

Table des matières

Complexe, mais, pas compliqué.....	1
I- L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.....	2
I-1- Le plan complexe.....	2
I-2- Nombre complexe.....	2
I-2-1 Définition.....	2
I-2-2- Affixe- image.....	2
I-2-3- Partie réelle- partie imaginaire.....	3
I-2-4 Opposé- Conjugué.....	3
II- Opérations dans \mathbb{C}	3
II- 1 Somme.....	4
II-2 Produit.....	4
II-3 Inverse et quotient.....	4
Exemples et cas particuliers à repérer.....	4
II-4 Opérations et conjugués.....	4
III- Écriture trigonométrique d'un nombre complexe: Module et argument.....	5
III-1- Module d'un nombre complexe.....	5
III-2- Argument d'un nombre complexe.....	5
III-3- Écriture trigonométrique d'un nombre complexe.....	5
Résumé:.....	5
III-4- Opérations et modules, opérations et arguments.....	7
III-4-1- Modules.....	8
III-4-2- Arguments.....	8
III-4-3- Démonstrations:.....	8
III-5- Arguments et angles orientés.....	9
IV- Écriture exponentielle d'un nombre complexe, formules d'Euler.....	9
IV-1- Notation.....	9
IV-1-1- Écriture exponentielle.....	9
IV-1-2- Le cercle unité.....	10
IV-1-3- Où on retrouve les formules.....	10
IV-2- Formules d'Euler.....	10
V- Nombres complexes et géométrie.....	11
V-1- Le cercle.....	11
V-2- Parallélogrammes, rectangles, losanges, carrés,.....	11
V-3- Nombres complexes et trigonométrie.....	11
V-4- Nombres complexes et transformations.....	12
V-4-1- Translation.....	12
V-4-2- Homothétie.....	13
V-4-3- Rotation.....	15
VI- Les équations du second degré à coefficients réels dans \mathbb{C}	16

Complexe, mais, pas compliqué...

Le nombre est dit "complexe" dans le sens de composé d'"éléments simples"

Un peu d'histoire (simplifiée):

Pour résoudre des équations du troisième degré, l'italien Bombelli a l'audace au XVI ème siècle d'introduire un nombre racine carrée de -1

Euler (au XVIII ème) notera ce nombre i et ce nombre est défini par $i^2 = -1$

Entre-temps Descartes (XVII ème) les nommera nombres imaginaires.

À la fin du XVIII ème, début du XIX ème, d'autres mathématiciens comme Wiessel, Argand et Gauss (qui les appellera des nombres complexes) ont une approche géométrique de ces nombres. (Un nombre complexe est représenté par un point du plan)

On peut aussi considérer une extension des ensembles numériques munis des opérations + et \times .

Dans l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} , l'équation $x - 2 = 0$ a une solution, mais, l'équation $x + 2 = 0$ n'a pas de solution.

On symétrise alors \mathbb{N} pour l'addition (on associe à un entier naturel n un nombre appelé opposé de n et noté $-n$) et on crée l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs. ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$)

Puis si on considère par exemple l'équation $2x - 3 = 0$, elle n'a pas de solution dans \mathbb{Z} .

On symétrise alors \mathbb{Z}^* pour la multiplication (on associe à un entier relatif n un nombre appelé inverse de n et noté $\frac{1}{n}$) et on crée l'ensemble \mathbb{Q} des rationnels. ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$)

Mais, cet ensemble ne permet pas de résoudre des équations telles que $x^2 = 2$. On crée alors l'ensemble \mathbb{R} des réels. Ce sont les nombres réels. ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$)

Il reste encore quelques équations comme $x^2 = -1$ qui n'ont pas de solutions dans \mathbb{R} . L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes contient ces solutions,

et au XXI ème, les nombres complexes sont partout: Ils interviennent partout: en mathématiques évidemment: algèbre, analyse, géométrie,

mais aussi en électricité, en électronique, en musique, etc.

Ils se présentent sous différentes formes: tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ...

I- L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

I-1- Le plan complexe

On appelle plan complexe, un plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (On ne prend pas les vecteurs \vec{i} et \vec{j} , car, les lettres i et j sont réservées aux nombres complexes)

I-2- Nombre complexe

I-2-1 Définition

Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal direct.

Au point $A(1;0)$, on associe le nombre complexe 1.

Au point $B(0;1)$, on associe le nombre complexe i .

Au point $M(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$.

I-2-2- Affixe- image

À tout nombre complexe z est associé un et un seul point M du plan.

z est l'affixe de M .

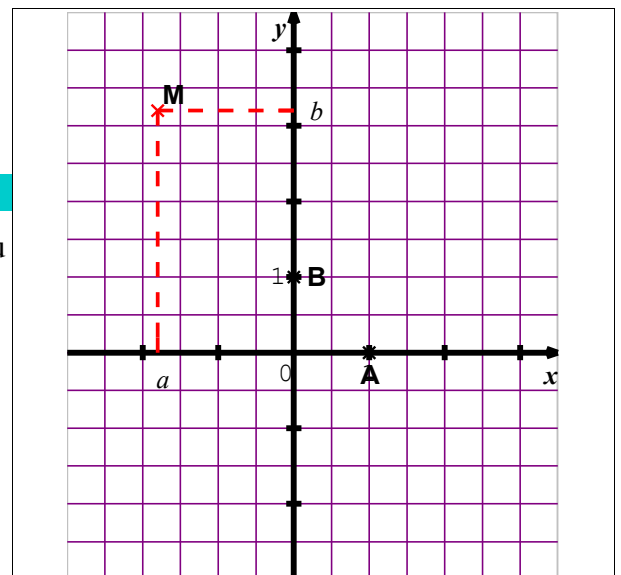
(On note souvent z_A l'affixe de A)

z est l'affixe de \vec{OM}

M est le point image de z .

