FONCTIONS AFFINES

Prévoir des feuilles pour chercher, rédiger le cours, faire des exercices, ...

I- Introduction : rappels et activités

Objectif: Découvrir qu'un même **modèle mathématique** permet d'étudier des phénomènes différents.

I-1- Des exemples

I-1-1- Exemple: abonnement en bibliothèque

Dans une bibliothèque, l'abonnement annuel est de 10 €. Pour chaque livre emprunté, on paie 0,5 €.
On note h la fonction exprimant la dépense annuelle pour un abonné de cette bibliothèque.
Un lecteur a emprunté x livres cette année. Quelle est sa dépense $h(x)$?

I-1-2- Exemple: périmètre du disque

On note R le rayon d'un disque et p la fonction exprimant le périmètre du disque.
Quel est le périmètre $p(R)$ d'un disque de rayon R?

I-1-3- Exemple: allongement d'un ressort

On dispose d'un ressort de longueur 10 cm. Pour une masse m comprise entre 0 et 100 g accrochée au ressort, l'allongement du ressort est proportionnel à cette masse.
On note l la fonction exprimant la longueur du ressort.
On a accroché une masse m. Quelle est la longueur $l(m)$ du ressort?

I-1-4- Bilan

On a ainsi obtenu trois fonctions.

Ces trois fonctions peuvent s'écrire sous la forme: $f : x \mapsto ...$

et pour chaque exemple, préciser ce qu'est " f ", sur quel intervalle f est définie, ce qu'est " x " et " $f(x)$ ".
Rappeler le nom des fonctions qui peuvent s'écrire ainsi.

I-2- Proportionnalité

I-2-1- Analyse des exemples

***Vocabulaire et notation*:**

Lorsqu'une valeur variable t passe d'une valeur t_1 à une valeur t_2, la différence $t_2 - t_1$ est l'***accroissement*** de la variable t.
On note $\Delta t = t_2 - t_1$

Conclusion:

Montrer que dans ces trois exemples, l'accroissement des valeurs images prises par la fonction est proportionnelle à l'accroissement de la variable:

I-2-2- Qu'en est-il de la réciproque?

Exemple: degré Celsius et degré Fahrenheit

Il existe différentes échelles pour mesurer la température, en particulier une échelle graduée en degrés Celsius (°C) et une échelle graduée en degrés Fahrenheit (°F).
On sait que l'eau gèle à 0°C ou 32°F et qu'elle bout à 100°C ou 212°F.
Établir la formule qui permet de convertir les °C en °F.

II- Cours

II-1- Définition d'une fonction affine

II-1-1- *Définition (par cœur)*

Soit a et b deux réels.
Les **fonctions affines** sont les fonctions de la forme $x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels constants.

II-1-2- Cas particuliers: fonction linéaire, fonction constante

1) Lorsque le réel b est nul ($b = 0$), on dit que f est une ***fonction linéaire***. Elle traduit une situation de proportionnalité (cf. exemple 2). f: $x \mapsto ax$

Exemple :
R est la résistance d'un circuit exprimée en ohms (Ω). Exprimer la différence de potentiel U (en volt) en fonction de l'intensité du courant i (en ampères).

2) Lorsque le coefficient a est nul ($a = 0$), on a une fonction ***constante***. f : $x \mapsto b$

Exemple :
Dans un repère orthonormal, on a : $A(0 ; 2)$, $B(4 ; 2)$ et $M(x, 0)$ avec $x \geqslant 0$.
On note $\mathscr{A}(x)$, l'aire du triangle ABM. Calculer $\mathscr{A}(x)$.

II-1-3 Exercices:

1) affine ou non?

Parmi les fonctions f, g, h, k, l, m , n, p suivantes, indiquer les fonctions affines: (Justifier vos réponses)
$f(x) = \sqrt{x} + 1$, $g(x) = \sqrt{2}\, x - 1$, $h(t) = -\dfrac{1}{2} t + 3$, $k(t) = -\dfrac{1}{2t} + 3$, $l(x) = \dfrac{-5x+6}{3}$, $m(x) = \dfrac{6+x}{x}$,
$n(x) = t^2x + 1$ et $p(t) = t^2x + 1$

2) affine? oui, mais laquelle?

Déterminer la fonction **affine** f telle que $f(-1) = 3$ et $f(3) = 5$.

II-2- Caractérisation d'une fonction affine

***Théorème**: (par cœur)*

Une fonction f est une fonction affine **si et seulement si** l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable.
Autrement dit:
Une fonction f est une fonction affine **si et seulement si** , pour tous réels x_1 et x_2 distincts, on a:
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$ où a est une constante réelle.

Preuve:

Sens direct: On sait que f une fonction affine, donc, ...

Sens réciproque: On sait qu'une fonction f vérifie la propriété: pour tous réels x_1 et x_2 distincts, on a: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$ où a est une constante réelle.

En prenant, $x_1 = 0$ et $x_2 = x$, et en posant $f(0) = b$, on a: ....

