Index

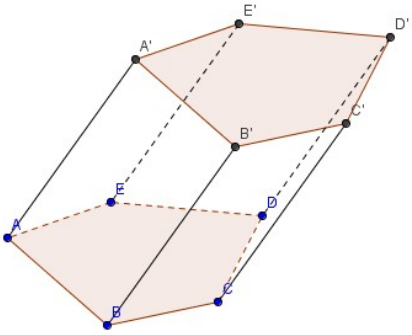
I- Rappels du collège

I-1- Les figures usuelles

I-1-1 Prisme

Les faces latérales sont des parallélogrammes

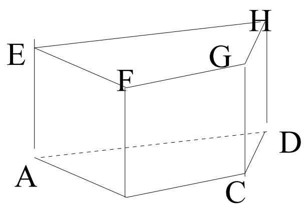
Les bases sont deux polygones superposables.

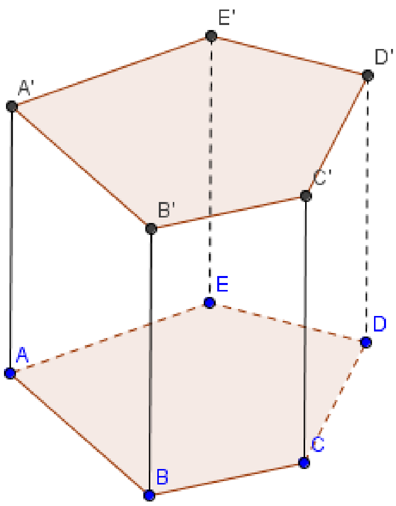


Le volume est égal à $V = B\times h$ où B est l'aire d'une base et h la hauteur (mesure d'un segment perpendiculaire entre les deux bases).

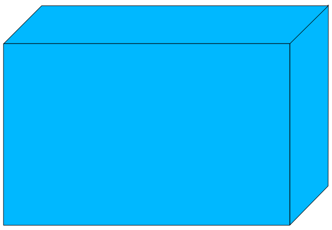
I-1-1-1- Prisme droit

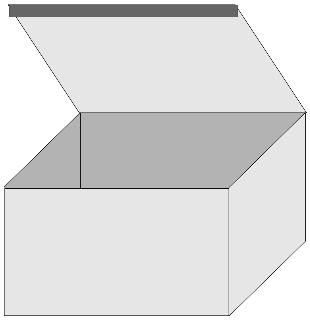
Les faces latérales sont des rectangles





I-1-1-2- Pavé droit ou parallélépipède rectangle



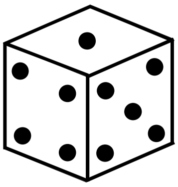


Les faces latérales sont des rectangles (pavé droit) et les bases sont des rectangles.

Les six faces sont des rectangles

I-1-1-3- Cube

Les six faces sont des carrés.

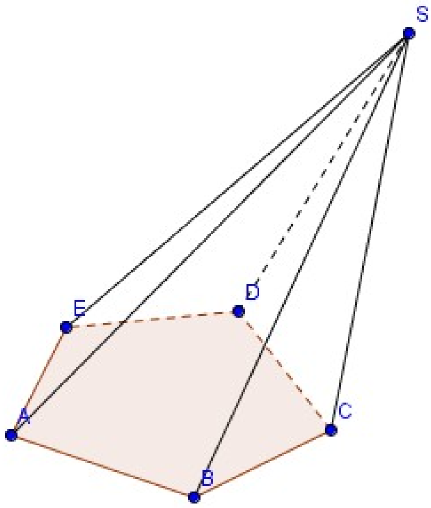


Toutes les arêtes sont égales

I-1-2- Pyramide

Les faces latérales sont des triangles.

La base est un polygone.



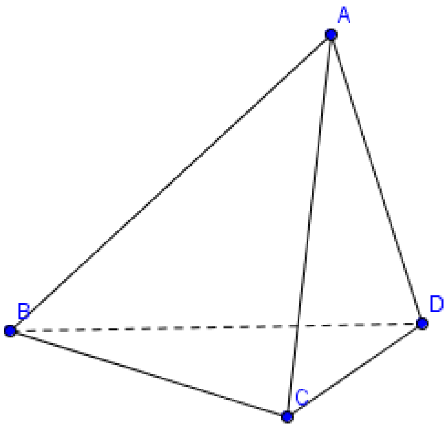
Le volume est égal à: $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire de la base et h la hauteur (mesure du segment issu du sommet et perpendiculaire à la base).

