# Index



# I- Équation différentielle

## *I-1 Définition*

Une équation différentielle est une relation d'égalité entre une fonction et ses dérivées.

### I-1-1- Exemples et vocabulaire

Soit $f$ une fonction dérivable sur ℝ, $2f\,'(x) + f(x) = x^2$ (1) est une équation différentielle de premier ordre.

$xf\,''(x) - 2x^2 f\,'(x) + f(x) = 3x - 1$ (2) est une équation différentielle de second ordre.
Pour montrer que la fonction φ définie sur ℝ par $\varphi(x) = x^2 - 4x + 8$ est une **solution** de (1), on montre que

l'égalité est vérifiée:
$2\varphi'(x) + \varphi(x) = 2(2x - 4) + (x^2 - 4x + 8) = ... = x^2$
**Résoudre** une équation différentielle, c'est déterminer **toutes** les solutions.
La résolution de l'équation (1) sera faite à partir des théorèmes et méthodes de ce chapitre.
L'équation (2) est hors programme.

## I-2 Les équations différentielles de la forme f ' = kf

### I-2-1 Théorème définissant la fonction exponentielle et premières propriétés

#### *I-2-1-1- Théorème:*

Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est égale à sa dérivée et prend la valeur 1 en 0.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle, notée exp.

Par définition: $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$

#### *I-2-1-2- Propriétés:*

D'après l'activité : à la recherche d'une nouvelle fonction,

on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

***Démonstration:***

**L'existence** est admise (dans les activités: méthode d'Euler et à la recherche d'une nouvelle fonction, il semble qu'elle existe, mais pour une démonstration rigoureuse en TS, il faut d'abord montrer l'existence du logarithme)

**Unicité:**

Soit une fonction $f$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

***Une méthode***: Puisque $\exp \neq 0$, pour montrer que $f = \exp$, on montre que $\dfrac{f}{\exp}(x) = 1$

On pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{\exp(x)} = f(x) \times \exp(-x)$

$g$ est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,
donc, pour tout $x$ réel, $g'(x) = f'(x) \times \exp(-x) + f(x) \times (-1) \times \exp'(-x)$,
or, $f' = f$ et $\exp' = \exp$, d'où, pour tout $x$ réel, $g'(x) = f(x) \times \exp(-x) - f(x) \times \exp(-x) = 0$
On en déduit: pour tout $x$ réel, $g(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ et comme $g(0) = \dfrac{f(0)}{\exp(0)} = 1$, on a:
pour tout $x$ réel, $g(x) = 1$.

### I-2-2 Les solutions de $f' = kf$

#### *Théorème:*

1) Les fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = kf$ où $k \in \mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto A\exp(kx)$ où $A$ est une constante réelle.

2) Parmi ces fonctions, il existe une et une seule fonction vérifiant la condition initiale $f(0) = a$,

c'est la fonction $x \mapsto a\exp(kx)$

***Démonstration:***

__Sens direct__: Si $f(x) = A\exp(kx)$ alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = A.k.\exp(kx) = kf(x)$

__Sens réciproque:__ Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = kf(x)$

On pose $g(x) = f(x)\times\exp(-kx)$.

$g$ est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et,
pour tout $x$ réel, $g'(x) = f'(x)\times\exp(-kx) + f(x)\times(-k)\exp'(-kx)$.
Comme $f'(x) = kf(x)$ et $\exp' = \exp$, il vient: $g'(x) = kf(x)\times\exp(-kx) - f(x)\times\exp(-kx) = 0$
Par conséquent, pour tout $x$ réel, $g(x) = A$ où $A \in \mathbb{R}$.
De l'égalité $A = f(x)\times\exp(-kx)$, on tire: $f(x) = A.\exp(kx)$
On remarque: $f(0) = A$
D'autre part, si $f(0) = a$, on a: $A = a$

## I-3 Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, a et b réels, $a \neq 0$

### I-3-1 Une méthode

La méthode décrite est générale pour la résolution de certaines équations différentielles de premier ordre.

On cherche d'abord une solution particulière de l'équation, puis les solutions générales de l'équation sans second membre.

