Index

Ce chapitre reprend et complète des résultats vus les années précédentes.

Les définitions et propriétés des vecteurs, des barycentres et du produit scalaire sont les mêmes dans le plan et dans l'espace (Il y a seulement une coordonnée en plus)

I- L'espace

I-1- Les généralités vues au collège et en seconde

Voir Espace et Section d'un pavé par un plan

I-2 Un, deux, trois ... vecteurs, une, deux, trois ... directions

I-2-1- Définition d'un vecteur

Comme dans le plan, on définit un vecteur par sa direction, son sens et sa longueur.

Rappel sur les vecteurs du plan: Vecteurs

I-2-2- Vecteurs colinéaires.

I-2-2-1- Définition

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction

ou encore

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k.\vec{u}$

I-2-2-2- La droite

Voir §II-4-1- Droite et §V-2- Représentation paramétrique d'une droite

Soit un vecteur $\vec{u}$ non nul et A un point.

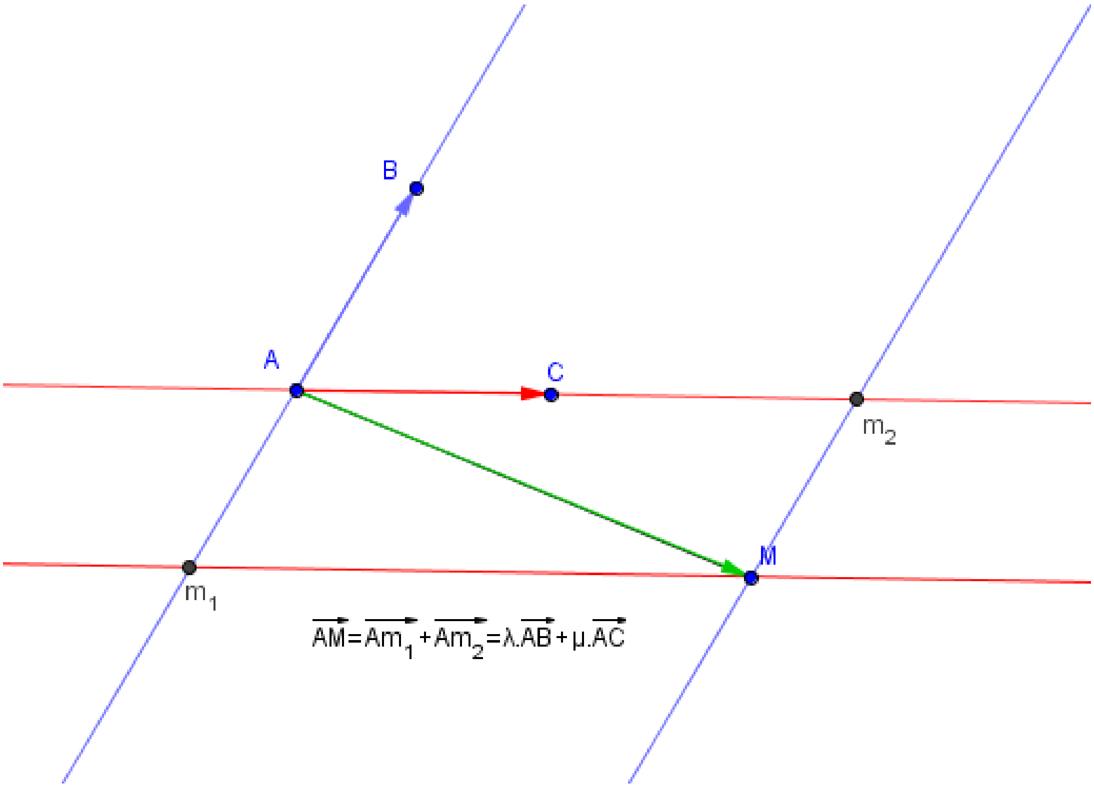
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ où $t \in \mathbb{R}$ est la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A.

I-2-3- Vecteurs coplanaires

I-2-3-1- Le plan

Voir §II-V-1- Plan et §V-1- Représentation paramétrique d'un plan

Trois points A, B, C non alignés définissent un plan.



Soit M un point quelconque du plan (ABC). Les points A, B, C, M sont donc coplanaires.

En construisant le parallélogramme de diagonale [AM] ayant ses côtés portés par les droites (AB) et (AC), on obtient: $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AM} = \vec{w}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non colinéaires, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

I-2-3-2- Vecteurs coplanaires

Des vecteurs sont coplanaires si et seulement si leurs représentants construits à partir d'une même origine A définissent des points dans un plan passant par A.

I-2-3-3- Propriété

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe trois réels α, β, γ tels que:

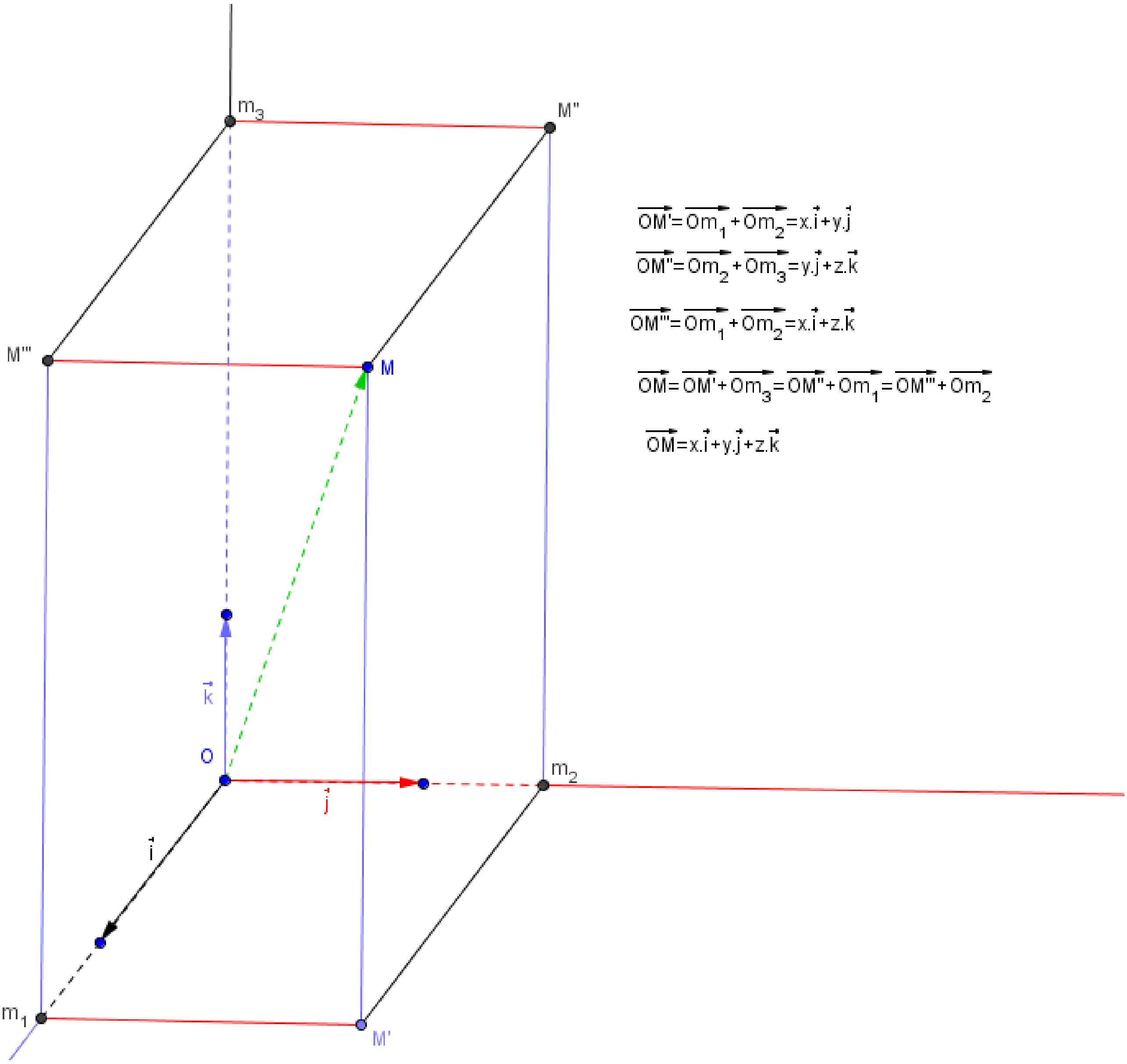
$\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w} = \vec{0}$

ou encore, il existe des réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$

I-2-4- Se repérer dans l'espace.

I-2-4-1- Repère cartésien

Un repère cartésien de l'espace est défini par la donnée d'un point origine *O* et trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ non coplanaires. On note le repère $\mathscr{R}\ (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



En construisant pour tout point *M* de l'espace un pavé de grande diagonale [*OM*] tel que les arêtes sont parallèles aux axes (*O*, $\vec{i}$), (*O*, $\vec{j}$), (*O*, $\vec{k}$), on obtient: $\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$ où *x*, *y*, *z* sont des réels.

x est l'abscisse du point *M*, *y* l'ordonnée et *z* la cote dans le repère $\mathscr{R}$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et *M* le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Les coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathscr{R}$ sont celle de *M*.
M(*x*, *y*, *z*) dans $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ équivaut à $\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$

I-2-4-2- Repère cartésien orthonormal

Un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormal lorsque les trois vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et sont de longueur (ou norme) 1.