Une ***pyramide régulière*** est une pyramide dont toutes les faces sont des triangles isocèles superposables.

La base est alors un polygone régulier.

I-1-2-1- Tétraèdre

Les quatre faces sont des triangles.



Un ***tétraèdre régulier*** est un tétraèdre dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Les triangles sont donc des triangles équilatéraux.

I-1-3- Cylindre droit

Les bases sont des disques superposables.

Le volume est égal à: $V = \pi r^2 \times h$ où r est le rayon de la base et h la hauteur

La surface latérale d'un cylindre est: $A_{latérale} = 2 \times \pi \times r \times h$

I-1-4- Cône droit

Le volume est égal à: $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$ où r est le rayon de la base et h la hauteur

I-2- Quelques règles de perspective cavalière

Les segments visibles sont représentés en traits pleins.

Les segments cachés sont représentés en pointillés.

Des droites parallèles sont représentées par des droites parallèles.

Les proportions sur un segment sont respectées, notamment, le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.

Dans un plan de face, on représente la figure en vraie grandeur.

En général:

L'égalité de longueur n'est pas conservée.

Les angles ne sont pas conservés.

Attention: deux droites dessinées sécantes sur la figure ne sont pas généralement sécantes.

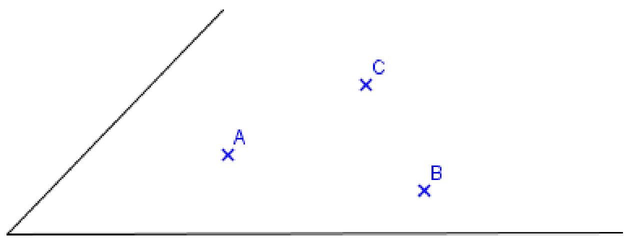
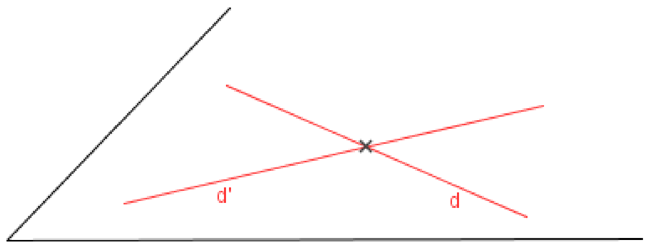
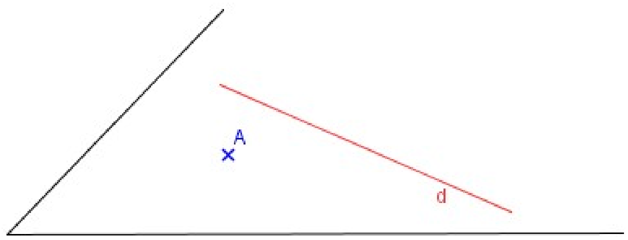
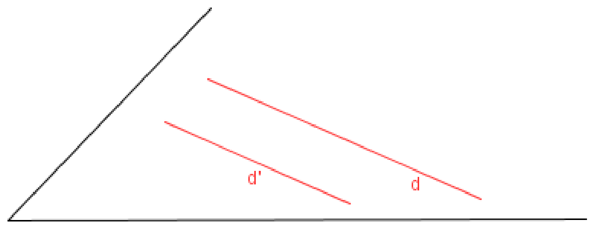
II- Le plan

L'idée de plan est donnée par une surface plane ***illimitée***.

II-1- Définir un plan

II-1-1- Comment définir un plan

Dans l'espace, un plan est défini par:

 - trois points non alignés. le plan (ABC)	 - par deux droites sécantes
 - une droite et un point extérieur à cette droite	 - par deux droites distinctes et parallèles

II-1-2- Propriété

Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent à P.

On a: $(AB) \subset P$ ($\subset$ se lit: "inclus dans")

II-1-3- Le mot coplanaire

Deux éléments de l'espace sont coplanaires s'ils appartiennent à un même plan.

Trois points sont toujours coplanaires.

