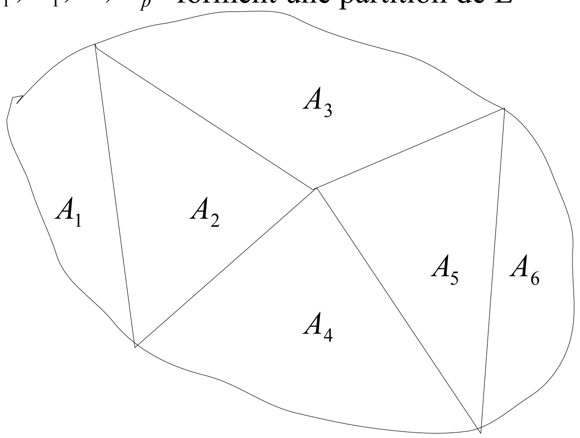
Table des matières

I- Quand fait-on la somme? Quand fait-on le produit?

E est un ensemble (événement)

$A_1, A_1, \ldots, A_p$ forment une partition de E



La réunion des A_i , $1 \leqslant i \leqslant p$ est E,

Si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$

$card(E) = card(A_1) + card(A_2) + \ldots. + card(A_p)$

Une situation se réalise en k étapes.

Chaque étape offre respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ possibilités.

Le nombre d'issues (de possibilités) est :

$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$

Exemples: 1) On possède 3 jetons verts, 10 jetons rouges et 2 jetons jaunes.

On peut ainsi former $3 \times 10 \times 2 = 60$ triplets

(vert, rouge, jaune)

2) Avec les chiffres 0; 1; 3; 5 ; 6; 8 on peut former:

$5 \times 6 \times 3$ nombres pairs de trois chiffres ne commençant pas par 0.

En général, on peut imaginer un arbre.

II - Successif avec ou sans remise; simultané

1) Combien peut-on former de codes de 4 chiffres avec les 10 chiffres de 0 à 9?
Réponse: 10^4
2) Combien peut-on former de codes de 4 chiffres distincts avec les 10 chiffres de 0 à 9?
Réponse: $10 \times 9 \times 8 \times 7$.
3) On distribue 8 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien peut-on former de "mains"? (Dans un jeu de cartes, une "main" est l'ensemble des cartes qu'un joueur a dans la main).
Une "main" étant une partie de huit éléments distincts pris parmi 32, on a:

$$\binom{32}{8} = \frac{32 \times 31 \times \ldots \times 25}{8 \times 7 \times \ldots \times 1} = 10\,518\,300$$

(Calculatrice TI: faire 32 nCr 8) "nCr" est dans le menu MATH, PRB)

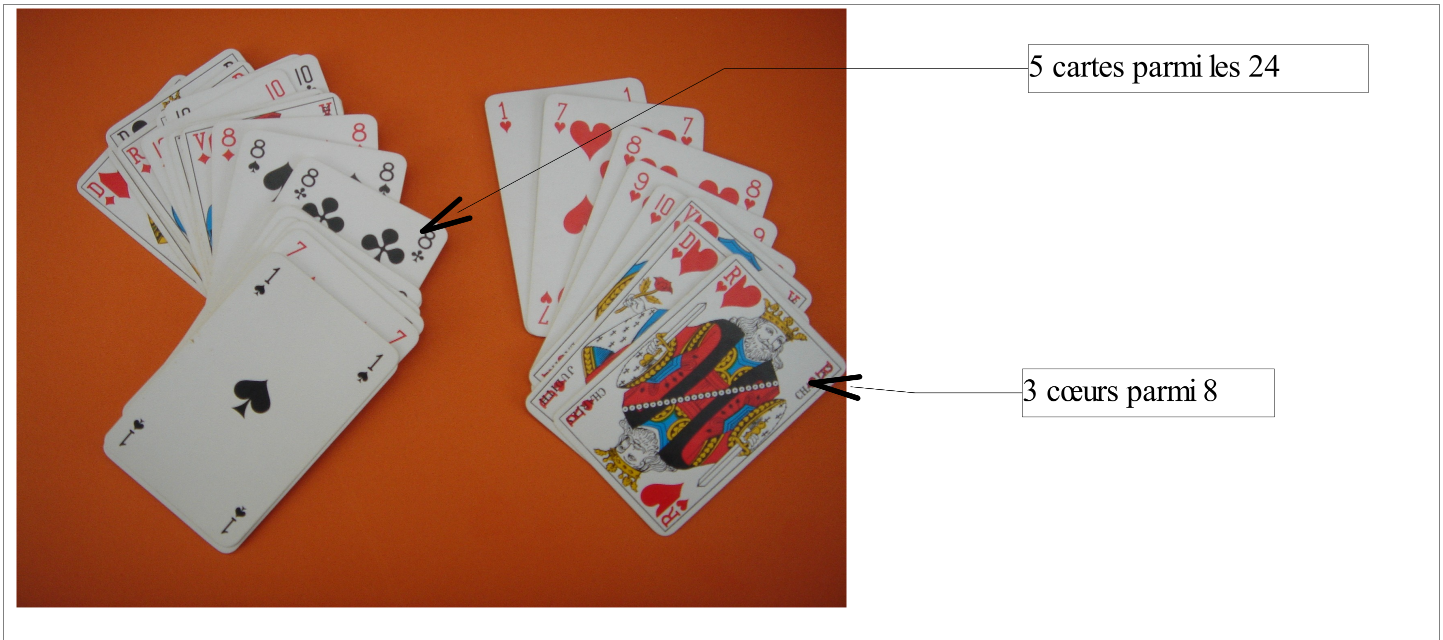
4) Au Loto, il y a $\binom{49}{6}$ = 13 983 816 grilles différentes *(une grille consiste à cocher 6 numéros distincts pris*

