Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Index

I- Qu'est-ce qu'une fonction: les définitions vues en seconde

(On peut revoir les chapitres de seconde)

I-1- Définition d'une fonction numérique

Soit un nombre variable (Appelons-le x)
À ce nombre x, on associe un autre nombre par des opérations, calculs avec ce nombre x;
Par exemple, à tout réel x, on associe le nombre $y = x^2 + 5x - \dfrac{1}{x^2+1}$.
On définit ainsi une fonction qui, à x, associe $x^2 + 5x - \dfrac{1}{x^2+1}$.

On définit une **fonction** f sur un ensemble $\mathcal{D}$ en associant à chaque nombre x de $\mathcal{D}$ un nombre et un seul noté $f(x)$.
On note $f: x \mapsto f(x)$, pour $x \in \mathcal{D}$
x s'appelle la **variable**
Le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par f
Si $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y par f

I-2- Définition de "ensemble de définition" d'une fonction.

$\mathcal{D}$ est **l'ensemble de définition** de f
C'est l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par la fonction *f*.
Exemples:
Il existe des opérations qui sont impossibles.
Par exemple, on ne peut pas diviser par 0, on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif.
1) La fonction $g: x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-2}$ est définie lorsque ……………………………………………………
l'ensemble de définition de g est: $\mathcal{D}_g$ = ……………………………………………………………………
2) La fonction $r : t \mapsto \sqrt{t-3}$ est définie lorsque……………………………………………………………
l'ensemble de définition de r est $\mathcal{D}_r$ = ……………………………………………………………………………

I-3- Sens de variations d'une fonction

I-3-1- Fonction croissante sur un intervalle

On dit que f est une fonction strictement croissante sur un intervalle I lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour tout α et β de I, si α …............... β alors $f(\alpha)$ .... $f(\beta)$

ou encore

les variables et leurs images sont classés dans le …........................... ordre

Une fonction **strictement croissante** sur un intervalle I **conserve** l'ordre.

I-3-2- Fonction décroissante sur un intervalle

On dit que f est une fonction strictement décroissante sur un intervalle I lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour tout α et β de I, si α …............... β alors $f(\alpha)$ …............................. $f(\beta)$

ou encore

les variables et leurs images sont classés dans l'..

Une fonction **strictement décroissante** sur un intervalle I **inverse** l'ordre.

I-3-3- tableau de variations

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles où la fonction est croissante et ceux où la fonction est décroissante.

On dit qu'une fonction est ***monotone sur un intervalle*** lorsqu'elle ne change pas de variations sur cet intervalle.

On résume les variations dans un ***tableau de variations.***

I-3-4- À quoi çà sert

À comparer des nombres.
À encadrer des nombres
À optimiser un problème (par exemple, le bénéfice maximal ..., les coûts de production minimaux, ...).
Exemple:
On a étudié une fonction f (construite à partir d'un problème) et on a démontré que son tableau de variations était le suivant:

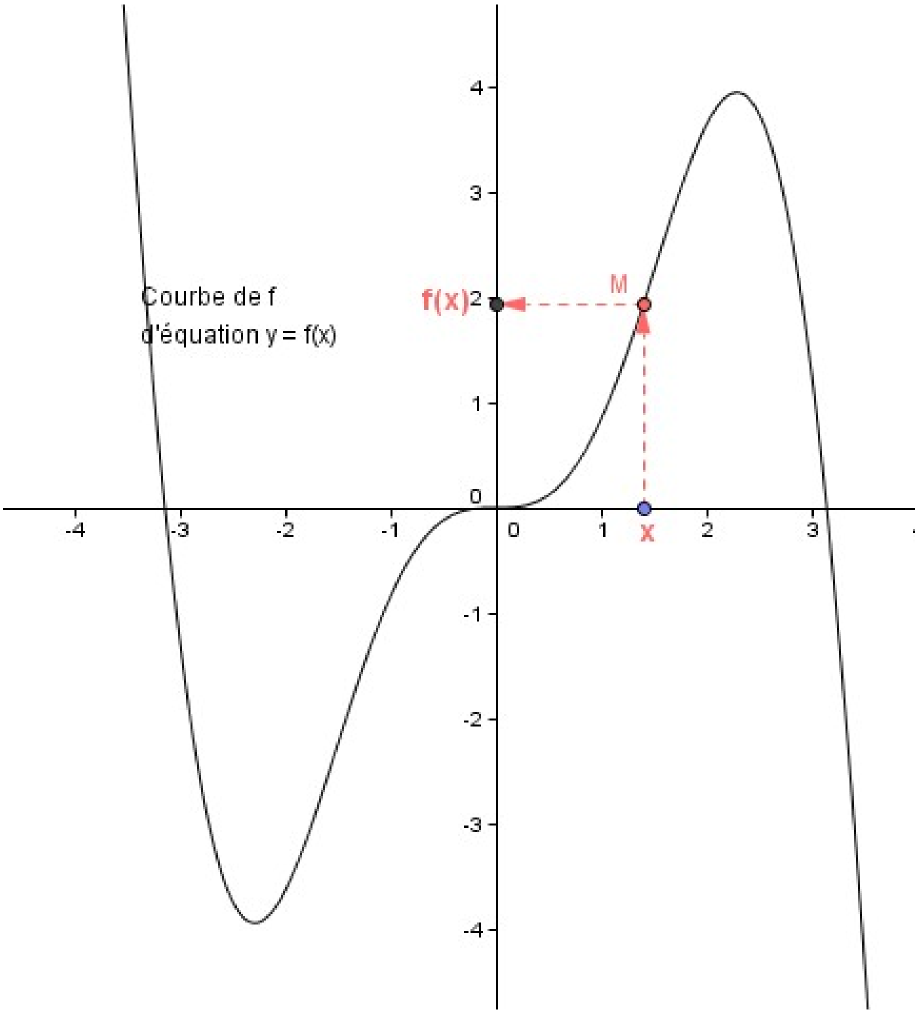
x	$-\infty$		2		6		10		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	5	↘	-3	↗	4	↘	0

On peut en déduire: $f(3)$ …................. $f(4)$
$f(7)$ …................. $f(7,4)$
Si $x < 2$ alors …....... $< f(x) <$ …......................
$f(x)$ a un maximum qui vaut .... (unités en ordonnée) lorsque $x =$ …..............(unités en abscisse)
$f(x)$ a un minimum qui vaut .... (unités en ordonnée) lorsque $x =$ …................... (unités en abscisse)
L'équation $f(x) = 0$ a …........... solutions: l'une comprise entre …..............., l'autre comprise entre …..................

I-4- Définition de la représentation graphique d'une fonction et équation de courbe.

Le plan est muni d'un repère $(O;I,J)$

Quand une fonction *f* est définie sur un ensemble de nombres $\mathcal{D}$, à chaque nombre *x* est associé un et un seul nombre *y* (ou $f(x)$).
L'ensemble de tous les points *M* de coordonnées $(x;f(x))$ dans ce repère est **la courbe représentative de *f*** dans ce repère.