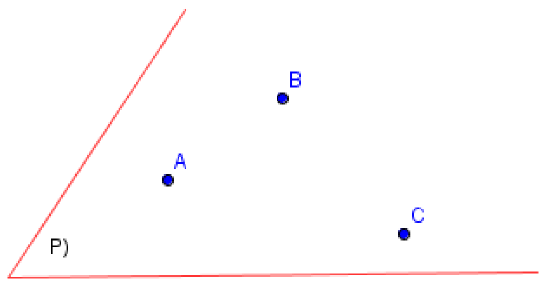
À partir de quatre points, il est intéressant de se demander s'ils sont coplanaires ou non.
S'ils ne sont pas coplanaires, ces quatre points sont les sommets d'un tétraèdre. Voir § I-1-2-1
Deux droites peuvent être coplanaires ou non coplanaires. Voir § III-1-

II-2- Position relative de deux plans

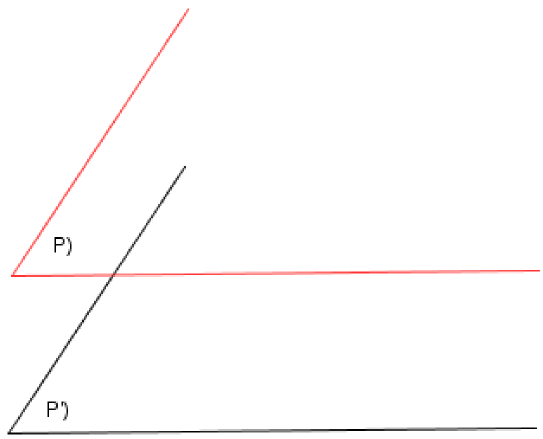
Deux plans peuvent être parallèles ou sécants.

II-2-1 Plans parallèles

Deux plans sont parallèles lorsqu'ils son confondus ou lorsqu'ils n'ont aucun point commun.



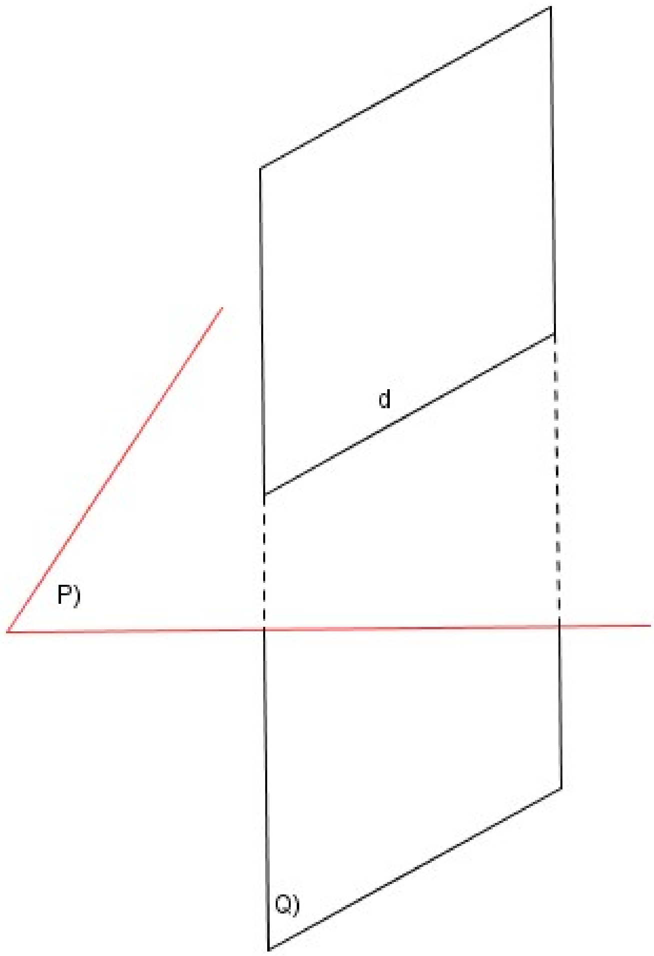
$A \in P$, $B \in P$, $C \in P$ et A, B, C non alignés.
Les plans P et (ABC) sont confondus



Représentation de deux plans strictement parallèles

II-2-2- Plans sécants

Des plans qui ne sont pas parallèles sont sécants et leur intersection est une droite.



Les plans P et Q se coupent suivant la droite d.