\vec{OM} est le vecteur image de z .

Pour tous points P et Q du plan, l'affixe de \vec{PQ} est



Le point M a pour affixe $z = a + ib$

$$z_{\overline{PQ}} = z_Q - z_P \quad (\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP})$$

I-2-3- Partie réelle- partie imaginaire

Tout nombre complexe peut s'écrire $z = a + ib$ où a et b sont des réels.

a est la **partie réelle** de z , notée $\Re(z)$

b est la **partie imaginaire** de z , notée $\Im(z)$.

$a + ib$ est l'**écriture algébrique** du nombre complexe z .

Propriété:

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Lorsque $a = 0$, on a un **imaginaire pur**. Exemples: $z = -5i$, $z = 2i$, $z = -\sqrt{3}i$, $z = \pi i$.

Les images des imaginaires purs sont les points de ($y'y$) qu'on appelle aussi axe des imaginaires purs.

Lorsque $b = 0$, on a un nombre réel. Exemples: $z = -10$, $z = 2$, $z = \sqrt{10}$, $z = -3\pi$.

Les images des réels sont les points de ($x'x$) qu'on appelle aussi axe des réels.

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes

et on a ainsi: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I-2-4 Opposé- Conjugué.

$z = a + ib$ où a et b sont des réels.

Construction:

Placer les points M_1 d'affixe $-a - ib$, M_2 d'affixe $a - ib$ et M_3 d'affixe $-a + ib$.

Définitions:

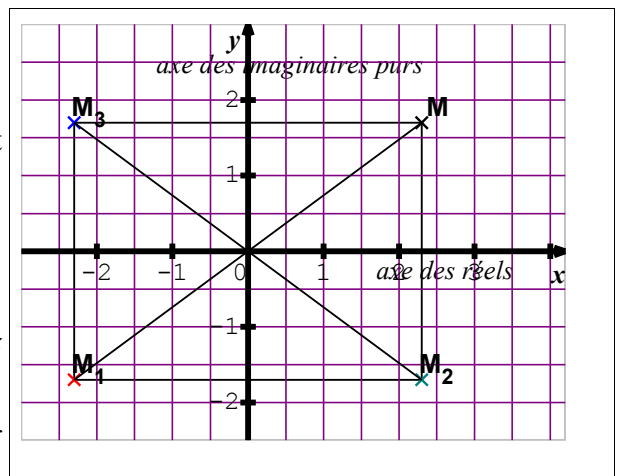
Soit M un point d'affixe z .

Le point M_1 symétrique de M par rapport à O a pour affixe $-z$ (**opposé** de z).

Le point M_2 symétrique de M par rapport à (O, \vec{u}) a pour affixe le **conjugué** de z , noté \bar{z} .

On a donc: si $z = a + ib$ alors $\bar{z} = a - ib$.

Un complexe et son conjugué ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées.



II- Opérations dans \mathbb{C}

\mathbb{C} étant une extension de \mathbb{R} , les règles de calculs sont celles de \mathbb{R} étendues à \mathbb{C} en remplaçant i^2 par -1 .

Il n'est pas nécessaire de retenir les formules,

mais de **comprendre** que l'on veut une écriture **sous la forme $a + ib$** où a et b sont des réels.

Dans la suite de ce paragraphe, $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, a', b, b' sont des réels.

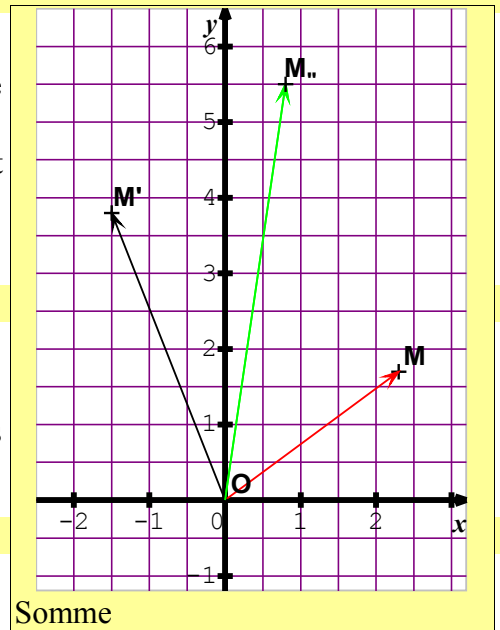
II- 1 Somme

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

Si M d'affixe z et M' d'affixe z' alors le point M'' d'affixe $z + z'$ est le point tel que $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$

$OMM''M'$ est un parallélogramme (aplatis lorsque les points O, M et M' sont alignés)

(Voir [interprétation des longueurs](#))



II-2 Produit

$$zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b) \quad \text{Ne pas apprendre par coeur}$$

Exemple: $(2 - 5i)(3 + 2i) = 6 + 4i - 15i - 10i^2 = 16 - 11i$

Les interprétations géométriques du produit seront étudiées dans quelques cas particuliers dans un prochain paragraphe (Voir [V-4-3](#))

II-3 Inverse et quotient

$z \neq 0$ c'est-à-dire: $(a, b) \neq (0, 0)$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2} \quad \text{Ne pas apprendre par}$$

coeur, mais, comprendre que $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ est un réel non nul

$$\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z} = \dots \text{ ce qui permet de donner le quotient sous forme d'écriture algébrique d'un complexe.}$$

Exemples et cas particuliers à repérer.

$$\frac{3 - 2i}{4 - i} = \frac{(3 - 2i)(4 + i)}{(4 - i)(4 + i)} = \frac{12 + 3i - 8i + 2}{16 + 1} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i$$

$$i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i$$

plus généralement: $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$

$$i^{4n+1} = i^{4n} \times i = i$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \times i^2 = -1$$

$$i^{4n+3} = i^{4n+2} \times i = -i$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$z_1 = 2 - i \quad z_2 = -3 + 4i \quad z_1 + z_2 = -1 + 3i \quad z_1 \times z_2 = -2 + 11i$$

$iz_1 = 1 + 2i$ (Remarquer le quart de tour direct)

$$z_1 \times \bar{z}_2 = (2 - i)(-3 - 4i) = -10 - 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - i}{-3 + 4i} = \frac{(2 - i)(-3 - 4i)}{25} = \frac{-10 - 5i}{25} = \frac{-2}{5} - \frac{1}{5}i$$

II-4 Opérations et conjugués.