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormal si et seulement si $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

II- Barycentre

II-1- Remarque préliminaire:

Dans une somme vectorielle de la forme $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ avec $\alpha + \beta + \gamma = 0$ alors la relation de Chasles permet de réduire la somme et cette somme est un vecteur indépendant du point M.

Exemple: $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

Si la somme des coefficients n'est pas nulle, le vecteur varie avec M, d'où, l'introduction du barycentre pour réduire la somme.

$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})-3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})=\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}$

En choisissant le point *G* tel que $2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

On obtient: $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$

II-2- Les définitions

II-2-1 Point pondéré

A est un point du plan ou de l'espace et α un réel.

Le couple $(A;\ \alpha)$ est un ***point pondéré***

II-2-2- Barycentre de 2 points pondérés

Soit $(A;\ \alpha)$ et $(B;\ \beta)$ un couple de points pondérés.

Si $\alpha + \beta \neq 0$ alors il existe un et un seul point G, appelé ***barycentre*** du système $\{(A;\ \alpha);\ (B;\ \beta)\}$ défini par $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

II-2-3- Barycentre de *n* points pondérés

Cette définition se généralise: si $\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\neq 0$ alors le système de n points pondérés $(A_i;\alpha_i)$ admet un barycentre G défini par: $\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$

II-3- Les propriétés

II-3-1 *Propriété fondamentale* *(Réduction d'une somme vectorielle)*

Soit $\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\neq 0$, si G est le barycentre du système système de n points pondérés $(A_i;\alpha_i)$ alors:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$$

II-3-2 *Théorème d'associativité* *Barycentre partiel*

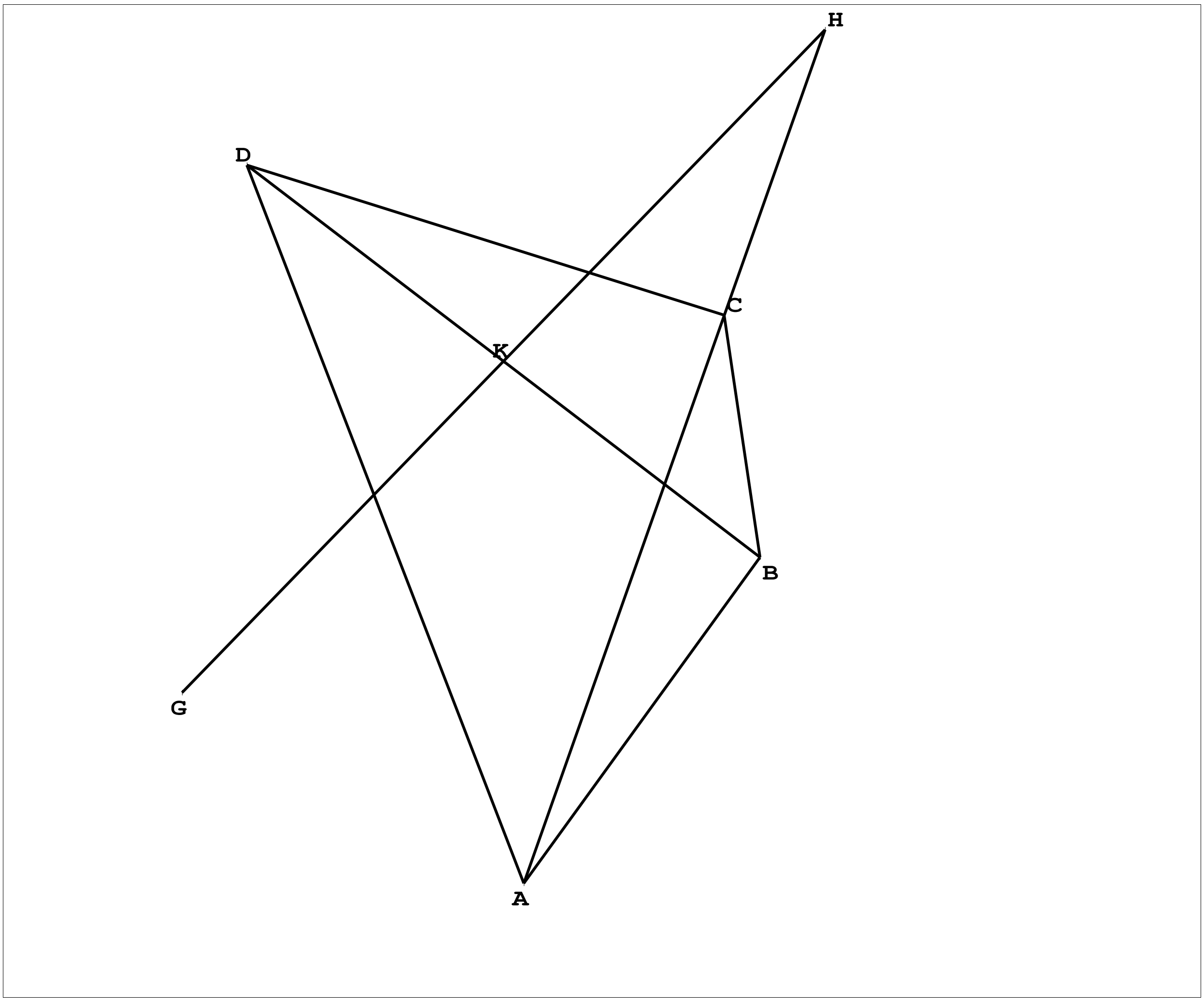
Soit $(A;\ \alpha)$, $(B;\ \beta)$, $(C,\ \gamma)$ trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

Soit G le barycentre du système $\{(A;\ \alpha);\ (B;\ \beta),\ (C,\ \gamma)\}$ et H celui de $\{(A;\ \alpha);\ (B;\ \beta)\}$ alors G est le barycentre de $\{(H;\ \alpha + \beta),\ (C,\ \gamma)\}$.

En pratique, on peut remplacer une partie du système de points pondérés par leur barycentre partiel, affecté de la somme (non nulle) de leurs coefficients.

Construction: Pour un système de deux points, en remplaçant M par A (ou M par B), on a:

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ donne $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{BA}$)



Pour un système de plus de deux points, on regroupe les points et on utilise l'associativité des barycentres.
Exemple: G est le barycentre de $(A;\ 1)$, $(B;\ 2)$, $(C;\ –3)$, $(D;\ 2)$.
Soit H le barycentre de $(A;\ 1)$, $(C;\ –3)$ et K celui de $(B;\ 2)$, $(D;\ 2)$ alors G est le barycentre de $(H;\ –2)$, $(K;\ 4)$

Construction de H: $\overrightarrow{AH}=\frac{-3}{1-3}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Construction de K: K est le milieu de $[BD]$ Construction de G: $\overrightarrow{HG}=\frac{4}{4-2}\overrightarrow{HK}=2\overrightarrow{HK}$

II-3-3 Invariance

Le barycentre ne change pas en multipliant les coefficients de chaque point par un même facteur non nul.

II-3-4 Coordonnées

Dans un repère (plan ou espace) les coordonnées du barycentre sont obtenues en faisant la somme coefficientée de chaque coordonnée divisée par la somme des coefficients. ***Voir moyenne pondérée***.

II-4 Droite, demi-droite, segment

II-4-1 Droite

Voir §I-2-2-2- La droite et §V-2- Représentation paramétrique d'une droite

Soit A et B deux points distincts du plan.

Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$

ou encore

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$

Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un réel t tel que $(1 - t)\,\overrightarrow{AM} + t\,\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

Comme $1 - t + t = 1$, M est barycentre du système $\{(A, 1 - t), (B, t)\}$

L'ensemble des points M barycentres du système $\{(A, 1 - t), (B, t)\}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est la droite (AB).

II-4-2- Demi-droite

La demi-droite $[AB)$ est caractérisée par $t \geqslant 0$ dans la définition précédente, d'où,

L'ensemble des points M barycentres du système $\{(A, 1 - t), (B, t)\}$ avec $t \in \mathbb{R}^+$ est la demi-droite $[AB)$.

II-4-3- Segment

a) Le segment $[AB]$ est caractérisé par $0 \leqslant t \leqslant 1$ dans la définition précédente, d'où,

L'ensemble des points M barycentres du système $\{(A, 1 - t), (B, t)\}$ avec $t \in [0; 1]$ est le segment $[AB]$.

b) Si les coefficients sont de même signe, le barycentre de deux points A, B affectés de ces coefficients est un point du segment $[AB]$

II-5- Plan, triangle

II-5-1 Plan

Voir §I-2-3-1- Le plan et §V-1- Représentation paramétrique d'un plan

Soit trois points A, B, C non alignés.

M est un point du plan (ABC) si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que: $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$

ou encore

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$

Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que:

$(1 - \lambda - \mu)\,\overrightarrow{AM} + \lambda\,\overrightarrow{BM} + \mu\,\overrightarrow{CM} = \vec{0}$

Comme $1 - \lambda - \mu + \lambda + \mu = 1$, M est barycentre du système $\{(A, 1 - \lambda - \mu), (B, \lambda), (C, \mu)\}$

L'ensemble des points M barycentres du système $\{(A, 1 - \lambda - \mu), (B, \lambda), (C, \mu)\}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ est le plan (ABC).