Dans l'écriture $y' = ay + b$,

$y$ représente une fonction,

$y'$ sa dérivée et

$a$ et $b$ sont des constantes réelles (c'est-à-dire, des réels indépendants de la variable permettant de définir la fonction). $a \neq 0$

Soit (E): $y' = ay + b$

*** On suppose que $f$ est une solution particulière de (E)

Si $g$ est une solution de (E) alors $g - f$ est une solution de l'équation (E'): $y' = ay$

En effet, on a: $\left\{ \begin{array}{l} f' = af + b \\ g' = ag + b \end{array} \right.$, d'où, $(g - f)' = g' - f' = ag - af = a(g - f)$

***Réciproquement***: Si une fonction $\phi$ est solution de (E'): $y' = ay$

alors la fonction $g = \phi + f$ est une solution de (E): $y' = ay + b$

En effet, on a: $\left\{ \begin{array}{l} f' = af + b \\ \phi' = a\phi \end{array} \right.$, d'où, $g' = (\phi + f)' = \phi' + f' = a\phi + af + b = a(\phi + f) + b = ag + b$

***Conséquence***:

Pour résoudre l'équation (E): $y' = ay + b$, il suffit de connaître une solution particulière de cette équation (E° et de connaître les solutions l'équation (E'): $y' = ay$

***Recherche d'une solution particulière:***

Pour trouver une solution particulière de (E): $y' = ay + b$, on cherche une fonction constante.

En ce cas, $y' = 0$ et la fonction est: $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ $(a \neq 0)$

***Rappel***: on a résolu (E'): $y' = ay$ au paragraphe précédent

### I-3-2- Théorème

1) Les solutions de l'équation différentielle (E): $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto A\exp(ax) - \dfrac{b}{a}$ où $A$ est une constante réelle.

2) Il existe une seule fonction solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$

## *I-4- Propriété caractéristique de la fonction exponentielle*

### I-4-1- Propriété caractéristique

***Théorème:***

Les fonctions $f$ non nulles et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x$ et $y$ réels, $f(x + y) = f(x).f(y)$ sont les fonctions : $x \mapsto \exp(kx)$ où $k \in \mathbb{R}$.

**Démonstration**

Dans l'activité : à la recherche d'une nouvelle fonction, on a montré au II- que

$$\begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f(x+y)=f(x)\times f(y) \\ f \text{ non nulle sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1) \quad \text{implique} \begin{cases} f(0)=1 \\ f'=kf \quad \text{où} \quad k=f'(0) \end{cases}$$ et d'après le §I-2-2, $f(x) = 1\times\exp(kx)$

***Réciproquement:***

Montrons que les fonctions $f$ définies par $f(x) = \exp(kx)$ vérifient $f(x + y) = f(x).f(y)$

Soit $a$ un réel.

On pose $\varphi(x) = f(x + a) = \exp(k(x + a))$

$\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x$ réel, $\varphi(x) \neq 0$
$\varphi'(x) = k \exp'(k(x + a)) = k \exp(k(x + a)) = k\varphi(x)$
Donc, $\varphi(x) = A.\exp(kx)$ avec $A = \varphi(0)$ 'après le §I-2-2, donc, $A = \exp(ka) = f(a)$
Conclusion: Quelque soit le réel $a$, pour tout $x$ réel, $f(x + a) = f(a).f(x)$

### I-4-2- propriétés algébriques

On a donc:

Pour tous réels $x$ et y et pour tout entier $n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

$\exp(0) = 1$

$\exp(x + y) = \exp(x).\exp(y)$

$\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ (Il suffit de faire $y = -x$ dans l'égalité précédente)

$\exp(x - y) = \exp(x).\exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

$\exp(2x) = (\exp(x))^2$ (Faire $y = x$)

$\exp(nx) = (\exp(x))^n$ (Voir la récurrence ci-dessous)

***Récurrence***

$n \in \mathbb{N}$ L'égalité exp($nx$) = $(\exp(x))^n$ est vraie pour les entiers 0, 1 et 2
Supposons que pour un entier $n$, l'égalité exp($nx$) = $(\exp(x))^n$ est vraie
alors exp(($n$ + 1)$x$) = exp($nx$ + $x$) = exp($nx$).exp($x$) = $(\exp(x))^n$ .exp($x$) = $(\exp(x))^{n+1}$
L'égalité exp($nx$) = $(\exp(x))^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$n \in \mathbb{Z}$
Si $n$ est un entier négatif, on pose $m = -n$, et on a:

$$\exp(nx) = \exp(-mx) = \frac{1}{\exp(mx)} = \frac{1}{(\exp(x))^m} = (\exp(x))^{-m} = (\exp(x))^n$$

# II- Étude de la fonction exponentielle

## II-1- Une nouvelle notation

On note: **e = exp(1)** e comme exponentielle mais aussi comme Euler !

*Le nombre* e *est la base des logarithmes népériens.*
*e ≈ 2,718.*

*En 1761, le suisse* ***Lambert*** *démontre que e est irrationnel, c'est à dire qu'on ne pourra jamais l'écrire sous la forme d'une fraction de deux nombres entiers.*
*En 1873, le français* ***Charles Hermite*** *démontre que e est transcendant, c'est à dire qu'il n'est solution d'aucune équation algébrique avec des coefficients entiers.*

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

On a d'après le paragraphe précédent: exp($n$) = exp($n \times 1$) = $(\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$

On généralise cette écriture pour tout $x$ réel, exp($x$) = $\mathrm{e}^x$

Ainsi: exp: $x \mapsto \mathrm{e}^x$

Les propriétés démontrées précédemment sont:

Pour tout $x$ et pour tout $y$,

$\mathrm{e}^0 = 1$ $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x . e^y$ $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$ $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

$\mathrm{e}^x > 0$

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$

$k$ étant un réel, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto k\,\mathrm{e}^{kx}$

et a pour primitive les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kx} + C$.

