pour tout $x > 0$, $\phi(x) = 0$

III-2- Calcul d'aire

III-2-1- Aire entre l'axe des abscisses et la courbe représentative d'une fonction

III-2-1-1 La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses

Par définition même de l'intégrale, lorsque f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ définie par $\mathscr{D} = \{M(x; y) \,/\, a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ est $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $u.a.$

III-2-1-2 La courbe est au-dessous de l'axe des abscisses

Lorsque f est une fonction continue et négative sur $[a; b]$, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ définie par

$\mathscr{D} = \{M(x; y) \,/\, a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$ est $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$ $u.a. = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $u.a.$

C'est évident par symétrie par rapport à l'axe des abscisses

III-2-2- Aire entre deux courbes représentatives de fonctions

f et g étant deux fonctions continues sur $[a; b]$ tels que pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ définie par $\mathscr{D} = \{M(x; y) \,/\, a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ est $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$ $u.a.$

Exemple

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 1$ cm, calculer en cm^2 l'aire de la surface S comprise entre les courbes d'équation $y = x^2$, $y = x^3$ et les droites d'équation $x = -1$, $x = 2$.

Position relative des courbes: Sur $[-1; 0]$, on a: $x^3 \leqslant 0 \leqslant x^2$

Sur $[0; 1]$, on a: $x^3 \leqslant x^2$

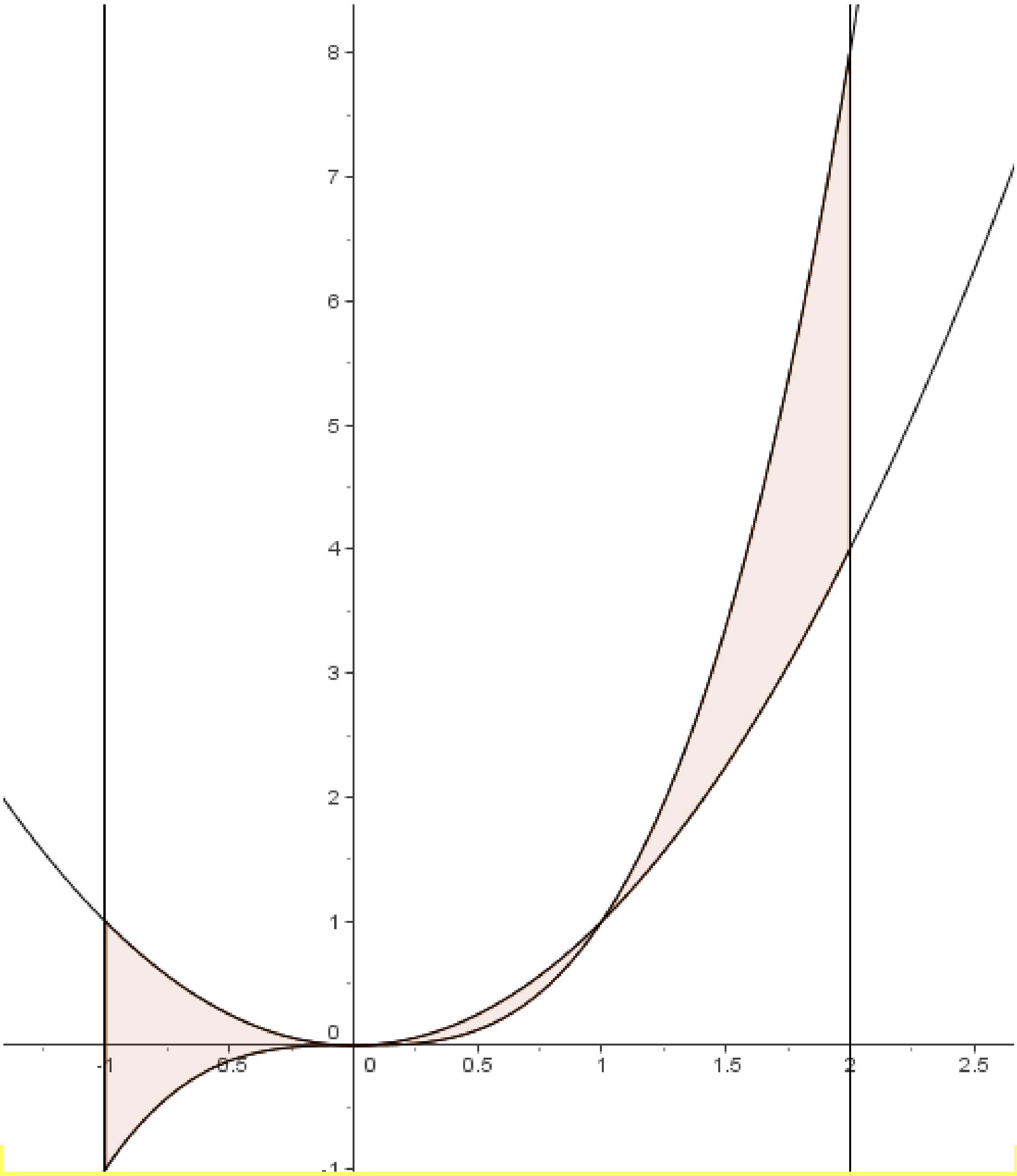
Sur $[1;2]$, on a: $x^2 \leqslant x^3$

L'aire $\mathscr{A}(S)$ cherchée est donc en $u.a.$: $\int_{-1}^{1} (x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^3 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} + \left[\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3}\right]_1^2$

$= \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} - (\dfrac{-1}{3} - \dfrac{1}{4}) + \dfrac{16}{4} - \dfrac{8}{3} - (\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3})$

$= \dfrac{4-3+4+3+48-32-3+4}{12} = \dfrac{25}{12}$ $u.a.$ En cm^2, on a: $\mathscr{A}(S)$

$= \dfrac{25}{6}\ cm^2$ (car 1 $u.a. = 2\ cm^2$)

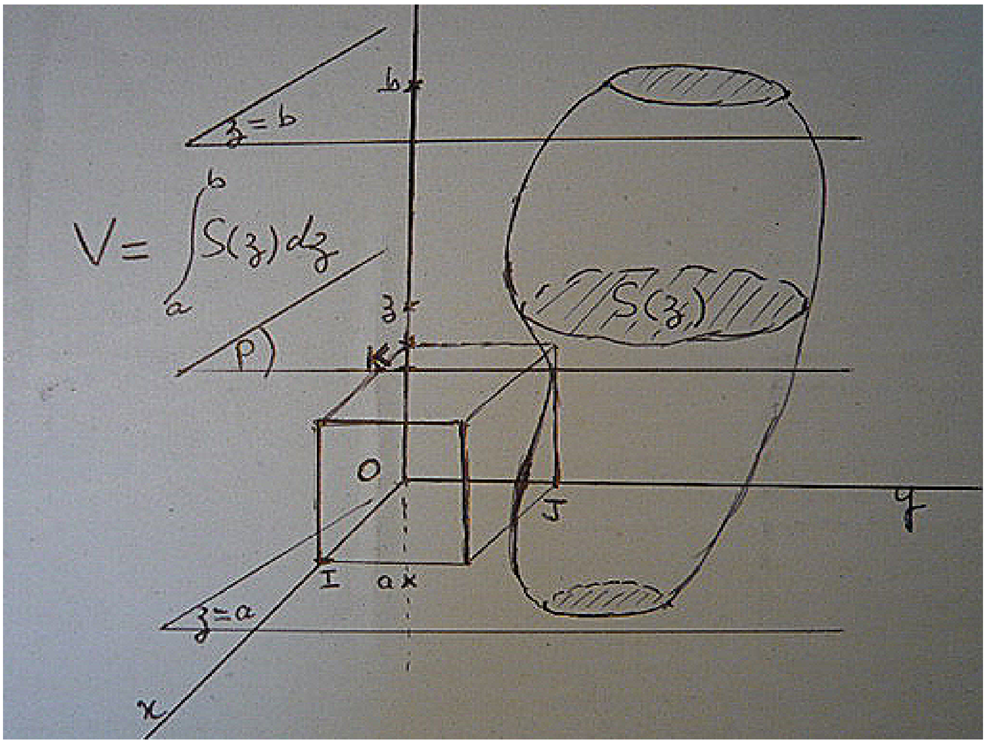


III-3- Calcul de volume

III-3-1- Expression du volume à l'aide d'une intégrale

On se place dans un repère orthogonal de l'espace (O, I, J, K)

L'unité de volume (en abrégé: $u.v.$) est le volume du parallélépipède rectangle construit sur les côtés $[OI]$, $[OJ]$, $[OK]$. 1 $u.v = OI \times OJ \times OK$.