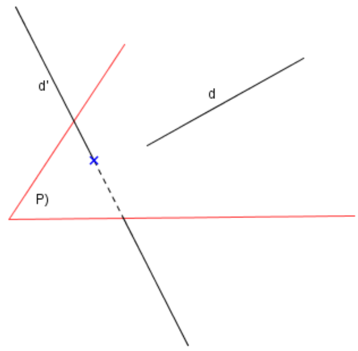
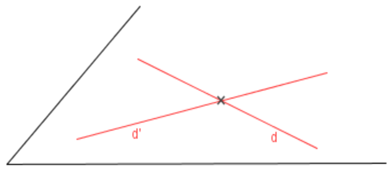
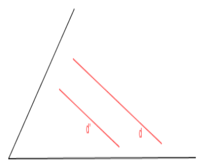
II-2-3- Propriétés

1) Par tout point de l'espace, il passe un et un seul plan parallèle à un plan donné

2) Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

III- La droite

III-1- Position relative de deux droites

Droites non coplanaires	Droites coplanaires	
	 Droites sécantes	 Droites strictement parallèles

Deux droites *d* et *d'* de l'espace peuvent être coplanaires ou non coplanaires:

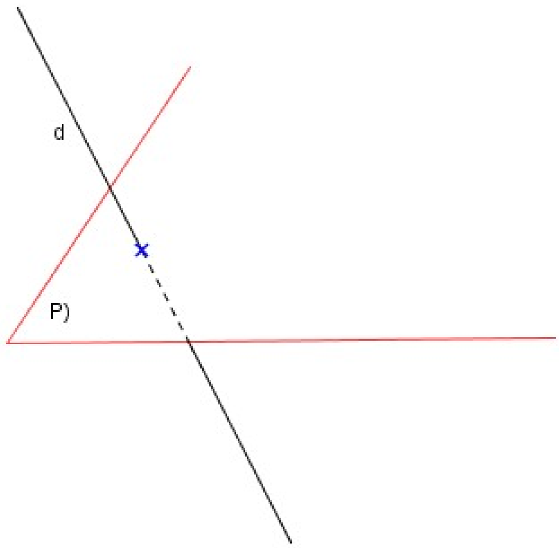
Si elles sont coplanaires, elles sont soit sécantes, soit parallèles (confondues ou strictement parallèles).

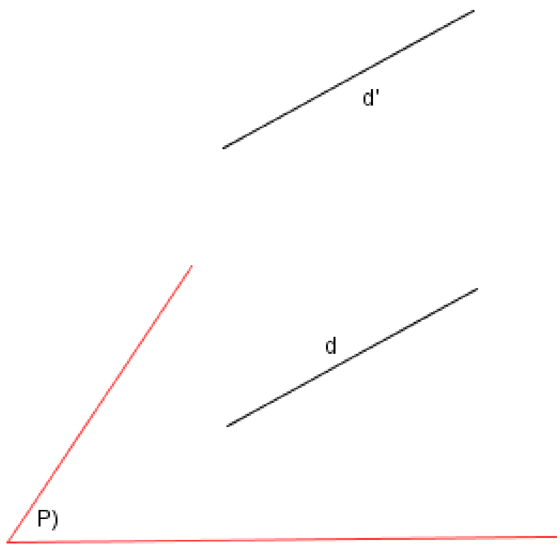
Des droites non coplanaires ne sont ni sécantes, ni parallèles

III-2- Position relative d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan sont dits sécants lorsqu'ils ont un et un seul point commun.

Sinon, la droite et le plan sont parallèles. (On peut avoir la droite incluse dans le plan ou la droite strictement parallèle au plan)





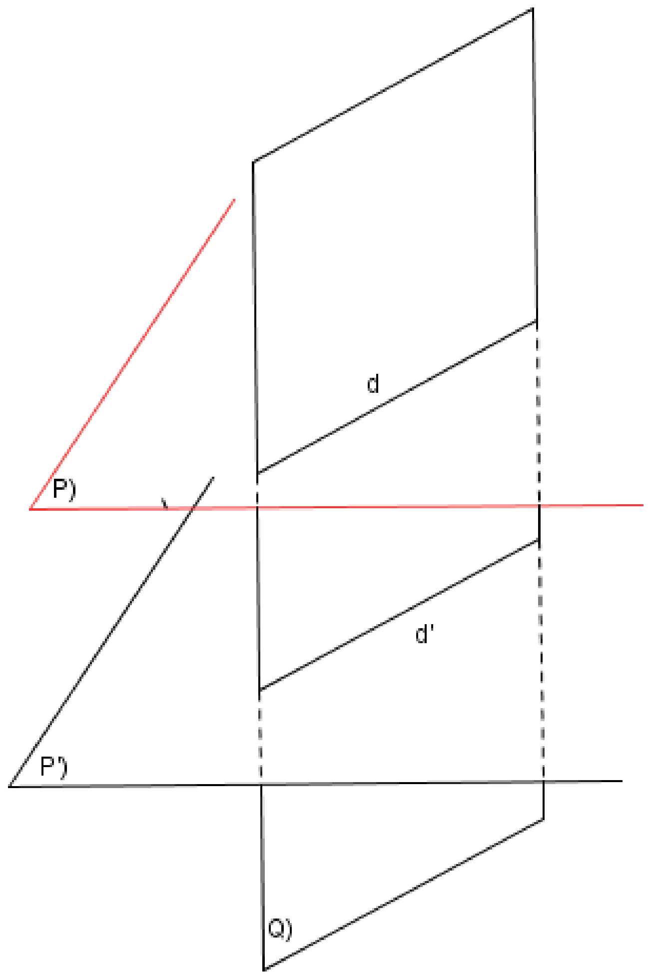
Droite sécante à un plan	*d*' est strictement parallèle à *P*