II-5-2 Triangle

a) Si $0 \leqslant \lambda + \mu \leqslant 1$, le point M est à l'intérieur du triangle ABC.
b) Si les coefficients sont de même signe, le barycentre de trois points A, B, C affectés de ces coefficients est à

l'intérieur du triangle.

III- Produit scalaire dans l'espace

III-1 Définitions

Pour définir le produit scalaire, il existe plusieurs possibilités équivalentes.
L'objectif du paragraphe suivant est de donner quelques liens entre les différentes définitions

*** $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
*** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls.
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ alors le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans un plan contenant les points A, B et C.

III-1-1- Par les coordonnées

Définition 1:

Dans un repère orthonormal, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

On a alors: $\vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{u})^2 = x^2+y^2+z^2$

Remarque: *Pour être rigoureux, il reste à montrer que cette définition ne dépend pas du repère orthonormal.*

III-1-2- Par les distances

Dans le cas où le repère est orthonormé, on a:

$$OM^2 = OM'^2 + MM'^2 = Om_1^2 + Om_2^2 + MM'^2 = x^2+y^2+z^2$$

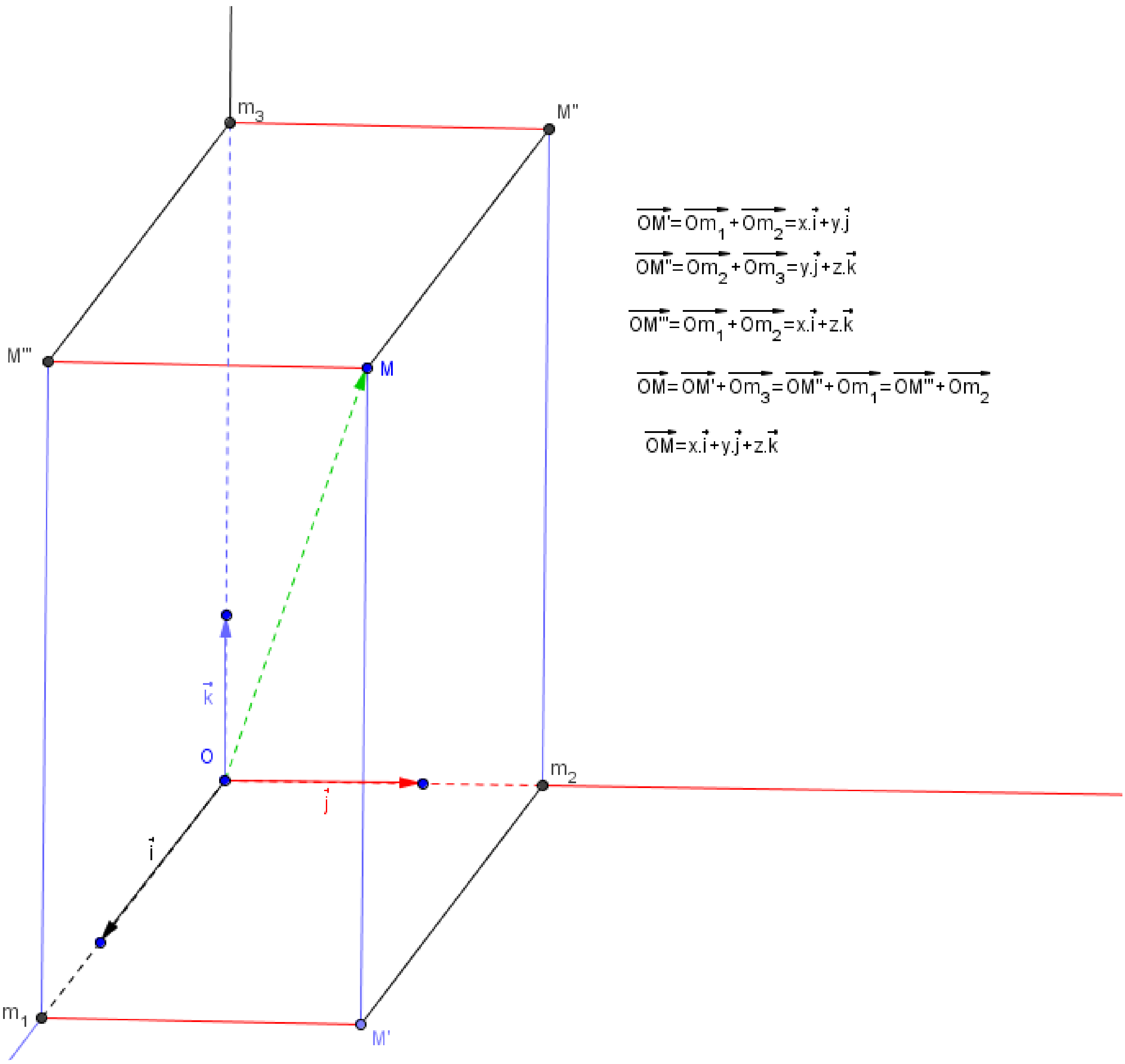
Comme $OM^2 = \|\vec{u}\|^2$, il apparaît: $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

D'autre part, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2 = x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2+2(xx'+yy'+zz')$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (x-x')^2+(y-')^2+(z-z')^2 = x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-2(xx'+yy'+zz')$$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}$$



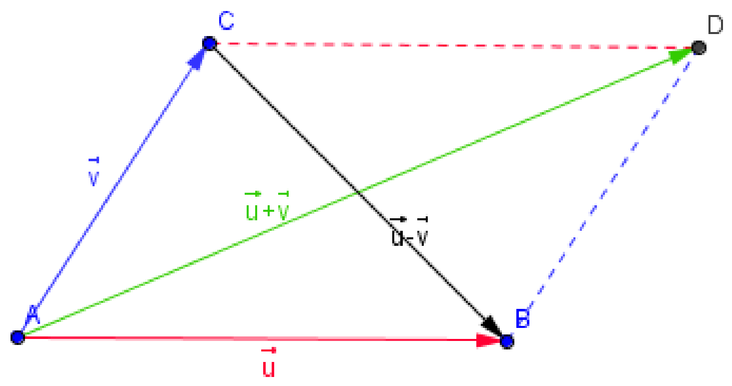
Définition 2:

On peut définir alors: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}[\ \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\ ]$

ou encore: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}[\ \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\ ]$

Retour aux points:

En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et D le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme,



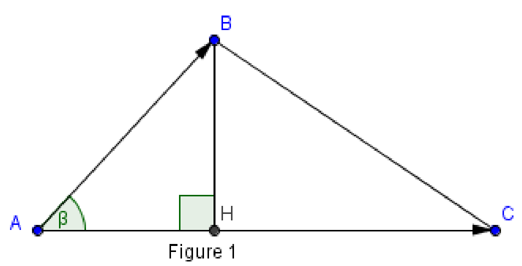
$\overrightarrow{AD} = \vec{u}+\vec{v}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{u}-\vec{v}$

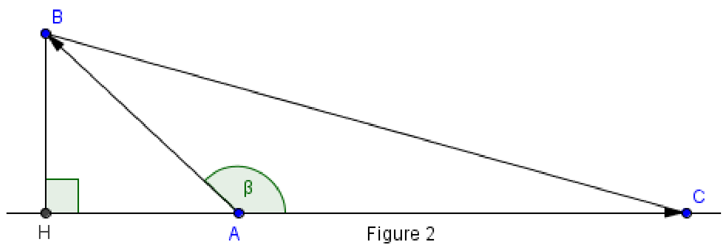
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[\,AD^2 - AB^2 - AC^2\,]$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[\,AB^2 + AC^2 - BC^2\,]$

Cette définition montre que le produit scalaire n'est pas lié au repère

III-1-3- Par le projeté orthogonal

Reprenons le triangle ABC et soit H le projeté orthogonal de B sur (AC).





On a: $AH^2+BH^2 = AB^2$ (i) et $CH^2+BH^2 = BC^2$ (ii)

Dans le cas de la figure 1: $CH^2 = (AC-AH)^2 = AC^2+AH^2 - 2.AC.AH$

On a alors d'après (ii): $AC^2+AH^2+BH^2 - 2.AC.AH = BC^2$

et d'après (i): $AC^2+AB^2 - 2.AC.AH = BC^2$

Finalement: $2.AC.AH = AC^2+AB^2-BC^2 = 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$

Dans le cas de la figure 2: $CH^2 = (AC+AH)^2 = AC^2+AH^2 + 2.AC.AH$

On a alors d'après (ii): $AC^2+AH^2+BH^2 + 2.AC.AH = BC^2$

et d'après (i): $AC^2+AB^2 + 2.AC.AH = BC^2$

Finalement: $2.AC.(-AH) = AC^2+AB^2-BC^2 = 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$

Comme $AH = AB.\cos\theta$ si $\theta \in [0; \pi]$ et $AH = AB.\cos(\theta - \pi) = -AB.\cos\theta$ si $\theta \in [\pi; 2\pi]$, on obtient:
$\vec{u}\cdot\vec{v} = AB.AC.\cos\theta$ où $\theta = \widehat{BAC}$

III-1-3-1 Définition 3:

En posant $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| .\cos(\vec{u}, \vec{v})$

III-1-3-2 Conséquences

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de ***même sens*** alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de ***sens contraire*** alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v'}$ où $\vec{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$

III-2- Propriétés

Les propriétés sont les mêmes que dans le plan

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (commutativité du produit scalaire)
$(k.\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k.\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ k étant un réel
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2.\vec{u}\cdot\vec{v}$
$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2.\vec{u}\cdot\vec{v}$
$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

III-3- Vecteurs orthogonaux

III-3-1- Définition.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

III-3-2- Vecteur normal à un plan

III-3-2-1- Définition.