Soit un solide tel que l'on connaît l'aire $S(z)$ en $u.a.$ de la surface Σ découpée par un plan parallèle à (xOy) pour $a \leqslant z \leqslant b$.

Si S est une fonction continue, on a: $V = \int_a^b S(z) \mathrm{d}z$

III-3-2- Exemples

III-3-2-1- Volume du cône

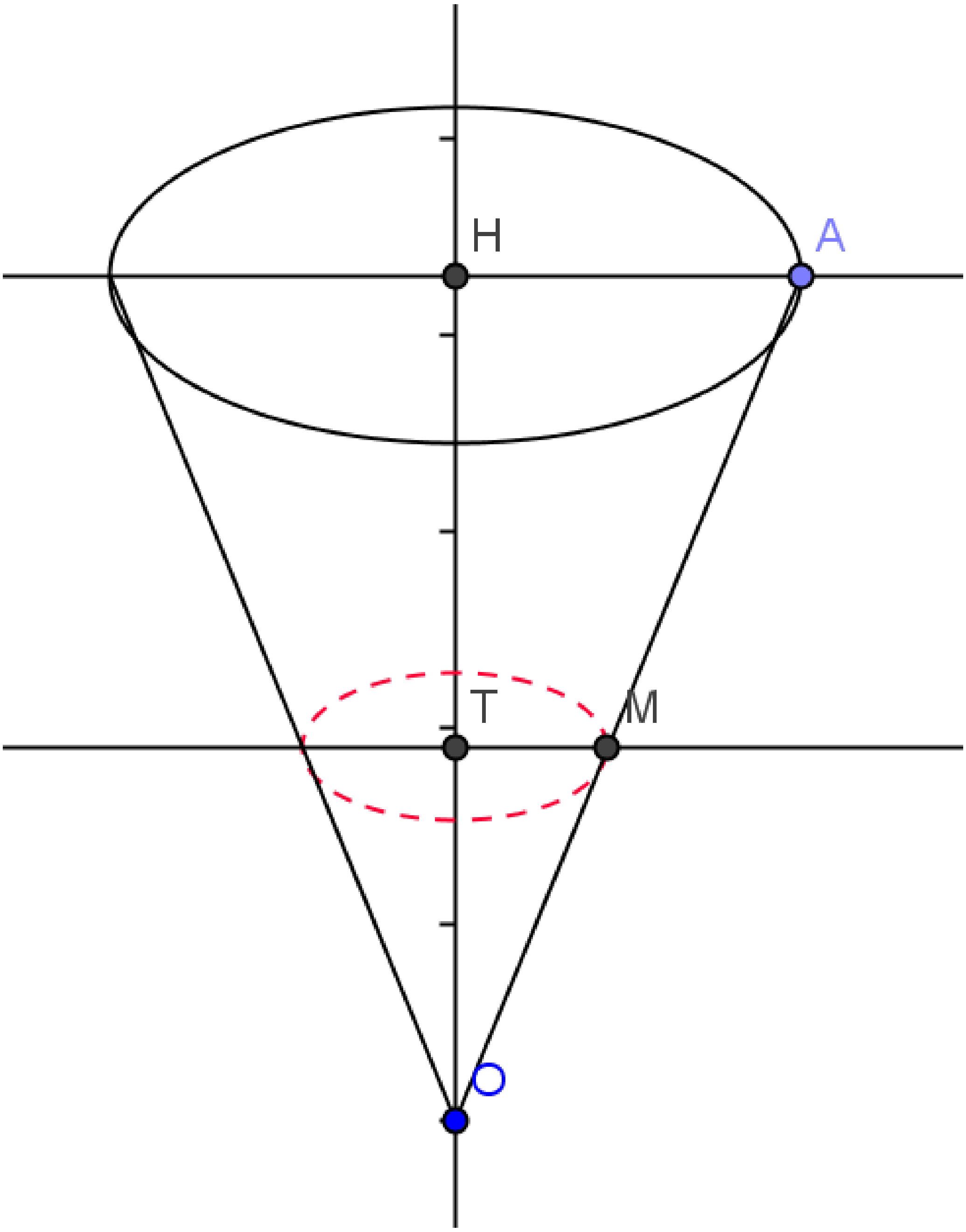
Soit un cône de disque de base centré en O de rayon R et de hauteur h.