On note souvent C_f la courbe représentative de *f*.
On dit qu'une **équation de C_f** dans ce repère est: $y=f(x)$

II- Les fonctions vues en seconde

II-1- Fonctions affines

II-1-1- *Définition*

Soit *a* et *b* deux réels.
Les **fonctions affines** sont les fonctions de la forme $x \mapsto$ …..

II-1-2- Cas particuliers: fonction linéaire, fonction constante

Lorsque le réel *b* est nul *b* = 0, on dit que *f* est une fonction linéaire. Elle traduit une situation de proportionnalité (cf. exemple 2). f: $x \mapsto ax$

Lorsque le coefficient *a* est nul (*a* = 0), on a une fonction ***constante***. $f: x \mapsto b$.

II-1-3- Variations des fonctions affines

Théorème:

Si ***a* est strictement positif** alors la fonction affine f: $x \mapsto ax + b$ est strictement …......................... sur ℝ

Si ***a* est strictement négatif** alors la fonction affine f: $x \mapsto ax + b$ est strictement …......................... sur ℝ

II-1-4- Représentation graphique d'une fonction affine

La représentation d'une fonction affine f: $x \mapsto ax + b$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est une droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées d'équation réduite $y = ax + b$.

Le réel a est le **coefficient directeur** de la droite. $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\textit{différence des ordonnées}}{\textit{différence des abscisses}}$

Le réel b est **l'ordonnée à l'origine** de la droite.

II-2- Fonction carrée

II-2-1 Définition

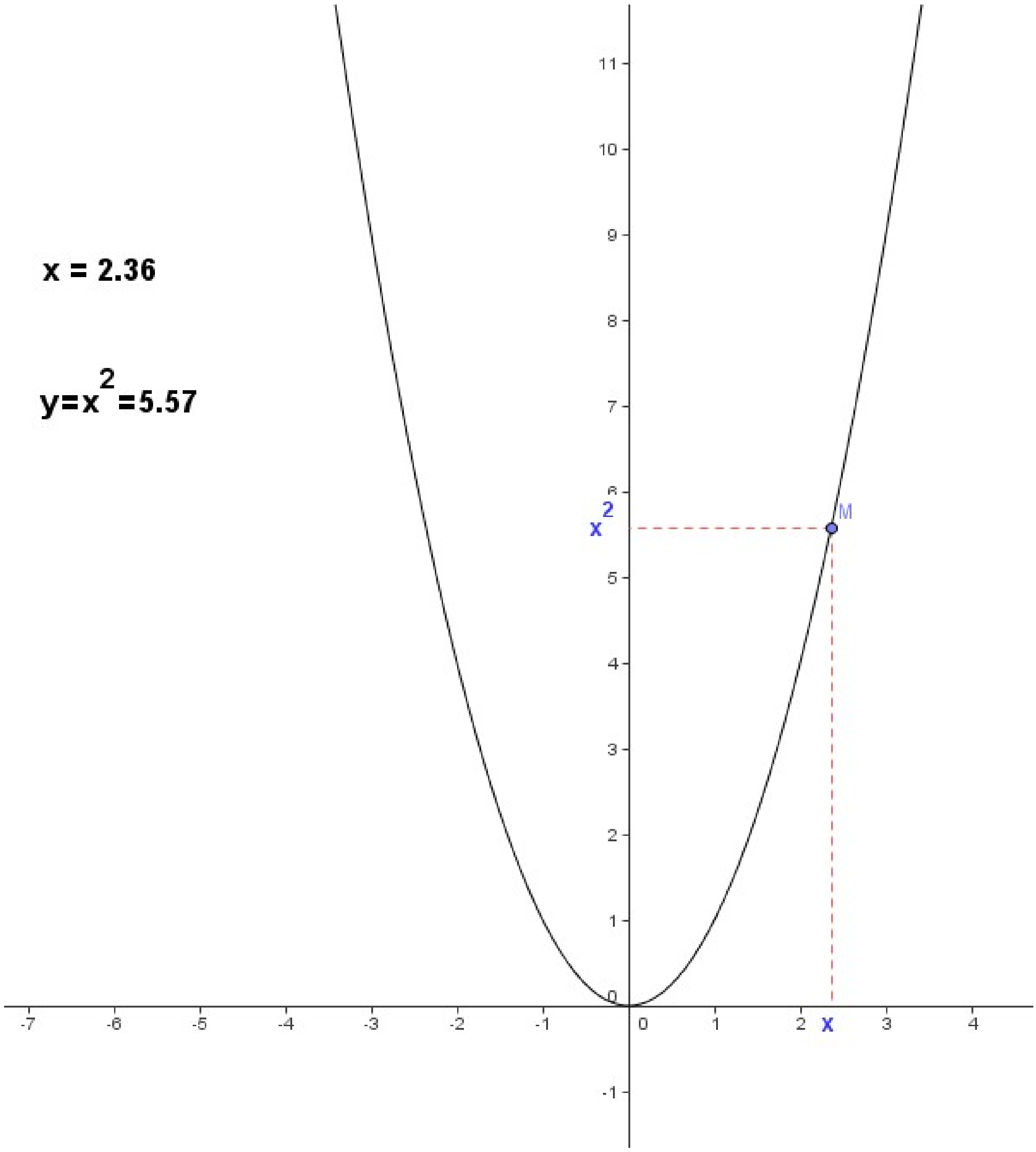
La fonction carré est la fonction définie sur]–∞; +∞[(ou ℝ) qui, à un réel, associe son carré.
On note $x: \longmapsto x^2$ ou $t \longmapsto t^2$ ou ....

II-2-2 Résumé dans un tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

II-2-3 Représentation graphique

La représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la fonction carré est une **parabole** de sommet $O(0;0)$ et d'équation $y = x^2$



L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de cette parabole.

II-3- Fonction inverse

II-3-1 Définition

La fonction inverse est la fonction définie sur $]-\infty;\,0[\,\cup\,]0;\,+\infty[$ (noté aussi $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$), qui, à un réel non nul, associe son inverse.

On note $x:\longmapsto \dfrac{1}{x}$ ou $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ ou ...