IV- Parallélisme

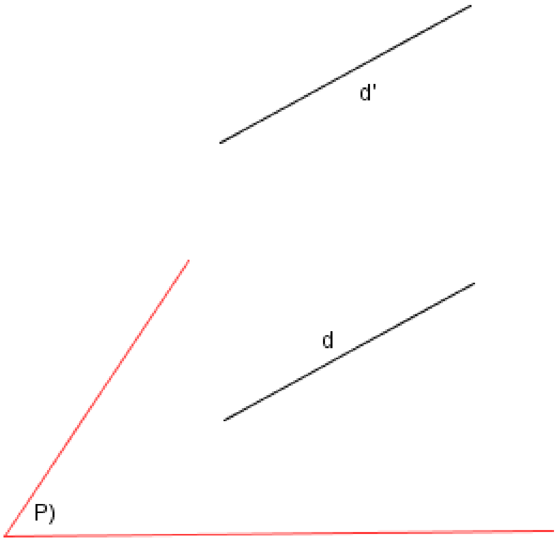
Plusieurs propriétés du parallélisme ont été données lors de la description des positions relatives des droites et des plans.

IV-1. Deux plans parallèles et un plan sécant

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



IV-2. Deux droites parallèles et un plan.

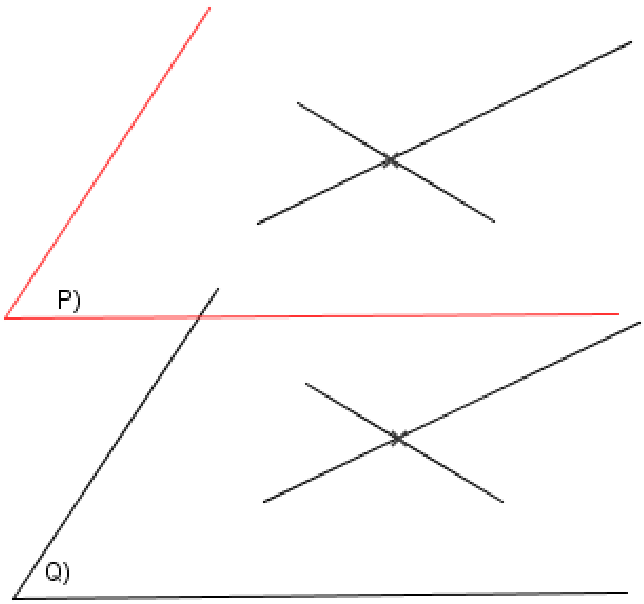


Si une droite d' est parallèle à une droite d d'un plan P alors la droite d' est parallèle au plan P.

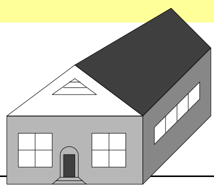
IV-3- Pour montrer que deux plans sont parallèles

Soient P et Q deux plans distincts.

Si deux droites sécantes de P sont parallèles à deux droites sécantes de Q alors les plans P et Q sont parallèles.



IV-4- Le théorème du toit

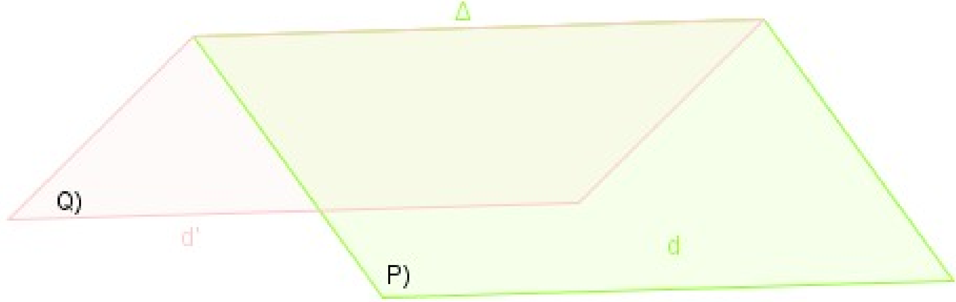


Soient P et Q deux plans sécants suivant une droite Δ.