II-3- Variation d'une fonction affine

II-3-1- Étude

On suppose $x_1 < x_2$.
Quel est le signe de $x_2 - x_1$? .
Or, $f(x_2) - f(x_1) =$ ....
En déduire l'ordre de $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en distinguant deux cas: $a > 0$ et $a < 0$.

II-3-2- Théorème

***Théorème:** (**par cœ**ur)*

Si a est strictement positif alors la fonction affine: $f\colon x \mapsto ax + b$ est .... sur ....

Si a est strictement négatif alors la fonction affine: $f\colon x \mapsto ax + b$ est .... sur ....

II-4 Représentation graphique d'une fonction affine (par cœur)

(À admettre: la démonstration sera faite dans un autre chapitre)

La représentation d'une fonction affine $f\colon x \mapsto ax + b$ dans un repère $(O; I, J)$ est une droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées d'équation réduite $y = ax + b$.

Le réel a est le **coefficient directeur** de la droite. $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_a} = \dfrac{\text{« différence des ordonnées »}}{\text{« différence des abscisses »}}$

Le réel b est **l'ordonnée à l'origine** de la droite.

Exercices:

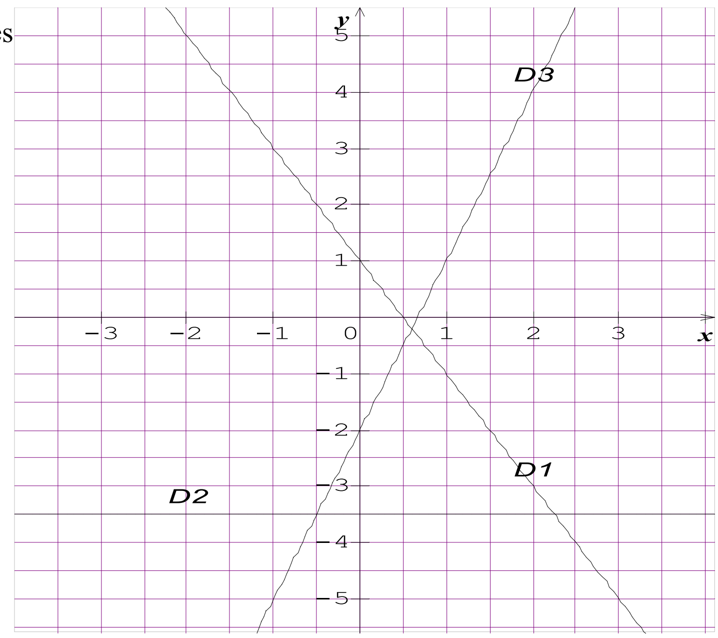
1) Tracer

Tracer dans un repère la représentation graphique des fonctions f, g, h définies par:

$f : x \mapsto 2x + 1$, $g : x \mapsto -x + 3$, $h\colon x \mapsto \dfrac{x+5}{2}$

2) Reconnaître

Sur le graphique ci-dessous, déterminer les fonctions affines f_1, f_2, f_3 représentées respectivement par D_1, D_2, D_3



Les méthodes sont les habitudes de l'esprit et les économies de la mémoire. Rivarol

II-5- Étude du signe de l'expression ax + b. Tableau de signes

II-5-1- Théorème:

a étant un réel non nul, l'expression $ax+b$ s'annule en $-\frac{b}{a}$ en changeant de signe.

Cas où a>0					
x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de ax+b		$-$	0	$+$	

Cas où a<0					
x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de ax+b		$+$	0	$-$	

II-5-2- Des démonstrations

Démontrer ce théorème
* en utilisant la représentation graphique d'une fonction affine.
** en utilisant la variation d'une fonction affine
*** en utilisant la résolution d'inéquations.

II-5-3- Exercices

1) Signe d'un produit, d'un quotient

Faire les tableaux de signes de $x-1$ et de $3-2x$.

En déduire le tableau de signes du produit $P(x)=(x-1)(3-2x)$, puis du quotient $Q(x)=\frac{3-2x}{x-1}$.

Sans calcul, donner les signes de $x-1$, $3-2x$, $P(x)$ et $Q(x)$ lorsque
$x=2\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$, $x=-2{,}75$, $x=10^{-2}$, $x=10^{9}$, $x=-10^{5}$

2) Pourquoi factoriser?

Soit $f(x)=x^2-3x-10$
Montrer que pour tout réel x, $f(x)=(x+2)(x-5)$, puis, résoudre $f(x)\geqslant 0$.

3) Pourquoi ramener à 0?

Pour $x\neq -3$, on pose $g(x)=\frac{2x+1}{x+3}$. Résoudre $g(x)\leqslant 3$

4) Chercher l'erreur

Dans un exercice, on doit résoudre pour $x\neq 0$ l'inéquation $\frac{x-1}{x}>2$

On propose cette résolution:
$\frac{x-1}{x}>2$ revient à $x-1>2x$. On obtient alors $-1>x$
Les solutions sont les réels inférieurs à -1.
En prenant un réel inférieur à -1, montrer que cette solution est fausse.
Expliquer pourquoi la résolution est fausse.

Les méthodes sont les habitudes de l'esprit et les économies de la mémoire. Rivarol