II-3-2 Résumé dans un tableau de variations

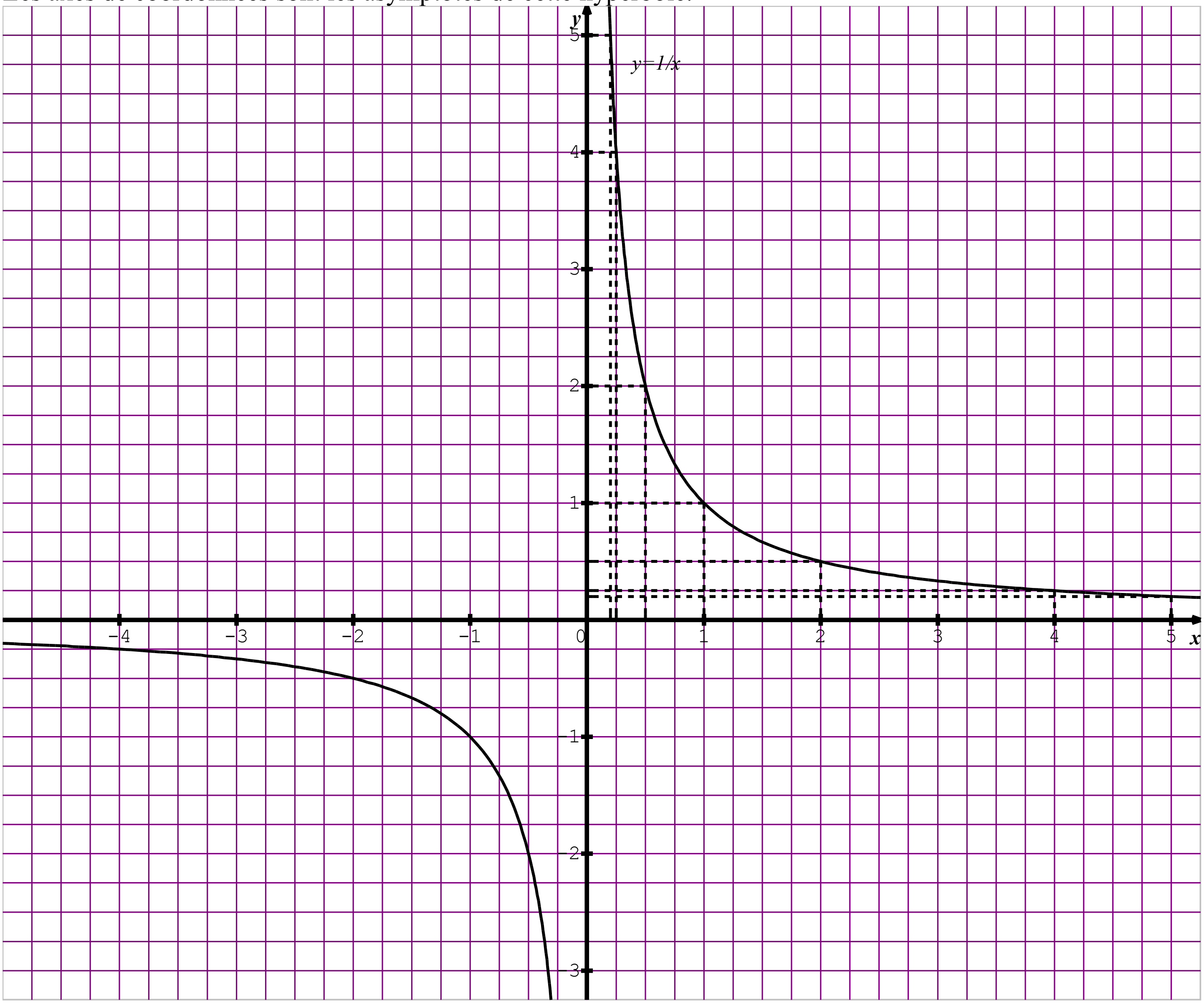
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

La double-barre signifie que la fonction n'est pas définie en 0.
Cette double-barre est infranchissable

II-2-3 Représentation graphique

La représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre *O*(0 ;0) d'équation $y=\frac{1}{x}$

Les axes de coordonnées sont les asymptotes de cette hyperbole.



III- D'autres fonctions usuelles

III-1- Fonction cube

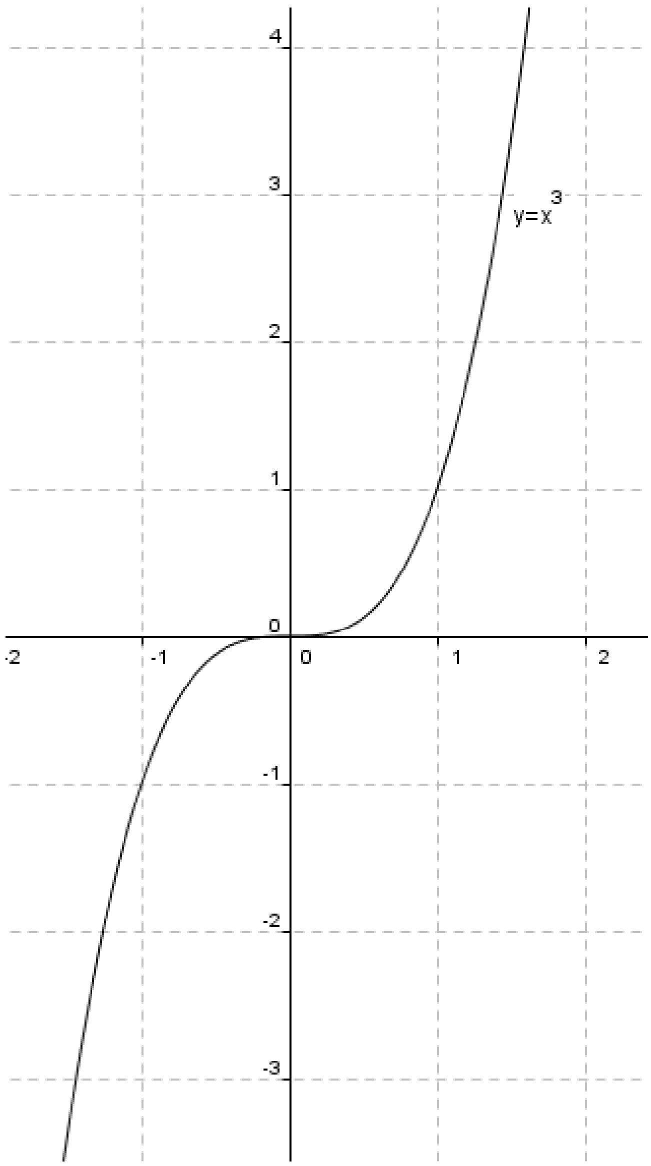
III-1-1 Définition

La fonction cube est la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}$) qui, à un réel, associe son cube.
On note $x : \longmapsto x^3$ ou $t \longmapsto t^3$ ou ....