(D), étant une droite orthogonale à un plan (P), un vecteur directeur $\vec{n}$ de (D) est un vecteur normal du plan (P) (il donne la direction orthogonale du plan)

III-3-2-2- Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs et non colinéaires de (P) et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
Si $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{v}$ alors $\vec{n}$ est un vecteur normal de (P)

III-3-2-3 Équation cartésienne d'un plan.

Cas général

Dans un repère ***orthonormé***, soit $\vec{n}$ (a, b, c) un vecteur normal de (P) et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de (P)
Pour tout point $M(x; y; z)$ de (P), on a: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$
On en déduit: $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$.
On obtient une équation de la forme: $ax + by + cz + d = 0$

Réciproquement, a, b, c étant trois réels où l'un au moins est non nul, $ax + by + cz + d = 0$ est une équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a, b, c)$.

Les plans parallèles aux plans de coordonnées

$x = k$ Plan parallèle au plan (yOz) (vecteur normal $\vec{i}$)
$y = k$ Plan parallèle au plan (xOz) (vecteur normal $\vec{j}$)
$z = k$ Plan parallèle au plan (xOy) (vecteur normal $\vec{k}$)

Les plans parallèles aux axes de coordonnées

Les coefficients a et b ne sont pas nuls en même temps

$ax + by = c$ est une équation de plan parallèle à $(z'z)$

$ax + bz = c$ est une équation de plan parallèle à $(y'y)$

$ay + bz = c$ est une équation de plan parallèle à $(x'x)$

III-4- Distance d'un point à un plan

La distance d'un point à un plan (P) est la longueur du segment $[MH]$ où H est le projeté orthogonal de M sur (P).
C'est la plus courte distance de M à un point du plan (P).
Dans un repère orthonormé, soit (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ un point de l'espace.
La distance d de M_0 à (P) est: $d=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Preuve:
Une méthode:
Soit $\vec{n}\,(a, b, c)$ un vecteur normal à (P).
$\overrightarrow{M_0H}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{M_0H} = t\,\vec{n}$

On a donc: $\begin{cases} x_H - x_0 = ta \\ y_H - y_0 = tb \\ z_H - z_0 = tc \end{cases}$. En multipliant les équations respectivement par a, b et c et en ajoutant membre-à-membre, il vient: $a(x_H - x_0)+b(y_H - y_0)+c(z_H - z_0) = t\ a^2 + t\ b^2 + t\ c^2$ (1)
Comme $H \in (P)$, on a: $ax_H + by_H + cz_H = d$, d'où, (1) donne $-(ax_0+by_0+cz_0-d) = t(a^2+b^2+c^2)$
Or $\overrightarrow{M_0H} = t\,\vec{n}$ mène à $MH = |t|\ \|\vec{n}\| = |t| . \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
Finalement: $MH = d=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

IV- Demi-espace, sphère, cylindre de révolution, cône de révolution

IV-1 Demi-espace

Un plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ partage l'espace en deux demi-espaces
Chaque demi-espace est caractérisé par le signe de $ax + by + cz + d$.

IV-2 Sphère

Soit S la sphère de centre $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$ et de rayon r.
Dans un repère orthonormé, $M(x, y, z) \in S$ si et seulement si $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$
En particulier, une sphère de centre O a pour équation: $x^2+y^2+z^2=r^2$

Si $[AB]$ est un diamètre de la sphère, $M(x, y, z) \in S$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

IV-3- Cylindre de révolution d'axe (Oz)

Soit $C_{ylindre}$ un cylindre d'axe (Oz) et de rayon r

$M(x, y, z) \in C_{ylindre}$ si et seulement si $x^2 + y^2 = r^2$

Tous les plans d'équation $z = k$ coupe le cylindre suivant un cercle de rayon r

IV-4- Cône de révolution d'axe (Oz)

Soit $C_{\hat{o}ne}$ un cône d'axe (Oz) de sommet O et de demi-angle α.

$M(x, y, z) \in C_{\hat{o}ne}$ si et seulement si $x^2 + y^2 = z^2 (\tan \alpha)^2$

Tous les plans d'équation $z = k$ coupe le cône suivant un cercle de rayon $k.\tan(\alpha)$.

V- Représentation paramétrique d'un plan, d'une droite

V-1- Représentation paramétrique du plan

Voir §II-V-1- Plan et Voir §I-2-3-1- Le plan

On a vu:

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non colinéaires, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans un repère de l'espace, on a alors: $\begin{cases} x - x_A = \lambda a + \mu a' \\ y - y_A = \lambda b + \mu b' \\ z - z_A = \lambda c + \mu c' \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = \lambda a + \mu a' + \alpha \\ y = \lambda b + \mu b' + \beta \\ z = \lambda c + \mu c' + \gamma \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ est une représentation graphique du plan de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ passant par le point $A(\alpha; \beta; \gamma)$

Remarque: ne pas oublier de vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

V-2- Représentation paramétrique d'une droite

Voir §I-2-2-2- La droite et §II-4-1- Droite

On a vu:

Soit un vecteur $\vec{u}$ non nul et A un point.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ où $t \in \mathbb{R}$ est la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A.

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans un repère de l'espace, on a alors: $\begin{cases} x - x_A = t\,a \\ y - y_A = t\,b \\ z - z_A = t\,c \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

$\begin{cases} x = ta+\alpha \\ y = tb+\beta \\ z = tc+\gamma \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et passant par le point $A(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$

VI- Exercices Bac

Pour les énoncés manquants: Annales

VI-1 Exercice donné en juin 2004 en Amérique du Nord

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés $S_m = \{(A;\ 1), (B;\ m), (C;\ 2m)\}$.

Pour tout point M du plan, on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

(A1) G_1 est le milieu du segment $[CI]$.

(A2) G_1 est barycentre de $\left\{(J\,;2);\left(C\,;\frac{2}{3}\right)\right\}$

(A3) Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

(A4) Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$

(A5) $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle

(A6) Pour tout point P de (AG_{-1}) , il existe un réel m tel que $P = G_m$

Corrigé de l'exercice Amérique du Nord juin 2004

(A1) G_1 est le milieu du segment $[CI]$. **Vraie**

Par associativité, on a: G_1 = bar $\{(A;\ 1), (B;\ 1), (C;\ 2)\}$ = bar $\{(I;\ 2), (C;\ 2)\}$.

(A2) G_1 est barycentre de $\left\{(J\,;2);\left(C\,;\frac{2}{3}\right)\right\}$ **Vraie**

G_1 = bar $\{(A;\ 1), (B;\ 1), (C;\ 2)\}$ d'où, G_1 = bar $\{(A;\ 1), (B;\ 1), (C;\ 1), (C;\ 1)\}$ = bar $\{(J;\ 3); (C;\ 1)$

On ne change pas le barycentre en multipliant les coefficients par $\frac{2}{3}$

(A3) Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ **Fausse**

$\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \;=\; 3\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \;=\; -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$

(A4) Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$ **Vraie**

Pour tout m réel distinct de $-\frac{1}{3}$ et pour tout point M du plan, on a:

$(1+m+2m)\overrightarrow{MG_m}=\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MB}+2m\overrightarrow{MC}$ (1)

Si $M = A$, on a: $(1+m+2m)\overrightarrow{AG_m}=m\overrightarrow{AB}+2m\overrightarrow{AC}=m(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$

Si $m = -1$, on a: $(-2)\overrightarrow{AG_{-1}}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=-(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$

Finalement: $(1+3m)\overrightarrow{AG_m}=2m\overrightarrow{AG_{-1}}$ (2)

(A5) $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle **Vraie**

En faisant $M = B$ et $m=\frac{-1}{2}$ dans la relation (1) de (A4), on obtient: $(\frac{-1}{2})\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$

Les droites $(BG_{-\frac{1}{2}})$ et *(AC)* sont donc parallèles et comme $(AC) \perp (AB)$, on obtient: $(BG_{-\frac{1}{2}})\perp(AB)$

Comme $I \in (AB)$, le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est rectangle en B.

(A6) Pour tout point P de (AG_{-1}) , il existe un réel m tel que $P=G_m$ **Fausse**

Soit P un point de (AG_{-1}) . Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AG_{-1}}$

D'après la relation (2) de (A4), on cherche m distinct de $\frac{-1}{3}$ tel que $k=\frac{2\text{m}}{1+3\text{m}}$

On en tire: $k(1 + 3m) = 2m$, puis, $m(2 - 3k) = k$.

Si $k=\frac{2}{3}$, il n'y a pas de solution.

Il existe un point de (AG_{-1}) qui n'est pas un des points G_m de l'énoncé, le point P défini par $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG_{-1}}$

VI- 2- Centres étrangers juin 2005

$ABCD$ tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles isocèles en A.
On pose $AB = AC = AD = a$..
Conséquence: $BC = BD = CD = a\sqrt{2}$. BCD est un triangle équilatéral. Son centre de gravité A_1 est donc aussi l'orthocentre du triangle BCD.