## *II-2- Propriétés*

### II-2-1- Dérivabilité

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même

### II-2-2- Variation

La fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

### II-2-3- Limites aux bornes

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

### II-2-4- Approximation affine en 0

Pour tout réel $h$ suffisamment proche de 0, $\mathrm{e}^h \approx 1 + h$

ou encore: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$

### II-2-5- Fonctions composées $\mathrm{e}^u$

Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$ alors $\mathrm{e}^u$ est dérivable sur $I$ et $(\mathrm{e}^u)' = u' e^u$

Les primitives des fonctions de la forme $u' e^u$ sont les fonctions $\mathrm{e}^u + C$.

### Démonstrations de ces propriétés

***II-2-1 et II-2-2*** Évident par définition et la dérivée est strictement positive

***II-2-3- Les limites***

Il suffit de minorer la fonction exponentielle par une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

On étudie la fonction $f$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

on a alors: $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

Or, comme la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{e}^0 = 1$, on a:

si $x > 0$, $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0$, d'où, $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ et si $x < 0$, $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^0$, d'où, $\mathrm{e}^x - 1 < 0$. $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $1$ | ↗ | |

Finalement: pour tout $x$ réel, $f(x) \geqslant 1$, soit $f(x) > 0$

On a alors $\mathrm{e}^x > x$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = =\infty$, on obtient: $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Comme $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$, pour étudier la limite de $\mathrm{e}^x$ en $-\infty$, on étudie la limite de $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$ en $-\infty$.

D'après le théorème de limites de fonctions composées, on a successivement:

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ , d'où, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Conclusion: $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

### *II-2-4 Approximation affine*

La fonction exp est dérivable en 0, donc, on sait: $\exp(0 + h) = \exp(0) + h.\exp'(0) + h.\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$

Comme $\exp'(0) = \exp(0) = 1$,

On a: $e^{h} = 1 + h + h.\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$

### *II-2-5- Fonction composée (voir le chapitre sur la dérivation: dérivée de fonctions composées)*

## *II-3- Représentation graphique de la fonction exponentielle*

On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction exponentielle dans un repère.

### II-3-1- Les tangentes particulières

Soit le point $A(0; 1)$. La tangente en $A$ a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) = x + 1$

Soit le point $B(1; e)$. La tangente en $B$ a pour équation $y = \exp'(1)(x - 1) + \exp(1) = ex - e + e = ex$

La tangente au point d'abscisse 1 passe par l'origine du repère

### II-3-2- Position relative de la courbe et ses tangentes

Soit un point $M(a; e^{a})$. Une équation de la tangente $T$ en $M$ est: $y = \exp'(a)(x - a) + \exp(a) = e^{a}(x - a) + e^{a}$

La position relative de $\mathscr{C}$ et $T$ est donnée par le signe de $d(x) = e^{x} - (e^{a}(x - a) + e^{a})$

On a alors: $d'(x) = e^{x} - e^{a}$, comme, la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ, il vient:

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $d'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $d(x)$ | | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | |

Pour tout $x$ réel, $d(x) \geqslant 0$.

$\mathscr{C}$ est située au-dessus de ses tangentes.

### II-3-3- Asymptote et direction asymptotique

Comme $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$, l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique:

***Méthode***: Lorsqu'une asymptote d'équation $y = ax + b$ existe en $+\infty$,

on a: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

En ce cas, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, puis, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$

On cherche donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$

Important: Si $M(x;\ e^x)$ est un point de $\mathscr{C}$, alors, $\dfrac{e^x}{x}$ est le coefficient directeur de la droite $(OM)$

Pour cela, on compare: $\dfrac{e^x}{x}$ et $\dfrac{x}{2}$,

ce qui amène à l'étude de la fonction $\psi$ définie par $\psi(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x$, on a: $\psi'(x) = e^x - x$

Or, on a vu au §II-2-3 que $e^x - x > 0$, d'où, le tableau de variations suivant

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\psi'(x)$ | $+$ |
| $\psi(x)$ | $\nearrow$ |

et, comme $\psi(0) = 1$,

on peut conclure, pour tout $x > 0$, $e^x > \dfrac{x^2}{2}$, puis, $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, on obtient: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Il n'y a pas d'asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et la pente de la sécante $(OM)$ tend vers $+\infty$.