Tout plan d'équation $z = t$ avec $0 \leqslant t \leqslant h$ coupe le cône selon un disque d'aire $S(t) = \pi \ (r(t))^2$ avec

$r(t) = \dfrac{R \times t}{h}$ (d'après Thalès)

En effet, une coupe selon un plan parallèle au plan (xOy) donne:

$\dfrac{TM}{HA} = \dfrac{OT}{OH}$ avec $TM = r(t)$, $HA = R$, $OT = t$ et $OH = h$

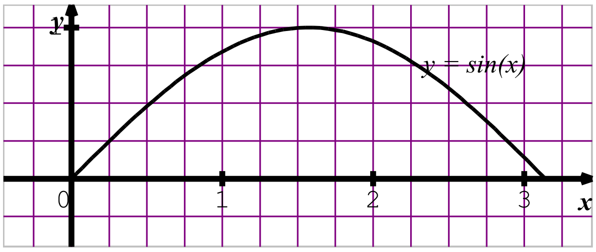


$S(t) = \pi \left(\frac{R\times t}{h}\right)^2$

d'où $V = \int_0^h S(t)\,\mathrm{d}t = \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 \int_0^h t^2\,\mathrm{d}t = \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^h = \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times h^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

III-3-2-2- Volume d'un solide engendré par révolution d'une courbe autour d'un des axes.

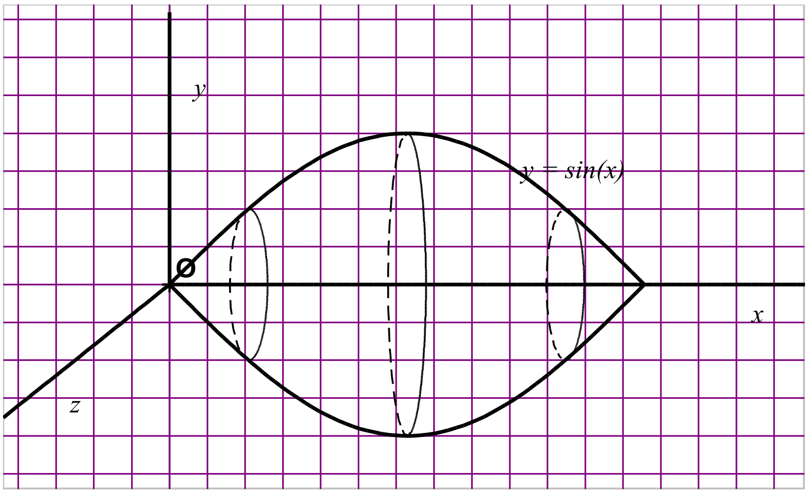
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on fait tourner l'arc de sinusoïde définie par $\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant\pi \\ y=\sin(x)\end{cases}$ autour de l'axe des abscisses $(x'x)$. On obtient ainsi un solide de révolution.



Calculer le volume de ce solide.

Soit $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Un plan perpendiculaire à l'axe des abscisses (ou encore parallèle au plan (yOz)) coupe la sinusoïde suivant un



cercle de rayon $|f(x)|$ d'aire $S(x) = \pi\,(f(x))^2 = \pi\,(\sin(x))^2$

D'où, $V = \int_0^{\pi} \pi(\sin(x))^2 \mathrm{d}\,x \quad \pi \int_0^{\pi} (\sin(x))^2 \mathrm{d}\,x$ *u.v.*

Or; $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \end{cases}$, d'où, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Finalement: $V = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2}\sin(2x) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$ *u.v.*

III- 4 Calcul de distance

Soit f une loi horaire définissant la position d'un mobile sur une trajectoire rectiligne. On sait que la dérivée de la loi horaire est la vitesse instantanée du mobile.