Les démonstrations sont immédiates en calculant chaque membre

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$z \times \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$z + \bar{z} = 2a = 2\Re(z)$$

$$z - \bar{z} = 2ib = 2i\Im(z)$$

III- Écriture trigonométrique d'un nombre complexe: Module et argument

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Ne pas hésiter à faire des schémas.

Le cercle trigonométrique prend beaucoup d'importance et les angles de référence doivent être repérés rapidement ainsi que leurs lignes trigonométriques.

Le lien avec les coordonnées polaires va devenir évident

III-1- Module d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe affixe d'un point M .

Le module de z , noté $|z|$, est la longueur OM (ou $\|\vec{OM}\|$)

Avec les notations du paragraphe II-, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ d'après le théorème de Pythagore.

Conséquence: Soit r un réel strictement positif, l'ensemble des points M d'affixes z telles que $|z| = r$ est le cercle de centre O et de rayon r .

III-2- Argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe **non nul** affixe d'un point M . (0 est exclu car les angles orientés de vecteurs ne sont pas définis lorsqu'un vecteur est nul).

Un argument de z , noté $\arg(z)$, est une mesure θ de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{OM})

Rappel: les mesures sont définies modulo 2π .

Conséquences:

a) Soit θ un réel, l'ensemble des points M d'affixes z telles que $\arg(z) = \theta [2\pi]$ est la demi-droite δ d'origine O avec O exclu. $\vec{\delta}$ étant un vecteur directeur de δ , on a: $(\vec{u}, \vec{\delta}) = \theta [2\pi]$

Il suffit de déterminer un point A tel que $(\vec{u}, \vec{OA}) = \theta [2\pi]$. $\delta =]OA)$

b) Soit θ un réel, l'ensemble des points M d'affixes z telles que $\arg(z) = \theta [\pi]$ est la droite Δ passant par O avec O exclu. $\vec{\Delta}$ étant un vecteur directeur de Δ , on a: $(\vec{u}, \vec{\Delta}) = \theta [\pi]$

Il suffit de déterminer un point A tel que $(\vec{u}, \vec{OA}) = \theta [\pi]$. $\Delta = (OA) \setminus \{O\}$

III-3- Écriture trigonométrique d'un nombre complexe

Soit un point M d'affixe non nulle $z = a + ib$.

Les coordonnées polaires de M sont $[|z|, \theta]$ et, on a: $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

Résumé:

$$z \neq 0 \quad z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{avec } r > 0$$

M image de z

Coordonnées cartésiennes $M(a; b)$

Coordonnées polaires de $M [r, \theta]$

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\arg(z) = \theta + k.2\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}.$$

Exemples: Donner les écritures trigonométriques de ...

Retenir les positions particulières et **se rappeler les relations sur les angles orientés.** (Voir dans ces exemples z_6, z_7 et z_8)

$$z_1 = 2 = 2(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi))$$

$$z_2 = -5 = 5(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$$

Plus généralement: x étant un **réel** non nul, $\arg(x) = 0 [2\pi]$ si et seulement si $x > 0$

x étant un **réel** non nul, $\arg(x) = \pi [2\pi]$ si et seulement si $x < 0$

$$x = \begin{cases} |x|(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) & \text{si } x > 0 \\ |x|(\cos(\pi) + i \sin(\pi)) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$z_3 = 3i = 3(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$$

$$z_4 = -4i = 4(\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2))$$

Plus généralement: y étant un **réel** non nul, $\arg(iy) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ si et seulement si $y > 0$