entre 1 et 49)

III- Avec des cartes.

(*ou des jetons, ou des scoubidous ou des éléphants: des roses, des gris, des gros, des petits, d'Afrique, d'Asie...*)
Combien peut-on former de mains de 8 cartes dans un jeu de 32 cartes comportant
a) exactement trois cœurs?
b) exactement trois cœurs et deux dames?
c) le roi de trèfle et exactement trois cœurs?
d) le roi de trèfle ou exactement trois cœurs?
e) au plus un cœur?
f) au moins un cœur?

a) A: "exactement trois cœurs"



Une main contient 3 cœurs pris parmi huit cœurs et 5 autres cartes prises parmi les 24 qui ne sont pas des cœurs, d'où, $card(A) = \binom{8}{3} \times \binom{24}{5} = 2\ 380\ 224$

b) B: "exactement trois cœurs et deux dames"

Comme on peut avoir la dame de cœur, il faut distinguer deux cas disjoints (partition)
B_1 : la main contient la dame de cœur ou B_2 : la main ne contient pas la dame de cœur

Pour B_1 : Une main contient la dame de cœur et 2 cœurs pris parmi sept cœurs (sans la dame) et 1 dame prise parmi 3 dames (sans celle de cœur) et 4 autres cartes prises parmi les 21 qui ne sont ni des cœurs, ni des dames.

$$card(B_1) = \binom{1}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{21}{4} = 377\ 055$$

Pour B_2 : Une main contient 3 cœurs pris parmi sept cœurs (sans la dame) et 2 dames prises parmi 3 dames (sans celle de cœur) et 3 autres cartes prises parmi les 21 qui ne sont ni des cœurs, ni des dames.

$$card(B_2) = \binom{7}{3}\times\binom{3}{2}\times\binom{21}{3} = 139\,650$$

la dame de cœur

1 dame parmi 3

2 cœurs parmi 7

4 autres parmi 21

Total: 8 cartes dont 3 cœurs et 2 dames

ou

2 dames parmi 3

3 cœurs parmi 7

3 autres parmi 21

Total: 8 cartes dont 3 cœurs et 2 dames

card(B) = 377 055 + 139 650 = ...

c) C: "le roi de trèfle et exactement trois coeurs"

Une main contient le roi de trèfle et 3 cœurs pris parmi huit cœurs et 4 autres cartes prises parmi les 23 qui ne sont ni des cœurs ni le roi de trèfle, d'où, $card(C) = \binom{1}{1}\times\binom{8}{3}\times\binom{23}{4} = 495\,880$

le roi de trèfle

d) D: "le roi de trèfle ou exactement trois cœurs"

On peut faire:

T: ensemble des mains contenant le roi de trèfle

$card(T) = \binom{1}{1} \times \binom{31}{7}$ = 2 629 575

A: ensemble des mains contenant exactement trois cœurs (voir a)

Comme $T \cap A = C$ (voir c)

$card(D) = card(T \cup A) = card(T) + card(A) - card(C)$ = 4 514 419

e) E: "au plus un cœur"

Au plus un cœur est la réunion des deux cas disjoints: aucun cœur et, un et un seul cœur

E_0 : " aucun cœur".

La main contient 8 cartes prises parmi 24 qui ne sont pas des cœurs

E_1 : la main contient 1 cœur pris parmi 8 cœurs et 7 autres cartes prises parmi les 24 qui ne sont pas des cœurs.

$card(E) = card(E_0) + card(E_1) = \binom{24}{8} + \binom{8}{1} \times \binom{24}{7}$ = 3 504 303

f) F: "Au moins un cœur."

Considérons le complémentaire $\bar{F}$: "aucun cœur" $\bar{F} = E_0$

d'où, $card(F) = card(\Omega) - card(\bar{F}) = \binom{32}{8} - \binom{24}{8}$ = 9 782 829