1) $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1})\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ car, $\overrightarrow{BA_1} \perp \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}) = 0$, car, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

Même démarche avec $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}$

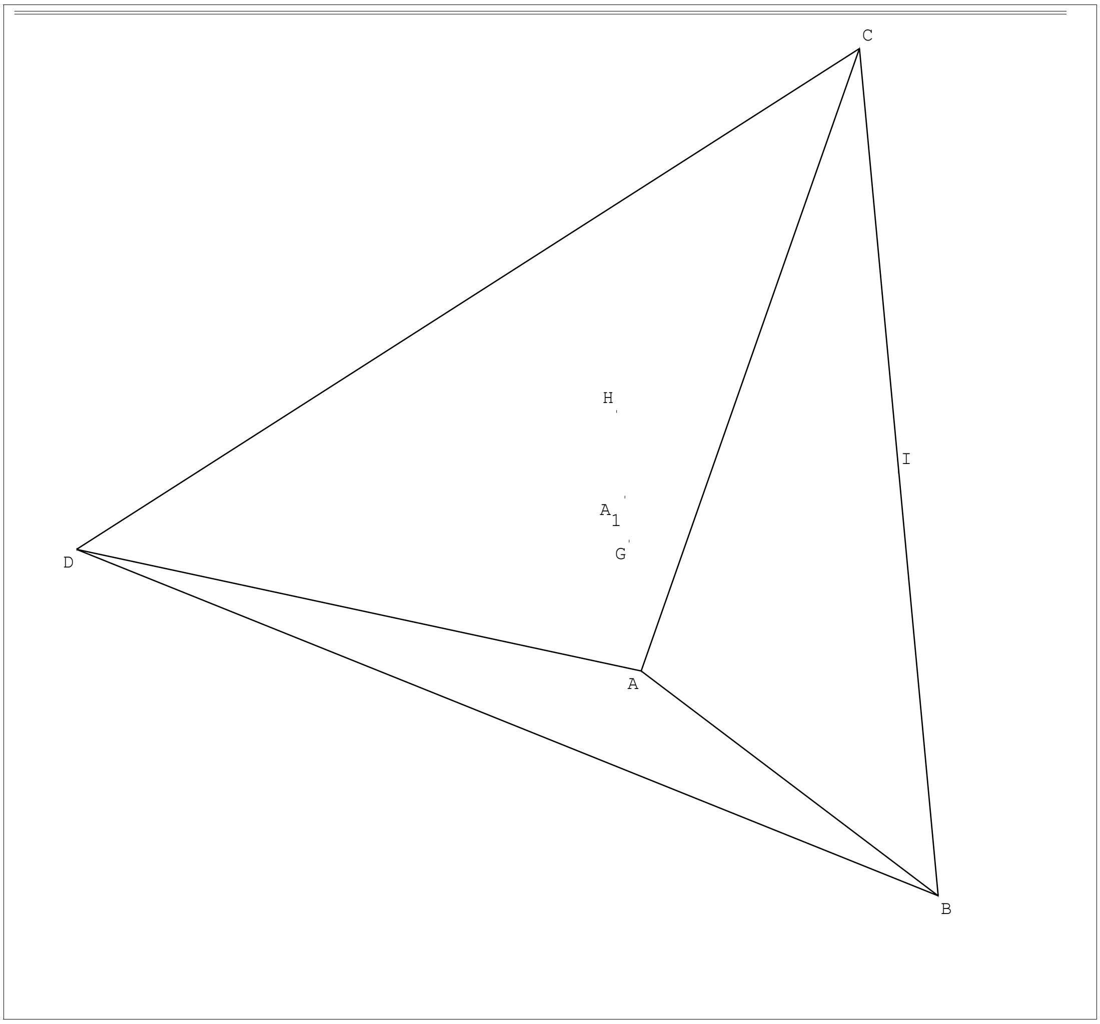
(AA_1) est donc orthogonale au plan (BCD), car, (BC) et (CD) sont deux droites sécantes du plan (BCD).

2) Volume du tétraèdre V

$V=\frac{1}{3}\text{Aire}(ABC)\times AD=\frac{1}{3}\text{Aire}(BCD)\times AA_1$ On a donc: $AA_1=\frac{\text{Aire}(ABC)}{\text{Aire}(BCD)}\times AD$

$\text{Aire}(ABC)=\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{a^2}{2}$ $\text{Aire}(BCD)=\dfrac{BC\times CD\sin\frac{\pi}{3}}{2}=\dfrac{(a\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$AA_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}a$ Remarque: $V=\dfrac{a^3}{6}$



3) a) G isobarycentre de $ABCD$ et A_1 isobarycentre de BCD

Le théorème d'associativité amène G le barycentre de { $(A;1);(A_1;3)$ }, $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$ donc, $G\in[AA_1]$

et $AG=\dfrac{3}{4}AA_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$

b) (i) $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=2\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$ équivaut à (rappel: I milieu de $[BC]$)

$\|4\overrightarrow{MG}\|=2\|2\overrightarrow{MI}\|$ équivaut à $MG=MI$.

L'ensemble des points M vérifiant (i) est le plan médiateur de $[GI]$

4) H symétrique de A par rapport à G (donc, $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{GA}$ ou encore $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{GA}$)

a) Pour tout M de l'espace, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

En particulier, $M=A$ donne: $4\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ ce qui prouve que $4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$

b) $HC^2-HD^2=(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HD})\cdot(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD})=\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD})$

Or, $\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}=4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$

Conclusion: $HC^2-HD^2=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA}$

c) Comme $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{BA}$, on a: $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$, d'où, $HC^2 = HD^2$
HC et *HD,*étant des longueurs, l'égalité des carrés implique celle des longueurs.

VI- 3- Asie Juin 2003

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
$A(3 ; -2 ; 2)$; $B(6 ; 1 ; 5)$; $C(6 ; -2 ; -1)$

Partie I

donc $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ et $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$

1) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times3 + 3\times0 + 3\times(-3) = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, d'où *ABC* est un triangle rectangle en *A*

2) $\mathscr{P}$ plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$

Un vecteur normal de *P* est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AB} = 3\ \vec{n}$, la droite (*A*B) est orthogonale à $\mathscr{P}$.
D'autre part, les coordonnées de *A* vérifient l'équation de $\mathscr{P}$.
$\mathscr{P}$ est donc orthogonal à (*AB*) et passe par *A*.

3) $\mathscr{P}' \perp (AC)$ et passant par *A*.
$M(x ; y ; z) \in \mathscr{P}'$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ si et seulement si $3(x-3) + 0(y-2) + 3(z-2) = 0$,

Une équation de (P') est $x - z - 1=0$

4) Un point $M(x ; y ; z) \in \Delta$ intersection de (*P*) et (P') si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0\end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} x=t \\ y=-2t+4 \\ z=-1+t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

Remarquer: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$, un vecteur directeur de Δ, est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Lorsque $t=3$, on obtient les coordonnées de *A*

Partie II

1) *D(0 ; 4 ;* -1).

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$, Comme $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = ... = 0$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = ... = 0$, la droite (*AD*) est orthogonale au plan (*ABC*)

2) Volume de *ABCD* est $V = \frac{1}{3}$ *Aire(ABC)×AD* puisque *AD* est la longueur de la hauteur relative à la base *ABC*.

ABC rectangle en *A*, d'où : Aire (*ABC*) = $\frac{AB\times AC}{2} = \frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

$AD = ... = 3\sqrt{6}$

$V = ... = 27$

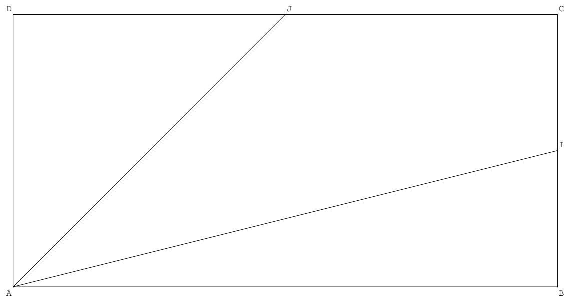
3) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = DB \times DC \cos \widehat{BDC}$, et $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = 6\times6 + (-3)\times(-6) + 6\times0 = 54$,

$DB = ... = 9$ et $DC = ... = 6\sqrt{2}$ $\cos \widehat{BDC} = ... = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc, $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$

4) a) Aire (BDC)= $\frac{DC\times BD\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \ldots = 27$

b) $V=\frac{1}{3}\text{Aire}(BDC)\times h$, d'où, $h=3$

VI- 4- Énoncé (Médianes)



I- $ABCD$ est un rectangle tel que $AB=2$ et $AD=1$
I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[DC]$.
Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$ à 0,1 degré près.