La distance parcourue (sans aller-retour entre temps) entre les dates t_0 et t_1 est $d = |(f(t_1) - f(t_0))|$

Si à chaque instant $t \in [a;\, b]$ on connaît la vitesse instantanée $v(t)$ avec $v(t) \geqslant 0$, on a: la distance parcourue entre les dates a et b est $d(a;\, b) = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}\,t$

IV- Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles.

Lorsque f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;\, b]$, on trouve une approximation de

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en encadrant l'aire du domaine $\mathscr{D}$ par les sommes des aires de rectangles.

On divise l'intervalle [a; b] en n intervalles de même longueur (amplitude) $\frac{b-a}{n}$.

$x_0 = a,\ x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_i = x_0 + i\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = b$

Suivant les variations de la fonction f, on encadre l'intégrale par la somme des aires: $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ et $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$ (Voir exemple de la parabole)

Cette méthode se programme facilement.

D'autres méthodes semblables font intervenir par exemple des trapèzes

V- Un exercice: intégrales et suites

Énoncé: On considère pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Quelques questions types
1) Étude des variations de la suite (I_n).
2) Encadrement de I_n et convergence de la suite (I_n).
3) Calculs de I_0, I_1, de I_{n+1} en fonction de I_n
Résolution:

1) On étudie le signe de $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t-1)t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ par linéarité

Or, $0 \leqslant t \leqslant 1$, d'où, $t-1 \leqslant 0$ et comme $t^n e^{-t} \geqslant 0$, la fonction: $(t-1)t^n e^{-t} \leqslant 0$ sur [0; 1].

Conclusion: $\int_0^1 (t-1)t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ et la suite (I_n) est donc décroissante.

ou encore: si $0 \leqslant t \leqslant 1$ alors $0 \leqslant t^{n+1} \leqslant t^n$ et comme $\mathrm{e}^{-t} > 0$, on a: $0 \leqslant t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n\,\mathrm{e}^{-t}$
Comme l'intégration conserve l'ordre, on en déduit: $I_{n+1} \leqslant I_n$.

2) Sur [0; 1], on a: $0 \leqslant t \leqslant 1$, d'où, $-1 \leqslant -t \leqslant 0$, puis: $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$
et puisque $t^n \geqslant 0$, on obtient: $\mathrm{e}^{-1}t^n \leqslant t^n\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n$

Comme l'intégration conserve l'ordre, on en déduit: $\int_0^1 (\mathrm{e}^{-1}t^n)\,\mathrm{d}t \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$

soit, $\frac{1}{\mathrm{e}}\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \left[t^{n+1}\right]_0^1$

Finalement: $\frac{1}{\mathrm{e}(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$
Le théorème des gendarmes permet de conclure que la suite (I_n) converge vers 0.

Remarque: Pour que l'encadrement permette de conclure en utilisant le théorème des gendarmes, il est important de majorer par une suite (c-à-d: fonction de n) sinon l'encadrement par une valeur fixe ne permet pas de donner la limite.
Illustration par l'encadrement qui suit: $0 \leqslant t^n \leqslant 1$, donc, $0 \leqslant t^n\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

Comme l'intégration conserve l'ordre, on en déduit: $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Or, $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$

Conclusion: $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$

la suite (I_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente, mais, il est impossible par cet encadrement de donner la limite.

3) Calculs de I_0

$I_0 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$, (fait à la question précédente)

$I_1 = \int_0^1 t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ par I.p.p. $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ d'où, $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=-\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

Les conditions de l'I.p.p. sont vérifiées, d'où, $I_1 = \left[-t\,e^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 (-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-1} + I_0 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$

I_{n+1} en fonction de I_n

$I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ par I.p.p. $\begin{cases} u(t)=t^{n+1} \\ v'(t)=\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ d'où, $\begin{cases} u'(t)=(n+1)\,t^n \\ v(t)=-\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

Les conditions de l'I.p.p. sont vérifiées, d'où,

$$I_{n+1} = \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\,t^n(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)\,I_n$$

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Ce qui permet de calculer de proche en proche:

$I_0 = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$; $I_1 = 1.I_0 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}$; $I_2 = 2I_1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 2 - \dfrac{5}{\mathrm{e}}$; $I_3 = 3I_2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 6 - \dfrac{16}{\mathrm{e}}$; ...