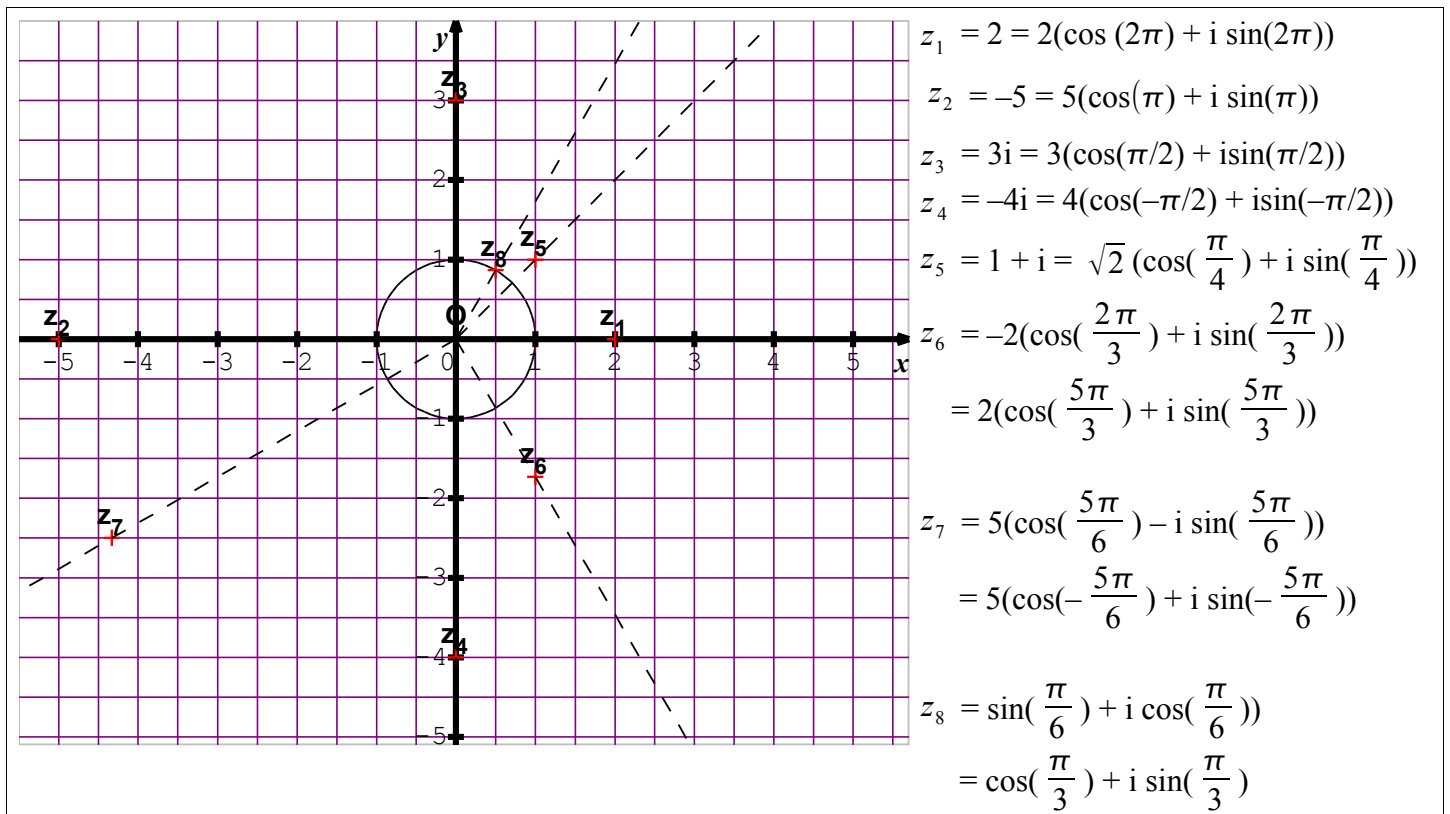
y étant un **réel** non nul, $\arg(iy) = \frac{-\pi}{2} [2\pi]$ si et seulement si $y < 0$

$$z_5 = 1 + i = \sqrt{2} (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$$

$$z_6 = -2(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = 2(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$$

$$z_7 = 5(\cos(\theta) - i \sin(\theta)) = 5(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$z_8 = \sin(\theta) + i \cos(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