II-

a) I étant le milieu de [AB], démontrer que pour tout point M,

$$(i) \qquad MA^2+MB^2=2\text{MI}^2+\frac{1}{2}AB^2$$

$$(ii) \qquad \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$$

b) Soit le segment [AB] de longueur 4

Déterminer les ensembles suivants:

(E_1) : ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=20$

(E_2) : ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2+MB^2=20$

Corrigé

I- Évaluons le produit scalaire: $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$

I, étant le milieu de [BC], on a: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

J, étant le milieu de [DC], on a: $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

D'autre part, ABCD étant un rectangle: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ *et* $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=0$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

D'où, $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=0+\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}BC^2+0=\frac{5}{2}$

Comme $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=AI\cdot AJ\cdot\cos\widehat{IAJ}$, et que, $AI^2=\frac{17}{4}$, $AJ^2=2$, on en déduit: $\cos\widehat{IAJ}=\frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}$

La calculatrice donne: 31,0° à 0,1° par excès.

II-

a) $MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2=MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+IA^2$ Cette relation est vraie quel que soit le point I.

De même, $MB^2=MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+IB^2$

Or, I milieu de [AB], d'où, $IA^2=IB^2=\frac{1}{4}AB^2$ et $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

La somme donne donc: $2\text{MI}^2+2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+2\text{IA}^2=2\text{MI}^2+\frac{1}{2}AB^2$ *(i)* est prouvée

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=MI^2-IA^2=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$ *(ii)* est prouvée

b) (E_1) : ensemble des points M de **l'espace** tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=20$

D'après le II a), on a: $MI^2-\frac{1}{4}\cdot 4^2=20$. $MI^2=24$

E_1 est la sphère de centre I et de rayon 2 $\sqrt{6}$

(E_2) : ensemble des points M de **l'espace** tels que $MA^2+MB^2=20$

D'après le II a), on a: $2\text{MI}^2+\frac{1}{2}\cdot 4^2=20$. $MI^2=6$

E_2 est la **sphère** de centre I et de rayon $\sqrt{6}$

VI-5- Énoncé (Distance d'un point à une droite)

1) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

(a) Soient *u, v, w,* x_0, y_0 des nombres réels tels que $u^2+v^2\neq 0$.

Établir une formule donnant la distance du point M_0 de coordonnées $(x_0\,;\,y_0)$ à la droite d'équation $ux+vy+w=0$

(b) Soient *a* et *b* des réels strictement positifs, on considère les points $A(a,0)$ et $B(0,b)$.

Calculer la distance du point *O* à la droite (AB)

2) Soient *a, b, c* des réels strictement positifs.

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$.

(a) Calculer la distance de *C* à la droite (AB) .

(b) Montrer la relation $(Aire(ABC))^2=(Aire(OAB))^2+(Aire(OBC))^2+(Aire(OCA))^2$

Corrigé

1) (a) Soit $A(x_A\,;\,y_A)$ un point de la droite $\triangle$ d'équation $ux+vy+w=0$, on a donc: $ux_A+vy_A+w=0$

Soit *H* le projeté orthogonal de M_0 sur $\triangle$.

Soit $\vec{n}(u,v)$ un vecteur normal de $\triangle$. On a donc: $\|\vec{n}\|=\sqrt{u^2+v^2}$ (i)

On a: $|\overrightarrow{M_0H}\cdot\vec{n}|=M_0H\cdot\|\vec{n}\|$ (ii) (vecteurs colinéaires)

D'autre part: $\overrightarrow{M_0H}\cdot\vec{n}=(\overrightarrow{M_0A}+\overrightarrow{AH})\cdot\vec{n}$

Comme $\overrightarrow{AH}\perp\vec{n}$, on a: $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}=0$

Finalement: $\overrightarrow{M_0H}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{M_0A}\cdot\vec{n}$ (iii)

D'après la relation analytique du produit scalaire: $\overrightarrow{M_0A}\cdot\vec{n}=u(x_A-x_0)+v(y_A-y_0)$ (iv)

Comme $ux_A+vy_A+w=0$, on obtient dans *(iv)*: $\overrightarrow{M_0A}\cdot\vec{n}=-ux_0-vy_0-w$

Finalement: d'après *(iii)* et *(ii)* et *(i)*: $M_0H=\frac{|-ux_0-vy_0-w|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|ux_0+vy_0+w|}{\sqrt{u^2+v^2}}$

(b) Une équation de la droite *(AB)* est:

Une méthode: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$, d'où, un vecteur normal à *(AB)* est $\vec{n}\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}$

Une équation de *(AB)* est donc: $bx+ay+w=0$, comme $A\in(AB)$, on en déduit: $w=-ab$

$bx+ay-ab=0$ est une équation de *(AB)*

Une autre méthode: Équation réduite de *(AB)*: $y=mx+p$. Le coefficient directeur $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-\frac{b}{a}$ et l'ordonnée à l'origine $p=b$ d'où, $y=-\frac{b}{a}x+b$ qui équivaut à $bx+ay-ab=0$

Une autre méthode: $ux+vy+w=0$ avec $u\cdot a+w=0$ et $v\cdot b+w=0$

On en déduit: $u\cdot a=v\cdot b=-w$.
Il suffit de prendre $u=b$ et $v=a$ pour avoir l'égalité. En ce cas: $w=-ab$.
La distance de *O* à *(AB)* est: $d=\frac{|b\times 0+a\times 0-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ puisque *a* et *b* sont deux réels strictement positifs.
Remarque et complément: *Pour calculer la distance de O à (AB), on peut considérer le triangle rectangle OAB et calculer la hauteur h issue de O à l'aide des aires.*

On a d'une part: Aire de (OAB) égale à $\frac{ab}{2}$ *(a et b positifs)*

et d'autre part : Aire de OAB égale à $\frac{h\times AB}{2}$ *avec* $AB=\sqrt{a^2+b^2}$

ce qui donne $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2) (a) Calculer la distance de *C* à la droite (AB) .
Soit *H* le projeté orthogonal de *C* sur *(AB)*
Dans le triangle *HOC* rectangle en *O*, on a: $OH^2+OC^2=CH^2$

$CH^2=\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+c^2=\frac{a^2\ b^2+a^2\ c^2+b^2\ c^2}{a^2+b^2}$ d'où, $CH=\sqrt{\frac{a^2\ b^2+a^2\ c^2+b^2\ c^2}{a^2+b^2}}$

(b) Montrer la relation $(Aire(ABC))^2=(Aire(OAB))^2+(Aire(OBC))^2+(Aire(OCA))^2$

L'aire de *ABC* vaut: $\frac{AB\times CH}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{\frac{a^2\ b^2+a^2\ c^2+b^2\ c^2}{a^2+b^2}}}{2}=\frac{\sqrt{a^2\ b^2+a^2\ c^2+b^2\ c^2}}{2}$

L'aire de *OAB* vaut: $\frac{OA\times OB}{2}=\frac{ab}{2}$. L'aire de *OBC* vaut: $\frac{OC\times OB}{2}=\frac{bc}{2}$.

L'aire de *OCA* vaut: $\frac{OA\times OC}{2}=\frac{ac}{2}$

En élevant au carré et en multipliant par 4, on vérifie l'égalité.

VI-6- Exercice 3 donné en avril 2005 à Pondichéry

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1,0,2)$, $(1,1,4)$ et $(-1,1,1)$.

1. *a.* Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3,4,-2)$.
   Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.
   a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
   b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.
   a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.
   b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C.
   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G ?

Corrigé de l'exercice 3 (Pondichéry 2005)

1 a) $A(1;0;2), B(1;1;4), C(-1;1;1)$ d'où $\overrightarrow{AB}(0;1;2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$

Il suffit de remarquer que la proportionnalité entre les coordonnées n'est pas vérifiée: $\frac{0}{2}\neq\frac{1}{1}$ pour prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B, C ne sont pas alignés (ils définissent donc un plan)

b) $\vec{n}(3;4;-2)$

Calculons: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times0+4\times1+(-2)\times2=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-2)+4\times1+(-2)\times(-1)=0$

Les produits scalaires étant nuls, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ d'une part, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ d'autre part sont orthogonaux.

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Soit $M(x;y;z)$ un point du plan (ABC), on a: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$, d'où,

$3\times(x-1)+4\times(y-0)+(-2)\times(z-2)=0$

Une équation de (ABC) est $3x+4y-2z+1=0$

2 a) $(P_1): 2x+y+2z+1=0$ et $P_2: x-2y+6z=0$

Soient $\vec{n_1}$ un vecteur normal à $P_1: \vec{n_1}(2;1;2)$ et $\vec{n_2}$ un vecteur normal à $P_2: \vec{n_2}(1;-2;6)$

Comme $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2}$, $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans P_1 et P_2 sont donc sécants.
Leur intersection est une droite (D)
Soit $M(x;y;z)$ un point commun à P_1 et P_2 (*M* est un point de (*D*)). Ses coordonnées vérifient les deux équations: $\begin{cases} 2x+y+2z+1=0 & (1) \\ x-2y+6z=0 & (2) \end{cases}$
Posons $x=\alpha$ et exprimons *y* et *z* en fonction de α .
En faisant $3(1)-(2)$, on tire: $5x+5y+3=0$, d'où, $y=-\alpha-\frac{3}{5}$
En faisant $2(1)+(2)$, on tire: $5x+10z+2=0$ d'où $z=\frac{-1}{2}\alpha-\frac{1}{5}$

Un système d'équations paramétriques de (*D*) est $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-\alpha-\frac{3}{5} \\ z=\frac{-1}{2}\alpha-\frac{1}{5} \end{cases}$

b) Un vecteur directeur de (*D*) est donc: $\vec{u}\left(1;-1;-\frac{1}{2}\right)$