III-1-2 Résumé dans un tableau de variations

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
x^3	$\nearrow$

III-1-3 Représentation graphique



III-2- Fonction racine carrée

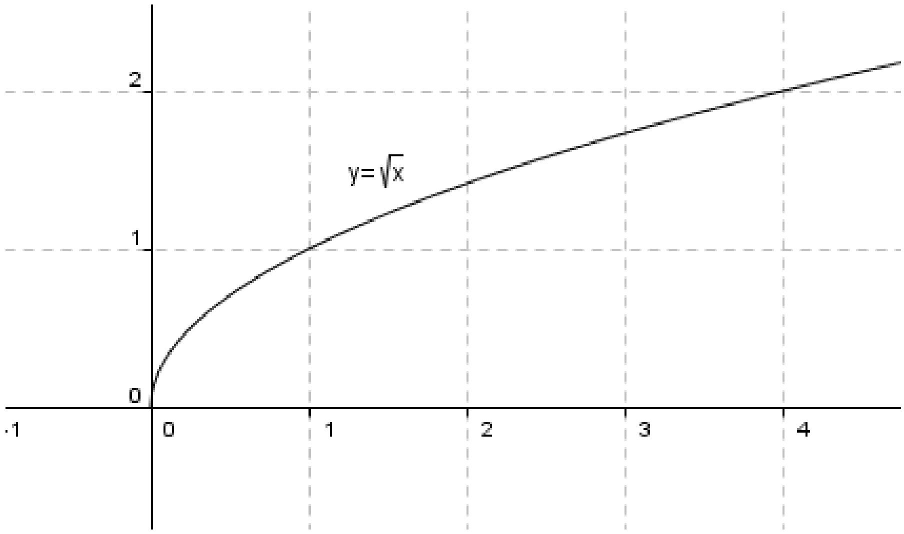
III-2-1 Définition

La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ qui, à un réel positif ou nul, associe sa racine carrée
On note $x \longmapsto \sqrt{x}$ ou $t \longmapsto \sqrt{t}$ ou ....

III-2-2 Résumé dans un tableau de variations

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$

III-2-3 Représentation graphique



III-3- Fonction valeur absolue

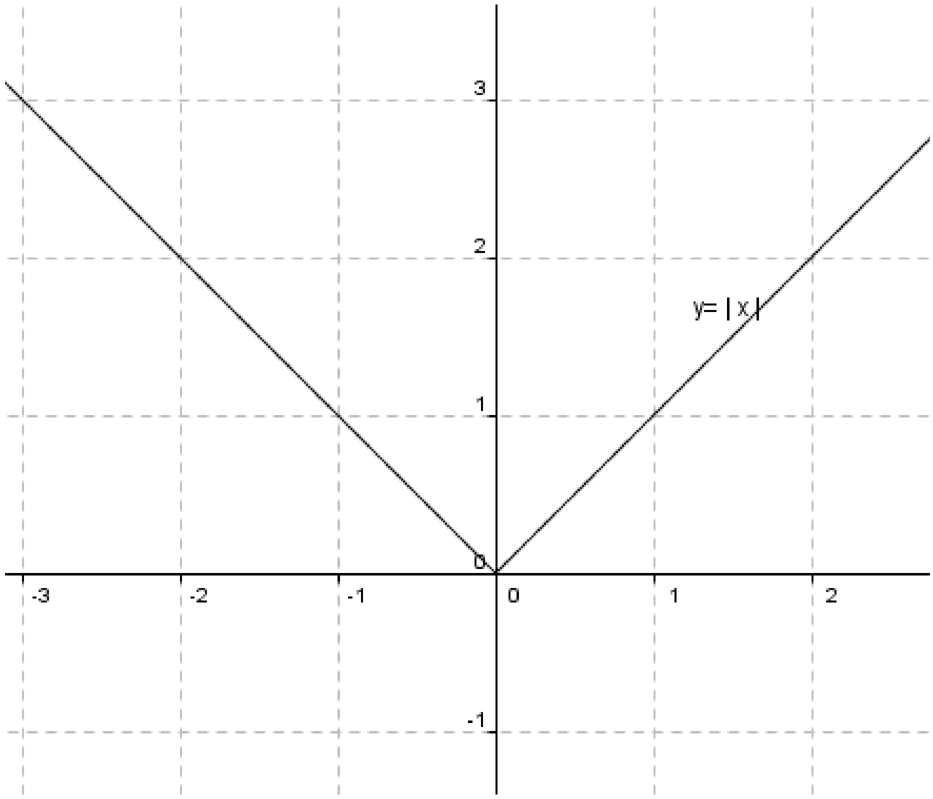
III-3-1 Définition

La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}$) qui, à un réel, associe sa valeur absolue
On note $x \longmapsto |x|$ ou $t \longmapsto |t|$ ou ....

III-3-2 Résumé dans un tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$

III-3-3 Représentation graphique



IV- Quelques opérations sur les fonctions.

IV-1- Les fonctions $x \mapsto f(x) + k$

Propriété:

Soit f une fonction représentée par la courbe C_f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

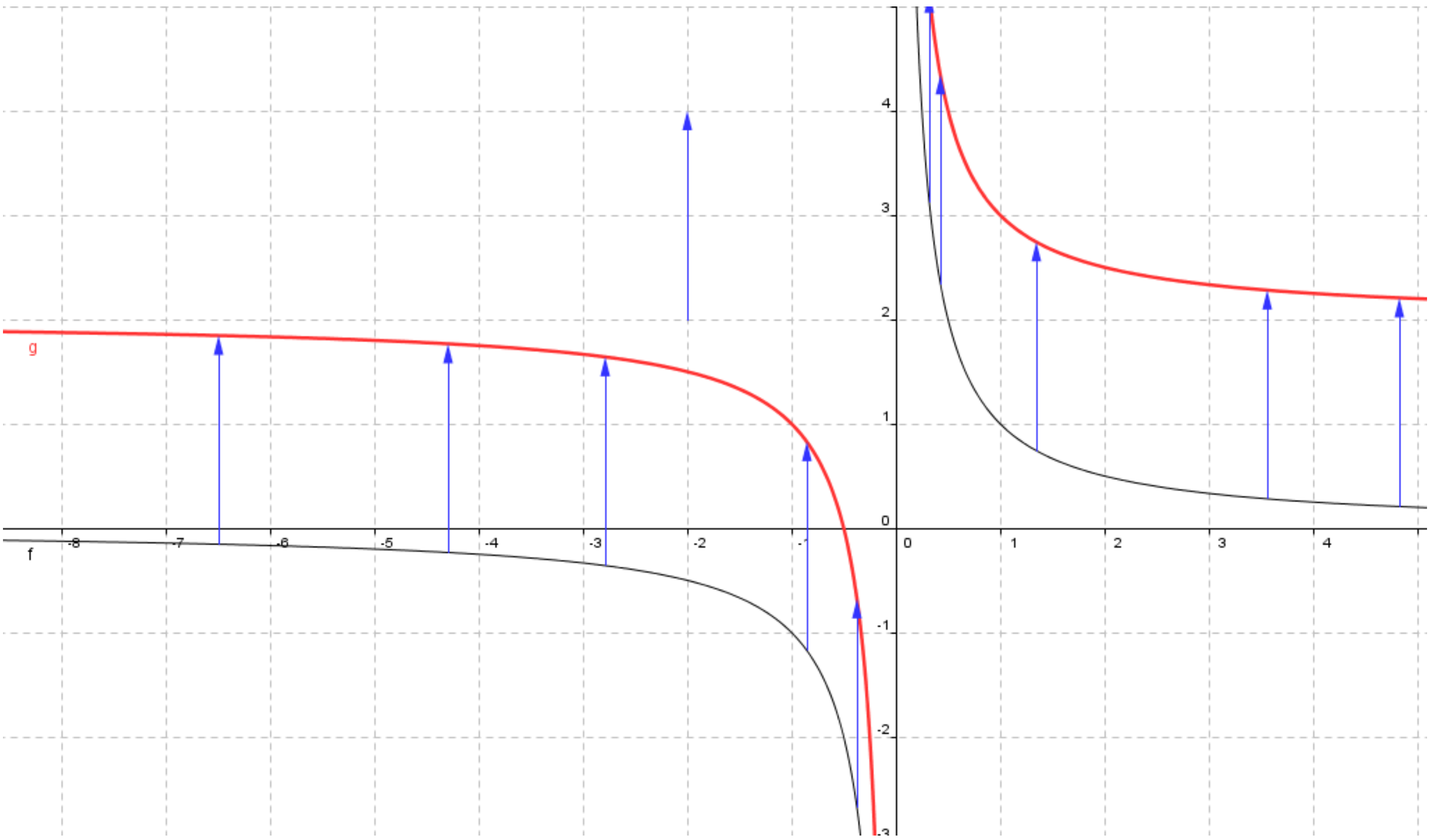
On définit la fonction g par $g(x) = f(x) + k$ où k est un réel.