Si une droite d du plan P est parallèle à une droite d' du plan Q alors la droite d'intersection Δ

est parallèle à d et d'.

On peut aussi imaginer un livre ouvert...



V- Orthogonalité

Du grec "ortho" (droit) et "gone" (angle).

"Orthogonalité" est le substantif qui caractérise pour des droites, des directions, des plans le fait d'être à angle droit, d'être perpendiculaires.

Dans le plan, vous savez que deux droites sont perpendiculaires (orthogonales) lorsqu'elles se coupent à angle droit.

Vous savez aussi que si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. C'est cette idée qui va nous permettre de définir des droites orthogonales dans l'espace.

Imaginez deux droites de l'espace Δ et Δ' et un point A quelconque dans l'espace.

On trace par A la parallèle d à Δ et la parallèle d' à Δ' (cela revient à considérer les directions des droites).

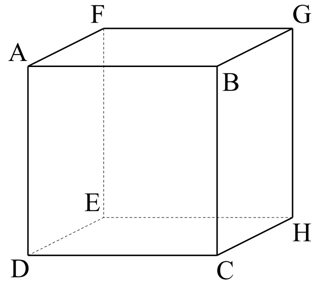
Les droites d et d' sont donc coplanaires et on peut utiliser les définitions du plan.

V-1- Droites orthogonales

Deux droites de l'espace Δ et Δ' sont orthogonales si et seulement si leurs parallèles d et d' construites à partir d'un point A sont perpendiculaires.

Exemple:

Dans un cube $ABCDFGHE$, les droites (CD) et (GH) sont orthogonales.



En effet, la droite (AB) parallèle à (CD) et la droite (AD) parallèle à (GH) sont perpendiculaires.

V-2- Droite et plan orthogonaux

V-2-1- Définition

Une droite est orthogonale si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

Illustration: Poser une équerre le long d'une règle "verticale" sur la table et tourner l'équerre.

V-2-2- Propriété (Comment démontrer qu'une droite et un plan sont orthogonaux?)

Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes du plan.

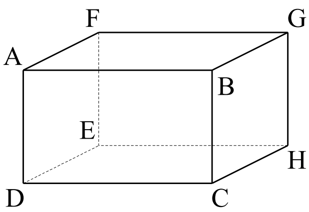
V-2-3- Propriétés

a) Si une droite d est orthogonale à un plan P alors elle est orthogonale à toute droite Δ incluse dans P

b) Si deux droites sont orthogonales à un même plan alors elles sont parallèles.

c) Si deux droites sont parallèles alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

Exemple:



Dans le pavé droit $ABCDFGHE$, la droite (AB) est perpendiculaire à (BC) et à (BG), donc, elle est orthogonale au plan (BCG), et, par conséquent à la droite (GC) incluse dans le plan (BCG).

Les droites (AB) et (EH) orthogonales au plan (BCG) sont parallèles.

V-2-4- Plan médiateur d'un segment

Observation:

Soit un segment [AB]. Imaginer toutes les médiatrices dans l'espace à [AB]. Toutes ces médiatrices passent par le milieu de [AB], donc, elles sont sécantes et par conséquent coplanaires. On nomme ce plan le **plan médiateur** du segment [AB]

Toutes ces médiatrices sont perpendiculaires à [AB] en son milieu.

Un point d'une de ces médiatrices est équidistant des extrémités du segment [AB]

Définitions (les deux définitions sont équivalentes)

Le plan passant par le milieu d'un segment et orthogonal à ce segment est le plan médiateur du segment

ou encore

l'ensemble des points équidistants des points A *et* B est un plan appelé plan médiateur du segment $[AB]$

Propriétés:

a) Toute droite incluse dans le plan médiateur du segment $[AB]$ est orthogonale à (AB)

b) Tout point dans le plan médiateur du segment $[AB]$ est équidistant des points A *et* B

V-3- Plans orthogonaux

Définition:

Deux plans sont orthogonaux si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Attention aux mauvais réflexes

Dans le plan, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles.

Cette propriété est **fausse dans l'espace**

Contre-exemple: les trois arêtes issues du même sommet dans un pavé droit