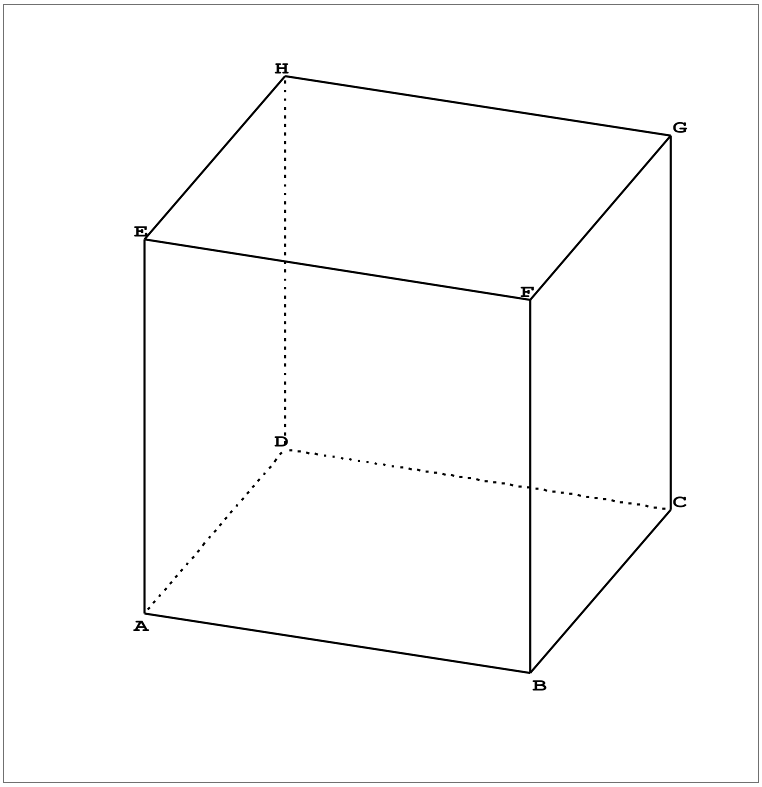
Or, $\vec{n}\cdot\vec{u}=3\times1+4\times(-1)+(-2)\times(\frac{-1}{2})=0$ (*D*) n'est donc pas sécante au plan (*ABC*)

Le point $E\left(0;-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$ est un point commun à (*D*) ($\alpha=0$) et au plan (*ABC*) car,
$3\times0+4\times\left(\frac{-3}{5}\right)-2\times\left(\frac{-1}{5}\right)+1\neq0$
La droite (*D*) n'est pas incluse dans le plan (*ABC*)
(D) est strictement parallèle au plan (*ABC*)
3 a) $t\geq0$, *G* est le barycentre du système $\{(A,1),(B,2),(C,t)\}$
L'existence de *G* est assurée par le fait que t étant positif ou nul, la somme $1+2+t$ est strictement positive.
Les coordonnées de *I* barycentre du système $\{(A,1),(B,2),\}$ sont:
$x_I=\frac{1.x_A+2.x_B}{1+2}$, $y_I=\frac{1.y_A+2.y_B}{1+2}$, $z_I=\frac{1.z_A+2.z_B}{1+2}$
On trouve $I\left(1;\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right)$.
D'après la loi d'associativité des barycentres, *G* est le barycentre du système $\{(I,3),(C,t)\}$,d'où,
$\vec{IG}=\frac{t}{3+t}\vec{IC}$
Soit $f:t\mapsto\frac{t}{3+t}$ définie sur $[0;+\infty[$ On a: $f(t)=\frac{3+t-3}{3+t}=1-\frac{3}{3+t}$
f est donc une fonction continue, strictement croissante définie sur $[0;+\infty[$.
f est donc une bijection de $[0;+\infty[$ sur $\left[f(0);\lim_{t\to+\infty}f(t)\right[=[0;1[$

On vient de montrer que lorsque *t* parcourt l'intervalle des réels positifs (0 inclus), le nombre $\frac{t}{1+t}$ parcourait l'intervalle $[0;1[$ fermé en 0, ouvert en 1. Tous les points du segment [*IC*] sauf *C* sont donc atteints.
L'ensemble des points *G* est donc le segment [*IC*] privé de *C*.
Le milieu *J* de [*IC*] est confondu avec *G* lorsque $\frac{t}{3+t}=\frac{1}{2}$, donc, lorsque $t=3$
(Il suffit de faire l'égalité des coefficients de *I* et *C* pour que *G* soit l'isobarycentre des points *I* et *C*)

VI-7- Exercice 2 (Nouvelle-Calédonie novembre 2004)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.)
Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe (page 4/4).
Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.
Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.
Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent 1/2 point.



Soit ABDEFGH un cube de côté 1.
On choisit le repère orthonormal $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$
On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].
L est le barycentre de {(A, 1) ; (B, 3)}.
Soit (π) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

1. Les coordonnées de L sont :

a. $\left(\frac{1}{4};0;0\right)$ **b.** $\left(\frac{3}{4};0;0\right)$ **c.** $\left(\frac{2}{3};0;0\right)$

2. Le plan (π) est le plan

a. (GLE) **b.** (LEJ) **c.** (GFA)

3. Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées:

a. $\left(1;0;\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(1;0;\frac{1}{5}\right)$ **c.** $\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$

4. a. Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.
b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.
c. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.

5. Le volume du tétraèdre FIJM est :

a. $\frac{1}{36}$ **b.** $\frac{1}{48}$ **c.** $\frac{1}{24}$

Corrigé de l'exercice 2 (Nouvelle-Calédonie novembre 2004)

ABCDEFGH cube de côté 1
repère orthonormal $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$
I milieu de $[EF]$, J milieu de $[FG]$, L barycentre de $\{(A,1);(B,3)\}$
Soit (π) le plan d'équation $4x-4y+3z-3=0$

Travail préliminaire:

Coordonnées de $B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;1;0), E(0;0;1), F(1;0;1), G(1;1;1), H(0;1;1)$
$I(\frac{1}{2};0;1), J(1;\frac{1}{2};1)$

1) ***Réponse b)*** $L(\frac{3}{4};0;0)$, car, L barycentre de $\{(A,1);(B,3)\}$ équivaut à $\overrightarrow{AL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

2) ***Réponse a)*** Les coordonnées de G, de L et de E vérifient l'équation de (π).
Les coordonnées de J et de A ne vérifient pas l'équation de (π).

3) ***réponse c)***.
Le plan (π') parallèle à (π) et passant par I a pour équation: $4x-4y+3z+d=0$
Comme $I\in(\pi')$, on a: $2+0+3+d=0$, d'où, $d=-5$
Une équation de (π') est: $4x-4y+3z-5=0$

La droite (EF) a pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

En remplaçant dans l'équation de (π') x par 1 et y par 0, on obtient $M(1;0;\frac{1}{3})$

4) ***réponse a) et réponse b)***

(EL) est dirigée par $\vec{EL}(\frac{3}{4};0;-1)$

Un système d'équations paramétriques de (EL) est: $\begin{cases} x=\frac{3}{4}\alpha \\ y=0 \\ z=1-\alpha \end{cases}$

Le point N a donc pour coordonnées $N(1;0;1-\frac{4}{3})$, $N(1;0;-\frac{1}{3})$

(IM) est dirigée par $\vec{IM}=(\frac{1}{2};0;-\frac{2}{3})$.

Comme $\frac{3}{2}\vec{IM}=\vec{EL}$, les droites (EL) et *(IM)* sont parallèles.

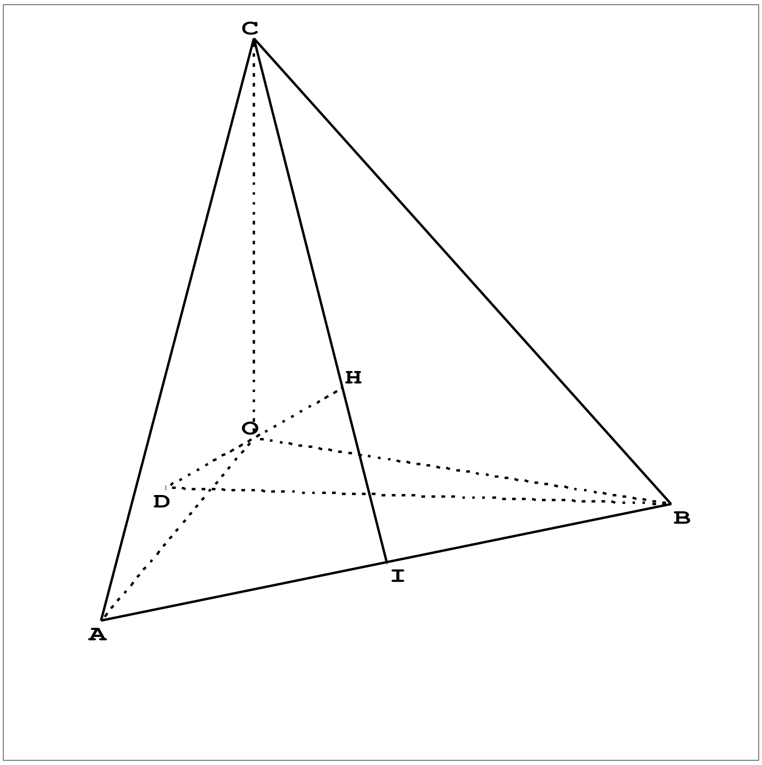
5) ***réponse a)***. comme (FI) , (FJ) sont perpendiculaires, l'aire du triangle *FIJ* est $S=\frac{FI\times FJ}{2}=\frac{1}{8}$

Comme (FM) est perpendiculaire au plan (FIJ) , le volume du tétraèdre est : $\frac{S\times FM}{3}=\frac{1\times 2}{8\times 3\times 3}=\frac{1}{36}$

VI-8- Exercice 2 France juin 2003

Soient *a* un réel strictement positif et *OABC* un tétraèdre tel que : · *OAB*, *OAC*, *OBC* sont des triangles rectangles en *O*.