La courbe C_g représentative de g se déduit de celle de f par une translation de vecteur $k\ \vec{j}$.

***Exemple*:**

f est la fonction inverse.

g est la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x} + 2$



IV-2- Les fonctions $x \mapsto f(x+k)$

Propriété:

Soit f une fonction représentée par la courbe C_f dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$

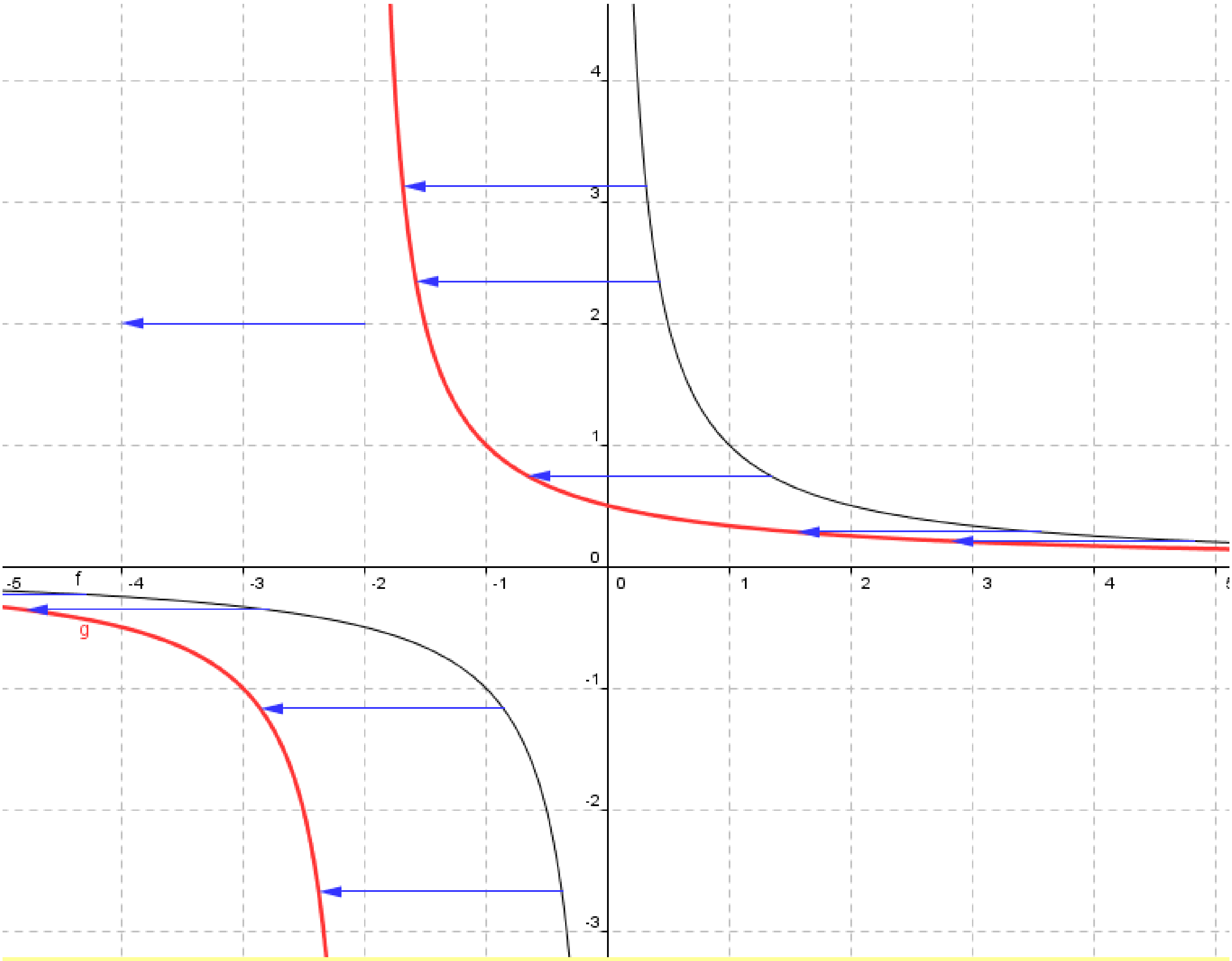
On définit la fonction g par $g(x) = f(x+k)$ où k est un réel.

La courbe C_g représentative de g se déduit de celle de f par une translation de vecteur $-k\ \vec{i}$

Exemple:

f est la fonction inverse.