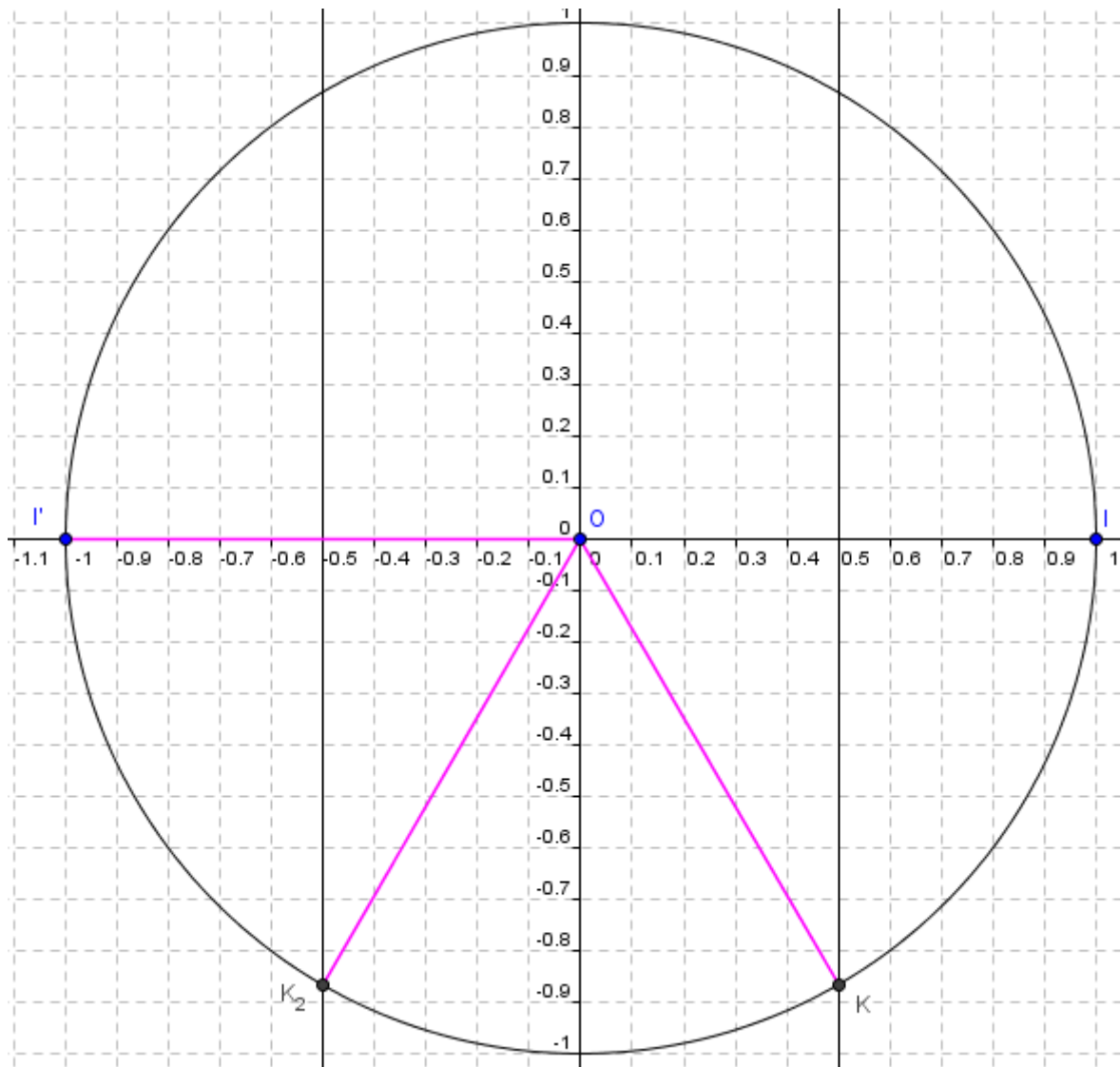


$$z = 3 - 2i$$

aura pour module $|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ et un argument θ vérifera: $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\sin \theta = \frac{-2}{\sqrt{13}}$ ce qui permet de situer θ .

Un autre calcul: Soit le nombre complexe $k = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a: $|k| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$, donc, le point K d'affixe k est sur le cercle trigonométrique.



L'abscisse de K vaut $\frac{1}{2}$.

Le point K est le point d'intersection du cercle trigonométrique et de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ d'ordonnée négative.

Un argument de k est $-\frac{\pi}{3}$ (Lignes trigonométriques usuelles)

$$k^2 = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = -\bar{k}$$

$$k^3 = k^2 \times k = -\bar{k} \times k = -|k|^2 = -1$$

III-4- Opérations et modules, opérations et arguments.

Les notations sont celles des paragraphes précédents.

III-4-1- Modules

$|z| + |z'| \geq |z+z'|$ (inégalité triangulaire) (Voir [somme](#)) La diagonale $[OM'']$ a une longueur inférieure ou égale à la somme des longueurs des côtés $[OM]$ et $[OM']$

$|\bar{z}| = |z|$ (Évident par [symétrie](#))

$|z| \times |z'| = |zz'|$ [Démonstration](#)

$n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ [Démonstration](#)

$z \neq 0$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et par conséquent: $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ [Démonstration](#)

III-4-2- Arguments

$z \neq 0$ et $z' \neq 0$

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$ [Démonstration](#)

$n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) = n \times \arg(z) [2\pi]$ [Démonstration](#)

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$ et, par conséquent: $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$ [Démonstration](#)

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$ (Évident par [symétrie](#))

III-4-3- Démonstrations:

Produit: z est un nombre complexe de module r et d'argument θ , z' est un nombre complexe de module r' et d'argument θ'

On a donc: $zz' = r[(\cos\theta + i \sin\theta)][r'(\cos(\theta') + i \sin(\theta'))]$
 $= rr'(\cos\theta \cdot \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' + i(\cos\theta \sin\theta' + \sin\theta \cos\theta'))$

Or, $\cos\theta \cdot \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' = \cos(\theta + \theta')$ et $\cos\theta \sin\theta' + \sin\theta \cos\theta' = \sin(\theta + \theta')$.

Conclusion: $zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$

zz' est le complexe de module rr' (produit des modules) et d'argument $\theta + \theta'$ (somme des arguments)

Puissance: En posant $z' = z$, on a: $|z^2| = |z|^2$ et $\arg(z^2) = 2 \arg(z)$

Récurrence: On suppose un entier $n \geq 2$ tel que $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z) [2\pi]$

On a alors: $|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z| = |z|^n \times |z| = |z|^{n+1}$

et $\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n \times z) = \arg(z^n) + \arg(z) = n \times \arg(z) + \arg(z) = (n+1)\arg(z)$

Inverse: $z \neq 0$, on a: $z \times \frac{1}{z} = 1$, d'où, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = 1$. Or, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$, d'où, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

et $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(1) = 0 [2\pi]$. Or, $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right)$, d'où, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$

III-5- Arguments et angles orientés.

Soit $\vec{OM} = \vec{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$

on a alors: $OM = AB = |z_B - z_A|$

Par définition: Si $z_A \neq z_B$, $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \vec{OM}) = (\vec{u}, \vec{AB}) \quad [2\pi]$

Comme $\arg \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_D - z_C)$ d'après [propriété précédente](#)

$$= (\vec{u}, \vec{AB}) - (\vec{u}, \vec{CD}) \quad [2\pi] \quad \text{On applique alors la relation de Chasles.}$$

$$= (\vec{CD}, \vec{AB}) \quad [2\pi]$$

Utilisation: Voir tous les exercices concernant l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les rotations, les configurations ...

Par exemple: l'alignement de trois points distincts A, B, C se traduit par: $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 0 \quad [\pi]$ qui est équivalent

à $\arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 0 \quad [\pi]$

Le parallélisme des droites (AB) et (CD) se traduit par: $\arg \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = 0 \quad [\pi]$

et l'orthogonalité par: $\arg \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

IV- Écriture exponentielle d'un nombre complexe, formules d'Euler

IV-1- Notation

On pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Cette notation est justifiée par le fait que la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{C} définie par: $\theta \mapsto e^{i\theta}$ vérifie les propriétés caractérisant les fonctions exponentielles $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ et $f'(\theta) = i \times f(\theta)$

$e^{i\theta}$ est donc le nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta \quad [2\pi]$

$|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta + k.2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

IV-1-1- Écriture exponentielle

On en déduit:

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire sous la forme exponentielle $r e^{i\theta}$ et, réciproquement,

Si $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors z est le nombre complexe de module r et d'argument $\theta \quad [2\pi]$

Exemples: $3 + 3i = 3\sqrt{2} e^{i\pi/4}$ $-i = e^{-i\pi/2}$ $-5 = 5 e^{i\pi}$

IV-1-2- Le cercle unité

Les complexes de module 1 (complexes "unitaires") ont leurs images sur le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle unité)

L'ensemble des images des complexes $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est le cercle unité.