· *OA* = *OB* = *OC* = *a* On appelle *I* le pied de la hauteur issue de *C* du triangle *ABC*, *H* le pied de la hauteur issue de *O* du triangle *OIC* et *D* le point de l'espace défini par $\vec{HO}=\vec{OD}$



1. Quelle est la nature du triangle *ABC* ?
2. Démontrer que les droites (*OH*) et (*AB*) sont orthogonales, puis que *H* est l'orthocentre du triangle *ABC*.
3. **Calcul de *OH*.**
a. Calculer le volume *V* du tétraèdre *OABC* puis l'aire *S* du triangle *ABC*.
b. Exprimer *OH* en fonction de *V* et de *S*,
en déduire que $OH = a\frac{\sqrt{3}}{3}$

.
4. **Étude du tétraèdre *ABCD*.**
L'espace est rapporté au repère orthonormal
$\left(O; \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$
a. Démontrer que le point *H* a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$.
b. Démontrer que le tétraèdre *ABCD* est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre *ABCD*.
Démontrer que Ω est un point de la droite (*OH*) puis calculer ses coordonnées.

Corrigé de l'exercice 2 (bac juin 2003)
1) Les triangles *OAB*, *OAC*, *OBC* sont isométriques. (Un angle égal (angle droit en *O*) compris entre des côtés de même mesure (*OA*=*OB*=*OC*)).
On a donc: $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré ou théorème de Pythagore...)

ABC est un triangle équilatéral.

2) *Une méthode*: ***Avec le produit scalaire***: Évaluons $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IH})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}$

Or, *I,* étant le pied de la hauteur issue de *C* dans le triangle équilatéral est le milieu de [*AB*] et par conséquent la médiane (*OI*) du triangle *OAB* isocèle en *O* est aussi une hauteur relative à [*AB*], d'où, (*OI*) est perpendiculaire à (*AB*). On a donc: $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

H, étant sur (*CI*) hauteur issue de *C* du triangle (*ABC*), on en déduit (*IH*) perpendiculaire à (*AB*). On a donc: $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

Finalement: $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. Ce qui prouve l'orthogonalité des droites (*OH*) et (*AB*).

Une autre méthode: ***Avec un plan médiateur*****:**

OA=*OB*, *IA*=*IB*, *CA*=*CB* et *O*, *I*, *C* sont des points non alignés.

Le plan (*OIC*) est donc le plan médiateur de [*AB*].

(*AB*) est par conséquent orthogonale au plan (*OIC*), donc, à toute droite incluse dans ce plan, en particulier, (*OH*)

Pour montrer que *H* est l'orthocentre de *ABC*, il reste à montrer que (*AH*) est perpendiculaire à (*BC*)

Une méthode: ***Avec le produit scalaire***: Évaluons $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}$

Or, (*AO*) étant perpendiculaires à deux droites sécantes (*OB*) et (*OC*) est perpendiculaire au plan (*OBC*), donc, est orthogonale à toute droite de (*OBC*). On a donc: $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

On a aussi: (*OH*) perpendiculaire à (*CI*) et (*OH*) orthogonale à (*AB*), d'où, (*OH*) est perpendiculaire au plan (*ABC*) et donc, est orthogonale à toute droite de (*ABC*). On a donc: $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

Finalement: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

Une autre méthode: (*OH*) est orthogonale à (*CI*) et (*AB*) droites sécantes du plan (*ABC*), donc, orthogonale au plan (*ABC*) et en particulier à (*BC*).

On a aussi (*BC*) orthogonale à (*AO*), donc, (*BC*) est perpendiculaire au plan (*AOH*), et, en particulier (*BC*) orthogonale à (*AH*)

Conclusion: *H,* étant le point d'intersection de deux hauteurs (*CI*) et (*AH*) du triangle *ABC* est l'orthocentre de ce triangle.

3) Calcul de *OH*.

a) Le volume *V* du tétraèdre est $V=\frac{1}{3}B\times h$ où *B* est l'aire d'une base et *h* la hauteur relative à cette base.

En prenant la base *AOB* et la hauteur *CO*, on a: $V=\frac{1}{3}\frac{AO\times BO}{2}\times CO=\frac{1}{6}a^3$

L'aire de *ABC* est $S=\frac{AB\times CI}{2}=\frac{a\sqrt{2}\times a\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (rappel: la hauteur *h* d'un triangle équilatéral de côté *c* vaut $\frac{c\sqrt{3}}{2}$)

b) En prenant la base *ABC* et la hauteur correspondante *OH*, on a: $V=\frac{1}{3}S\times OH$, soit $OH=\frac{3\mathrm{V}}{S}$

On en tire: $OH=\frac{3\frac{1}{6}a^3}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=a\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) a) Par choix du repère, on a: *A(a,0,0)*, *B(0,a,0)* et *C(0,0,a)*

H, étant l'orthocentre du triangle équilatéral *ABC*, est aussi son centre de gravité et par conséquent:

$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ Ainsi: $H(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3})$

b) Par construction , *D* est le symétrique de *H* par rapport à *O*, d'où, $D(\frac{-a}{3};-\frac{a}{3};-\frac{a}{3})$

$DA=\sqrt{(a+\frac{a}{3})^2+(\frac{a}{3})^2+(\frac{a}{3})^2}=a\sqrt{2}$ $DB=\sqrt{(\frac{a}{3})^2+(a+\frac{a}{3})^2+(\frac{a}{3})^2}=a\sqrt{2}$ $DC=\sqrt{(\frac{a}{3})^2+(\frac{a}{3})^2+(a+\frac{a}{3})^2}=a\sqrt{2}$

On a bien: $AB=AC=BC=AD=BD=CD=a\sqrt{2}$

c) ***Observations géométriques***:

* *H* est le centre du cercle circonscrit à *ABC* (car, équilatéral).

Ω , étant le centre de la sphère circonscrite à *ABCD*, on a: (ΩH) perpendiculaire au plan (*ABC*), or, (*OH*) est perpendiculaire à ce plan (*ABC*). L'unicité de la perpendiculaire en un point à un plan prouve que Ω est sur (*OH*).

** ABCD, étant un tétraèdre régulier, Ω est l'isobarycentre de *A, B*, *C*, *D* et par conséquent:

$4\overrightarrow{O\Omega}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

Or, *H*, étant l'isobarycentre des points *A*, *B*, *C*, on a: $3\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

On a aussi: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OH}$ d'où, $\overrightarrow{O\Omega}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$ (ce qui permet de conclure)

*** Ω , étant le centre de la sphère circonscrite à *ABCD*, est équidistant des points *A*, *B*, *C*, *D*.

Ω est donc un point du plan médiateur de [*AB*], soit, (*OCI*) (voir 2)

Ω est donc un point du plan médiateur de [*AC*], soit, (*ODH*) ($OA=OC$, $DA=DC$, $HA=HC$ (*ABC* équilatéral, l'orthocentre *H* est centre du cercle circonscrit).

Ω est donc un point de la droite d'intersection des plans (*OCI*) et (*ODH*), donc, de (*OH*) (*H* est un point de (*CI*))

Remarque: (*AOH*) est le plan médiateur de [*BC*] et coupe les plans précédents selon (*OH*). Il est nécessaire pour déterminer Ω de faire intervenir le point *D*.

On en déduit qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{O\Omega}=\lambda\overrightarrow{OH}$

Ω a pour coordonnées $(\lambda\frac{a}{3};\lambda\frac{a}{3};\lambda\frac{a}{3})$

Comme $\Omega D^2=\Omega A^2$, on obtient la relation: $3(\frac{-a-\lambda a}{3})^2=(a-\lambda\frac{a}{3})^2+2(-\lambda\frac{a}{3})^2$

$3(1+\lambda)^2=(3-\lambda)^2+2\lambda^2$

$3(1+2\lambda+\lambda^2)=9-6\lambda+\lambda^2+2\lambda^2$

$\lambda=\frac{1}{2}$ Ω $(\frac{a}{6};\frac{a}{6};\frac{a}{6})$

Ω est le milieu de [*OH*]

***** *Autre méthode (dans un repère orthonormal)*: Posons (*x,y,z*) les coordonnées de Ω

On peut poser trois équations: $\Omega A^2=\Omega B^2$ (1)

$\Omega A^2 = \Omega C^2$ (2)

$\Omega A^2 = \Omega D^2$ (3)

(1) donne $x = y$ (faire le calcul simplification évidente)

(2) donne $x = z$ (faire le calcul simplification évidente)

(3) donne $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{a}{3}\right)^2$

Comme $x = y = z$, (3) se simplifie bien et donne $x = \frac{a}{6}$ ....