g est la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$



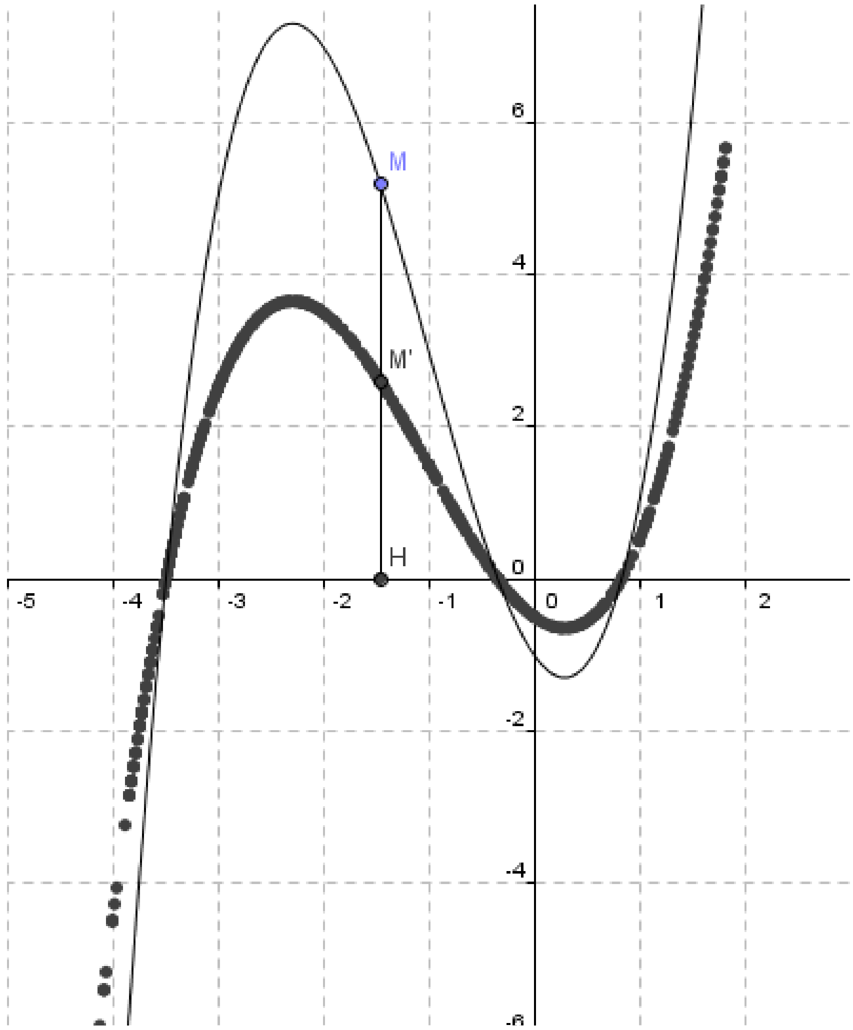
IV-3- Les fonctions $x \mapsto k.f(x)$

Quelques exemples:

1) On connaît C_f et on veut tracer la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$.

On prend un point $M(x, f(x))$ sur C_f. En divisant l'ordonnée de M par 2, on trouve le nombre $g(x)$.

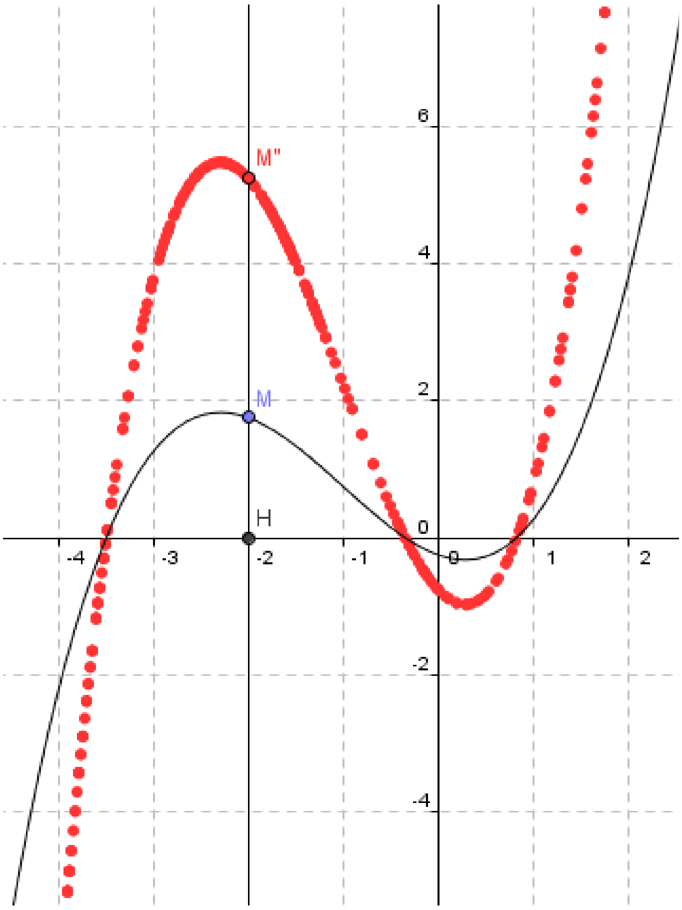
Le point M' d'abscisse x et d'ordonnée $g(x)$ est un point de C_g. On fait de même avec tous les points de C_f.



2) On connaît C_f et on veut tracer la représentation graphique de la fonction h définie par $h(x) = 3f(x)$.

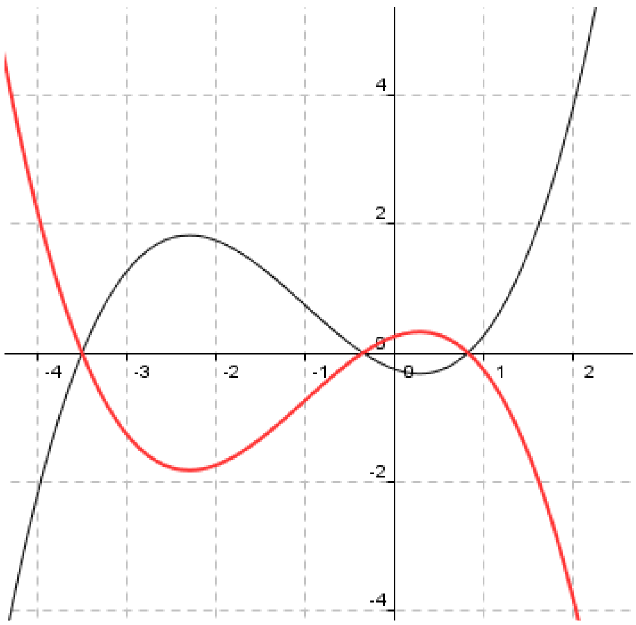
On prend un point $M(x, f(x))$ sur C_f. En multipliant l'ordonnée de M par 3, on trouve le nombre $h(x)$.

Le point M'' d'abscisse x et d'ordonnée $h(x)$ est un point de C_h. On fait de même avec tous les points de C_f.



Un cas particulier: la fonction (–*f*)

Dans un repère orthogonal, la fonction $g = (-f)$ définie par $g(x) = -f(x)$ est représentée par une courbe symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.



IV-4- Les fonctions $x \mapsto |f(x)|$

Rappel sur valeur absolue:

Lorsqu'une expression algébrique X est positive, on a $|X| = X$.

Lorsqu'une expression algébrique X est négative, on a $|X| = -X$.