Tout point du cercle unité a une affixe de la forme $e^{i\theta}$.

En particulier:

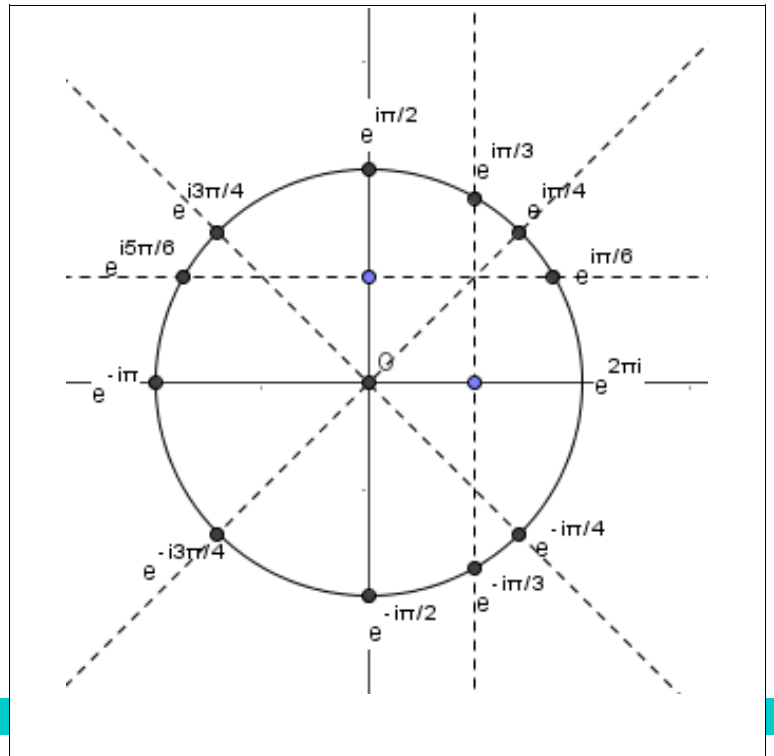
$$e^{i0} = e^{i \times 2\pi} = \dots = 1 \qquad e^{i\pi/2} = i$$

$$e^{-i\pi/2} = -i \qquad e^{i\pi} = -1$$

Rappel et remarque:

Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \bar{z} = |z|^2$,

d'où, $|z| = 1 \Leftrightarrow z \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$



IV-1-3- Où on retrouve les formules

Les propriétés étudiées au §III-4-2 donnent:

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = e^{i\bar{\theta}}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

IV-2- Formules d'Euler

Les formules trigonométriques (formules d'addition, formules de duplication, ...) se retrouvent facilement à l'aide des complexes.

Il faut retenir qu'en ajoutant et en soustrayant membre à membre les formules suivantes:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \end{cases}, \text{ on obtient: } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (\text{formules d'Euler})$$

Un exemple d'utilisation: (voir aussi §V-3)

Linéarisation: Il s'agit d'exprimer une puissance de ligne trigonométrique en fonction des lignes trigonométriques des multiples de θ

Linéarisation de $\cos^3 \theta$

Rappel: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ et remarquer: $e^{2i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{i\theta}$

$$\cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{2^3} (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}) = \frac{1}{4} (\cos(3\theta) + 3 \cos \theta)$$

V- Nombres complexes et géométrie

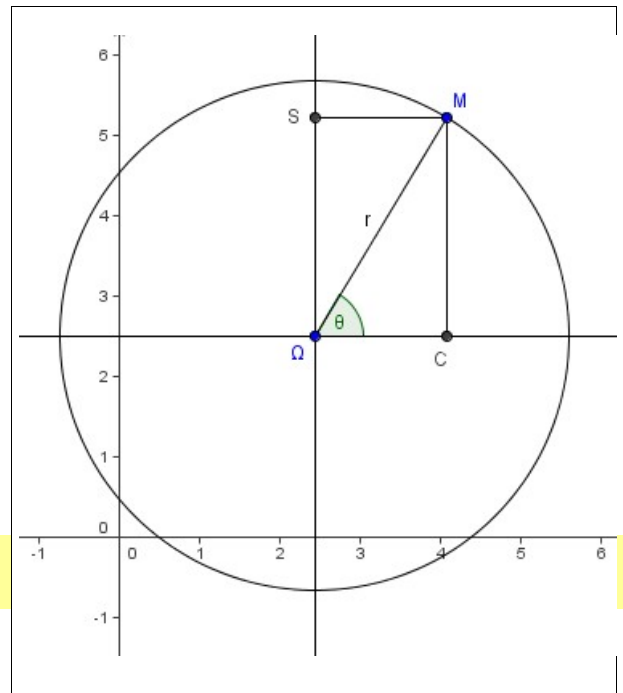
V-1- Le cercle

Soit \mathcal{C} un cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon r .

Un point M d'affixe z appartient à \mathcal{C}

si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M} \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$

si et seulement si $z = \omega + r e^{i\theta}$



V-2- Parallélogrammes, rectangles, losanges, carrés, ...

On traduit les propriétés de ces quadrilatères en utilisant les modules et les arguments des affixes dans un repère orthonormal direct.

Exemple: $ABCD$ est un rectangle de dimensions $AB = 4$ et $AD = 2$

Évaluer l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{AC})$

Soit le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$

Dans ce repère, on note l'affixe des points en minuscule.