## II-3-4- Limite en $-\infty$ de $x\,e^x$

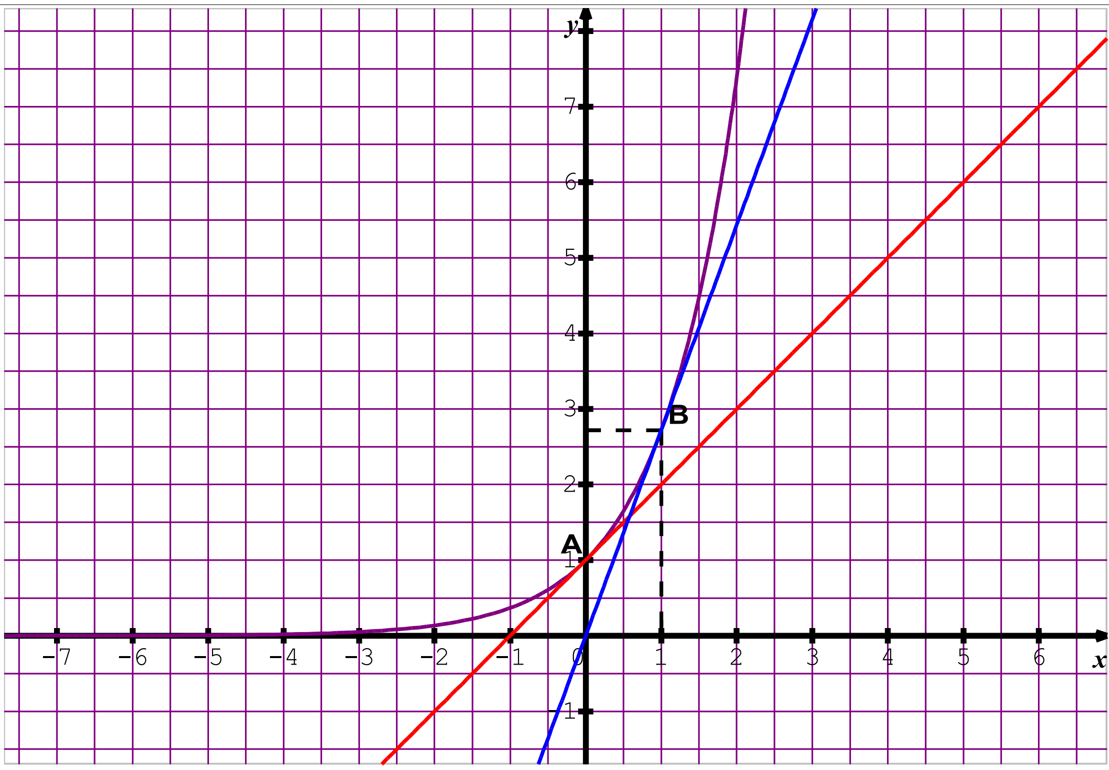
De l'étude précédente, on déduit aussi: $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$

En effet, comme $x\,e^x = \dfrac{x}{e^{-x}}$, la limite en $-\infty$ de $x\,e^x$ est la limite en $-\infty$ de $-\dfrac{-x}{e^{-x}}$

D'après le théorème sur les limites de fonctions composées, la limite en $-\infty$ de $x\,e^x$ est la limite en $+\infty$ de $-\dfrac{e^x}{x}$

## II-3-5- Graphique

On commence par tracer les tangentes en $A(0;\ 1)$ et $B(1;\ e)$.




### II-3-6 Résumé

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x) = exp(x)$ | | + | 1 | + | |
| $f(x) = exp(x)$ | 0 | ↗ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$

## *II-4- Bijection, équations et inéquations*

La fonction exponentielle est définie, continue et strictement croissante sur ℝ.

Par conséquent, elle réalise une bijection de ℝ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x, \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\right[ = ]0; +\infty[$

On en déduit:

### II-4-1- Équation $\mathrm{e}^x = \mathrm{k}$

L'équation $\mathrm{e}^x = k$ n'a aucune solution si $k \leqslant 0$ et, une et une seule solution si $k > 0$

### II-4-2- Équation $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$

Pour tout réel $a$ et tout réel $b$, l'égalité $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ équivaut à $a = b$

## II-4-3- Inéquation $e^a < e^b$

Pour tout réel $a$ et tout réel $b$, l'égalité $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$

### *Pour préparer les prochains chapitres d'analyse:*

La bijection réciproque de la fonction exp définie sur $]0; +\infty[$ est la fonction **logarithme népérien**, noté ln.

Sur la plupart des calculatrices, vous avez la touche $e^x$ avec la touche LN

LN logarithme népérien
$e^x$ fonction exponentielle


La touche LOG est le logarithme décimal réciproque de la fonction exponentielle de base 10: $x \mapsto 10^x$