On définit la fonction $|f|$ par $x \mapsto |f(x)|$

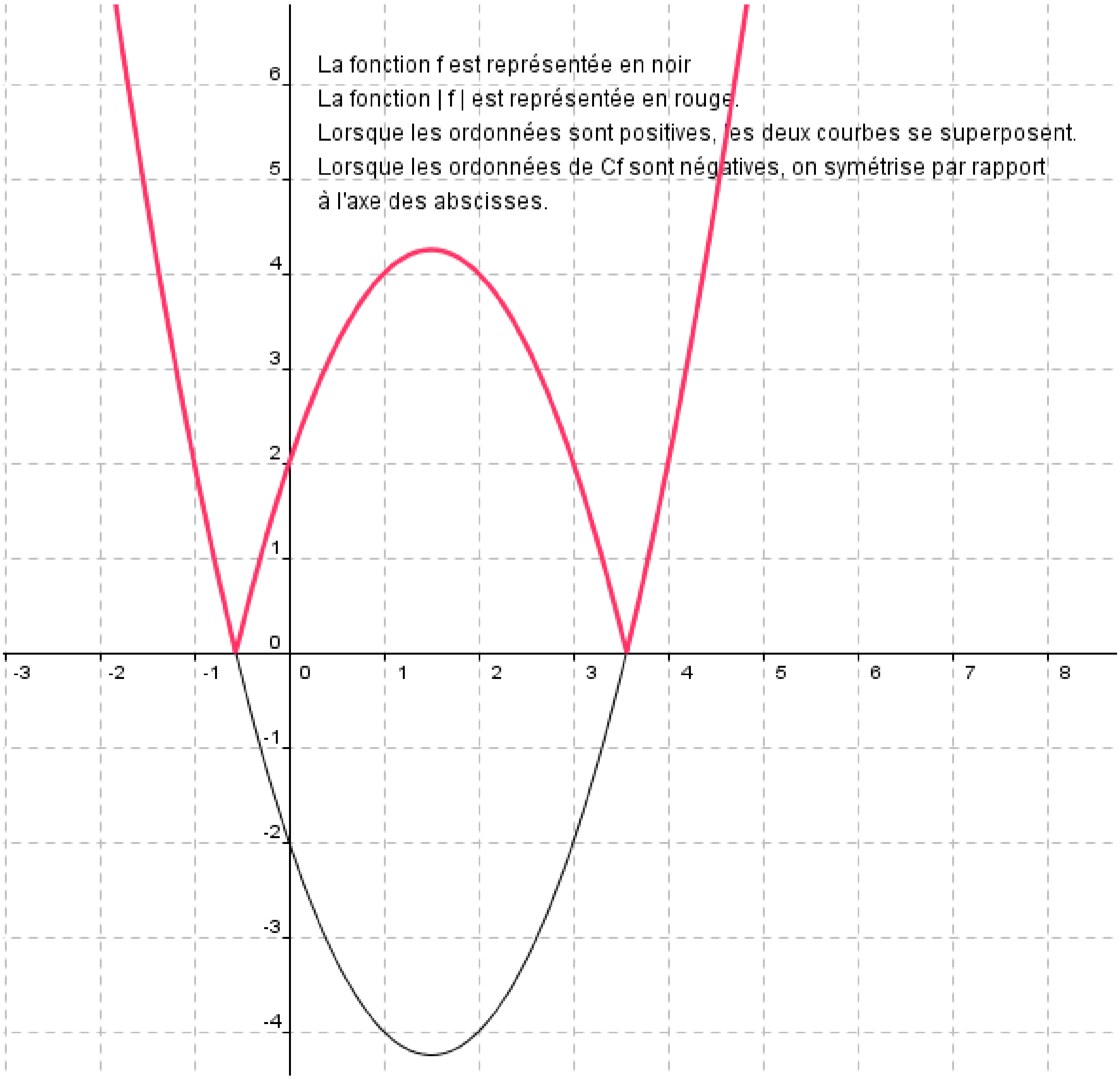
Propriété

Par conséquent, quand l'ordonnée $f(x)$ d'un point M de C_f est positive, le point $M(x; f(x))$ est aussi un point de $C_{|f|}$, et,

quand l'ordonnée $f(x)$ d'un point M de C_f est négative, le point $M'(x; -f(x))$ est un point de $C_{|f|}$

Conclusion: on garde la partie d'ordonnées positives de C_f et on symétrise la partie d'ordonnées négatives par rapport à l'axe des abscisses pour construire la courbe représentative de $C_{|f|}$.

Exemple:



IV-5- Somme de deux fonctions

Propriété:

Si f et g sont deux fonctions, on définit la fonction somme $f + g$ par $x \mapsto f(x) + g(x)$

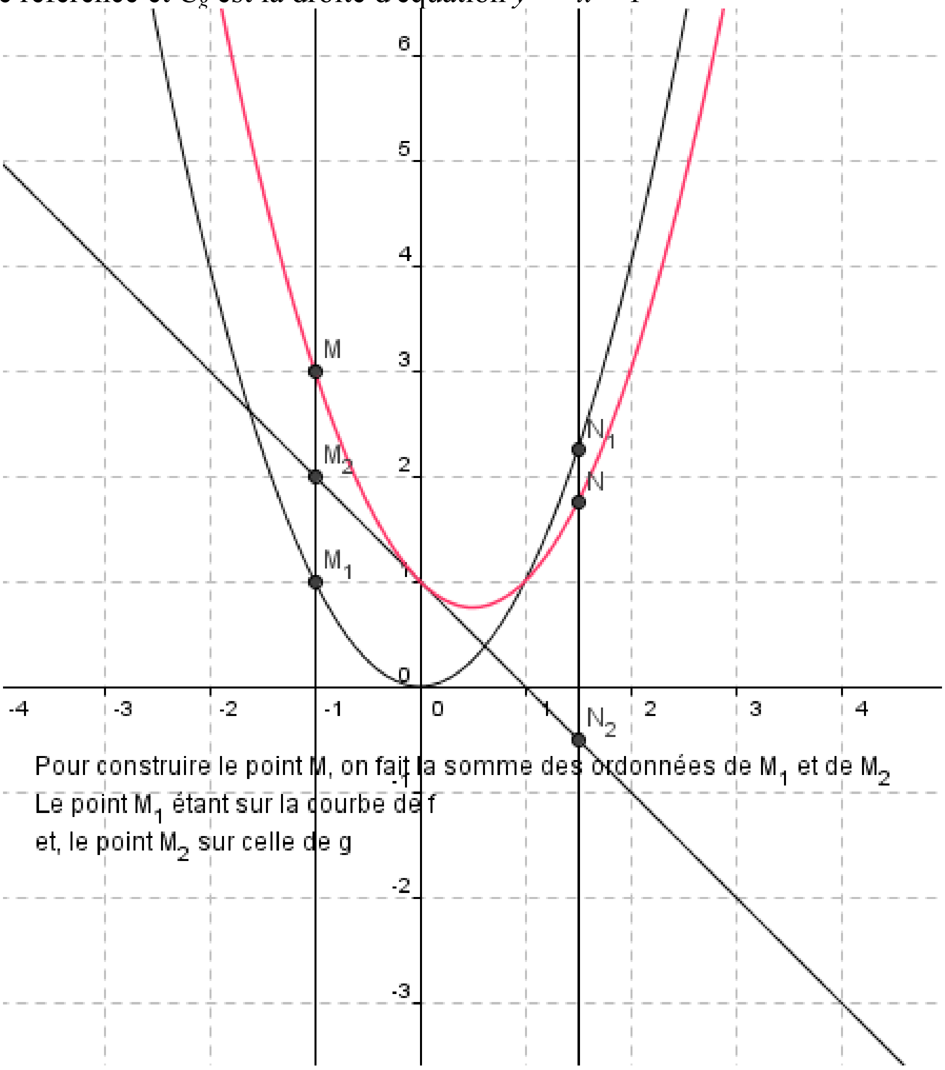
Pour construire la représentation graphique de $f + g$ à partir de celles de f et g, on fait la somme des ordonnées $f(x)$ et $g(x)$ des points d'abscisse x.