On a: $a = 0; b = 4, c = 4 + 2i, d = 2i$

Une mesure de θ est donnée par $\arg\left(\frac{c-a}{b-d}\right) = \arg\frac{4+2i}{4-2i} = \arg\frac{(2+i)^2}{5} = \arg\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$.

On a donc: $\cos \theta = \frac{3}{5}$ et $\sin \theta = \frac{4}{5}$

On peut aussi déterminer par exemple l'affixe du milieu K de $[AC]$: $z_K = \frac{a+c}{2} = 2 + i$

Rappel: Le produit scalaire $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = DB \cdot AC \cdot \cos \theta$ mène à:

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}}{DB \cdot AC} = \frac{4 \times 4 + (-2) \times 2}{\sqrt{20} \times \sqrt{20}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

V-3- Nombres complexes et trigonométrie

De l'égalité: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, ou encore $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, on tire des relations permettant de linéariser ou de mettre sous forme polynomiale les lignes trigonométriques.

On appelle formule de Moivre l'égalité suivante: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

Exemples: $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$.

Or, $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$

On sait aussi: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

On obtient: $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

et, $\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta$

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) = \frac{1}{2} (\cos 2x + 1)$$

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix} - 2) = -\frac{1}{2} (\cos 2x - 1)$$

Comme $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$,

$\cos(a+b) + i \sin(a+b) = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b)$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ *Partie réelle*

$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$ *Partie imaginaire*

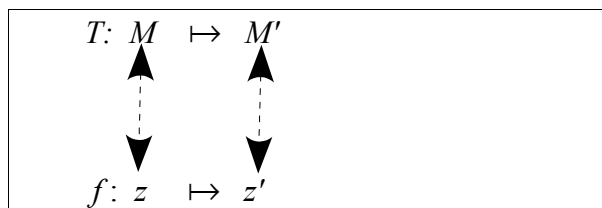
V-4- Nombres complexes et transformations

Les transformations sont des fonctions dans le plan.

À un point M , on fait correspondre par un procédé de construction un point M' .

À l'affixe z de M , on fait donc correspondre une affixe z' (fonction de z) qui est l'affixe du point M' . On a alors associé à la transformation du plan une fonction dans \mathbb{C} .

On a le schéma suivant, en appelant T la transformation dans le plan et f la fonction dans \mathbb{C} .



f est l'écriture complexe de la transformation T

Dans la suite du paragraphe, on note z l'affixe du point de départ M , z' celle de son image M' par la transformation.

V-4-1- Translation

Soit \vec{w} un vecteur d'affixe ω .

La translation de vecteur \vec{w} , notée $t_{\vec{w}}$ est définie par $t_{\vec{w}}(M) = M'$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

On a alors: $t_{\vec{w}}(M) = M'$ si et seulement si $z' - z = \omega$.

Conclusion:

$\omega \in \mathbb{C}$.

$z \mapsto z + \omega$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{w} d'affixe ω .

Exemple:

Soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $f(z) = z + 2 - i$.

À tout point M d'affixe z , on associe ainsi le point M' d'affixe $z' = z + 2 - i$

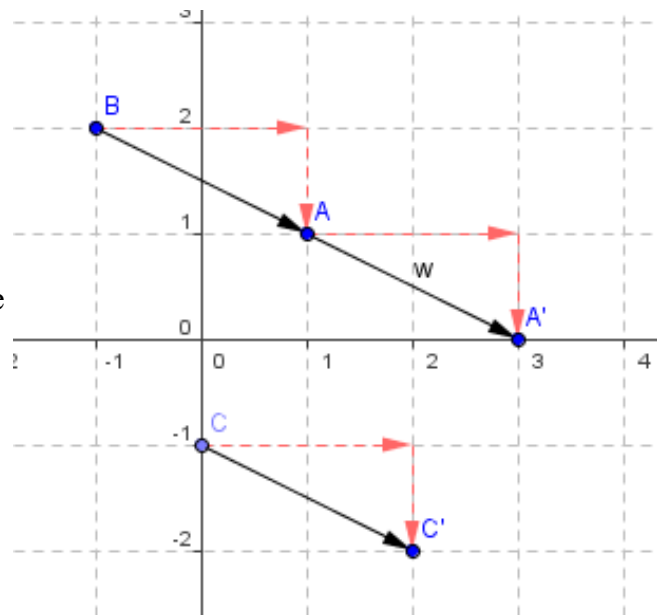
Soit \vec{w} le vecteur d'affixe $2 - i$, on a: $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

f est l'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{w} .

Le point A d'affixe $a = 1 + i$ a pour image le point A' d'affixe $a' = 1 + i + 2 - i = 3$.

Le point B d'affixe $b = -1 + 2i$ a pour image le point A d'affixe $a = -1 + 2i + 2 - i = 1 + i$.

Le point C d'affixe $c = -i$ a pour image le point C' d'affixe $c' = -i + 2 - i = 2 - 2i$.



V-4-2- Homothétie

Soit Ω un point (fixe) d'affixe ω et k un **réel non nul**.

L'homothétie h de centre Ω et de rapport k est définie par: $h(M) = M'$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

On a alors: $h(M) = M'$ si et seulement si $z' - \omega = k(z - \omega)$

Conclusion:

k étant un réel non nul et $\omega \in \mathbb{C}$.

$z' - \omega = k (z - \omega)$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k .

Cas particulier:

$z' = kz$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O (*centre du repère*) et de rapport k .

Exemple:

Soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $f(z) = -2z + 3 + i$.

À tout point M d'affixe z , on associe ainsi le point M' d'affixe $z' = -2z + 3 + i$.

Remarquer: -2 est un réel

Recherche du point invariant: on résout l'équation $z' = z$.

Soit $z = -2z + 3 + i$ On obtient: $z = 1 + \frac{1}{3}i$

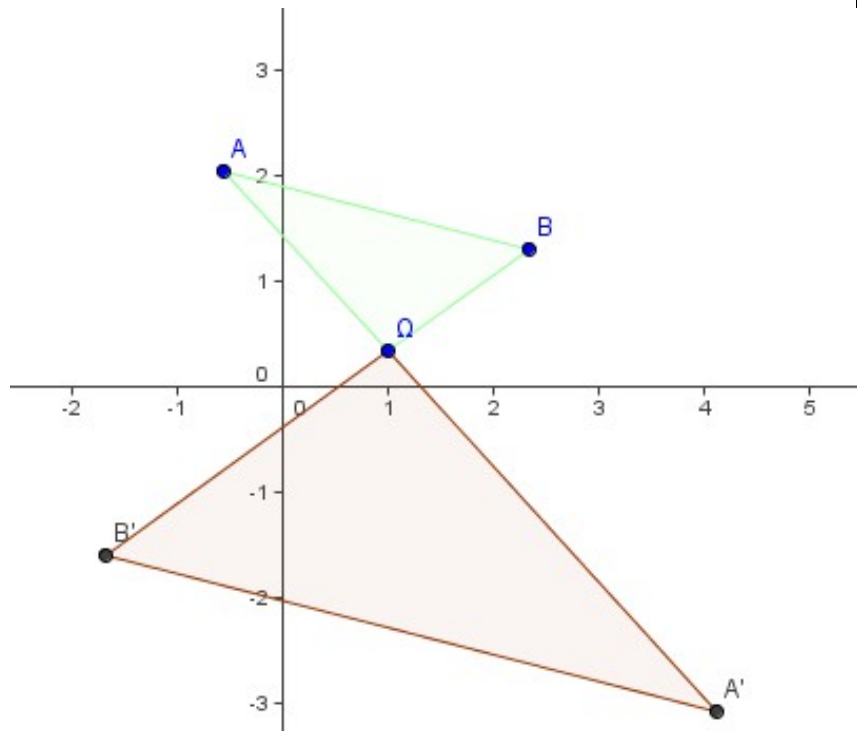
On peut écrire: $z' - (1 + \frac{1}{3}i) = -2z + 3 + i - (1 + \frac{1}{3}i) = -2(z - (1 + \frac{1}{3}i))$

Soit Ω le point d'affixe $1 + \frac{1}{3}i$, on obtient: $\overrightarrow{\Omega M'} = -2 \overrightarrow{\Omega M}$

f est l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport -2 .

A et B ont pour images A' et B' par l'homothétie d'écriture complexe

$$z' = -2z + 3 + i.$$



V-4-3- Rotation

Soit Ω un point (fixe) d'affixe ω et θ un réel.

La rotation r de centre Ω et d'angle θ est définie par:

$$\text{Pour } M \neq \Omega, r(M) = M' \text{ si et seulement si } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\Omega \vec{M}, \Omega \vec{M}') = \theta [2\pi] \end{cases}$$

On a alors:

$$\text{Pour } M \neq \Omega, r(M) = M' \text{ si et seulement si } \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} = \theta [2\pi] \end{cases}$$

Comme $\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1$ et $\arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} = \theta [2\pi]$, le complexe $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ est un complexe de module 1 et d'argument θ , donc, $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$

On obtient: $z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$

Cette relation reste vraie lorsque $M = \Omega$.

Conclusion:

θ étant un réel et $\omega \in \mathbb{C}$.

$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$ est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ .

Cas particuliers:

Le quart de tour direct de centre O .

Comme $\theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $\omega = 0$, on a:

$z' = iz$ est l'écriture complexe du quart de tour direct de centre O .

Remarque: symétrie de centre O .

Comme $\theta = \pi [2\pi]$ et $\omega = 0$, on a:

$z' = -z$ est l'écriture complexe de la symétrie de centre O .

Exemple:

Soit l'application f définie dans \mathbb{C} par $f(z) = \frac{\sqrt{3}+i}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Remarquer: $\left| \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right| = 1$ et $e^{i\pi/3} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

Recherche du point invariant: On résout $z = f(z)$

$$z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)z = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3}+i)}{(2-\sqrt{3})^2+1} = \frac{2\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{(2\sqrt{3}-3+i\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{2\sqrt{3}+3}{4}$$

f est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{2\sqrt{3}+3}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

VI- Les équations du second degré à coefficients réels dans \mathbb{C} .

a, b, c sont des nombres réels et a est non nul.

On considère le polynôme du second degré $f(z) = az^2 + bz + c$.

Forme canonique:

$$f(z) = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, on obtient: $f(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Trois cas:

* Si $\Delta > 0$, on a:

les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont les réels $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

** Si $\Delta = 0$, on a:

la solution de l'équation $f(z) = 0$ est le réel $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.

*** Si $\Delta < 0$, on pose $\Delta = i^2 \delta^2 = (i\delta)^2$ (Exemple: $-4 = (2i)^2$ $-5 = (\sqrt{5}i)^2$)

les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont les **complexes conjugués** $z_1 = \frac{-b - i\delta}{2a}$ et $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b + i\delta}{2a}$.

Dans tous les cas: $f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

Exemple:

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + 2z + 10 = 0$

Calcul de Δ : $\Delta = 4 - 40 = -36 = (6i)^2$

L'équation a par conséquent deux solutions complexes conjuguées: $z_1 = \frac{-2-6i}{2} = -1 - 3i$ et $\bar{z}_1 = -1 + 3i$

On peut vérifier: $(z - (-1 - 3i))(z - (-1 + 3i)) = (z+1)^2 - (3i)^2 = z^2 + 2z + 1 + 9 = z^2 + 2z + 10$