Exemples:

1) $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x + 1$

La fonction $f + g$ est définie par $x \mapsto x^2 - x + 1$

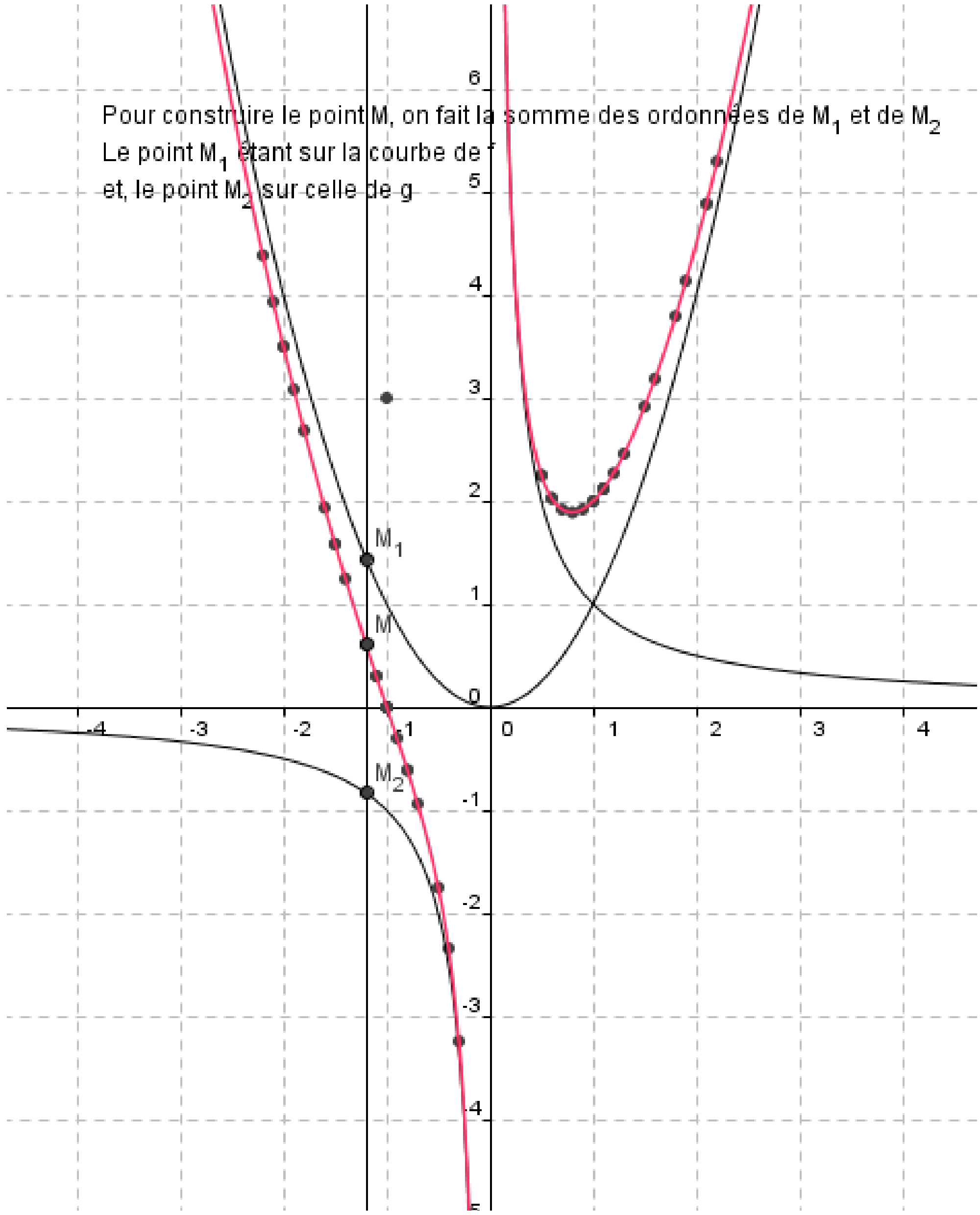
C_f est la parabole de référence et C_g est la droite d'équation $y = -x + 1$



2) La fonction f est la fonction définie par $x \mapsto x^2$

La fonction g est la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

La fonction $f + g$ est définie par $x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$



Somme de deux fonctions de même monotonie

1) Si f et g sont deux fonctions croissantes sur un intervalle I alors leur somme $f + g$ est croissante sur I.

2) Si f et g sont deux fonctions décroissantes sur un intervalle I alors leur somme $f + g$ est décroissante sur I.

IV-6- Fonction composée

Exemple préparatoire

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1$ et g la fonction définie par $g(x) = x^2$

On peut effectuer le montage suivant où on applique successivement à un réel la fonction f **suivie de** la fonction g.

On a donc $x \mapsto x + 1 = t \mapsto g(t) = g(x + 1)$

Comme g signifie "élever au carré", on obtient: $g(x + 1) = (x + 1)^2$

Finalement, on a une nouvelle fonction $h : x \mapsto (x + 1)^2$

h est la composée de f suivie de g et on note $h = g \circ f$

Définition

f et g sont deux fonctions.
Les images $f(x)$ sont dans l'ensemble de définition de g. On peut donc calculer $g[f(x)]$.

On obtient ainsi une nouvelle fonction h appelée **composée de f suivie de g** et noter $\boldsymbol{h = g \circ f}$.

$h(x) = g \circ f(x) = g[f(x)]$.

Exemple

On pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3x^2 + 1$

Pour calculer $f(x)$, il faut $x \geqslant 0$.

Si $x \geqslant 0$, $h(x) = g \circ f(x) = g[f(x)] = 3(\sqrt{x})^2 + 1 = 3x + 1$

Attention à l'ordre dans lequel sont effectuées es opérations :

$3x^2 + 1$ est toujours positif, on peut donc prendre sa racine carrée.

On a alors: pour tout x réel, $k(x) = f \circ g(x) = f[g(x)] = \sqrt{3x^2+1}$

Variation d'une fonction composée

f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J.
g est une fonction définie sur J.
On peut donc définir la fonction h fonction composée de f suivie de g. $h = g \circ f$.
1) Si f est croissante sur I et g croissante sur J alors h est croissante sur I.
2) Si f est décroissante sur I et g décroissante sur J alors h est croissante sur I.
3) Si f est décroissante sur I et g croissante sur J alors h est décroissante sur I.
4) Si f est croissante sur I et g décroissante sur J alors h est décroissante sur I.

En résumé:
la fonction composée h est croissante si f et g ont la même monotonie.
la fonction composée h est décroissante si f et g sont de monotonie différente.