Index

1 Que dit le programme de 1ES?

Comportement des fonctions de référence à l'infini: $x \mapsto x^2, x \mapsto x^3, x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto \dfrac{1}{x}, x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

en zéro: $x \mapsto \dfrac{1}{x}, x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

Asymptote horizontale, verticale ou oblique.

Ce travail sera illustré à l'aide des outils graphiques . On s'intéressera à des fonctions mises sous la forme:

$f(x) = a\,x + b + \epsilon(x)$, la fonction ϵ tendant vers 0 en $+\infty$ ou en $-\infty$.

On s'appuiera sur l'intuition; les résultats usuels sur les sommes et produits de limites apparaîtront à travers des exemples et **seront ensuite énoncés clairement.**

2 De quoi s'agit-il?

On se place dans un repère et on le positionne selon l'usage usuel.

On lit donc de gauche à droite sur l'axe des abscisses et de bas en haut sur l'axe des ordonnées.

Le symbole $+\infty$ (respectivement : $-\infty$) n'est pas un nombre mais une notation pour indiquer que les nombres réels prennent des valeurs de plus en plus "hautes" (respectivement: de plus en plus basses) sur l'axe des ordonnées ou de plus en plus "à droite" (respectivement: de plus en plus "à gauche") sur l'axe des abscisses.

Lorsqu'une expression comme $\dfrac{1}{x}$ ou $\dfrac{1}{x^2}$ n'est pas définie pour la valeur 0, mais pour toute autre valeur aussi proche de 0 que l'on veut, on s'intéresse alors au "comportement" de l'expression.

Ces comportements se traduisent rigoureusement par la notion de limite.

3 Notion de limite

Dans tout le paragraphe, f est une fonction et C_f sa représentation graphique dans un repère.

La fonction f est définie sur un voisinage qui permet de donner du sens aux phrases x tend vers $+\infty$, x tend vers $-\infty$ ou x tend vers le réel a.

Par exemple, si f est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, on peut se poser la question:

que se passe-t-il quand x tend vers $+\infty$?

ou que se passe-t-il quand x tend vers 0?

Mais, les questions suivantes sont des non-sens:

que se passe-t-il quand x tend vers $-\infty$?

que se passe-t-il quand x tend vers -1?

Dans les définitions suivantes, le symbole ω désigne $+\infty$ ou $-\infty$ ou un réel a selon les cas.

Vous pouvez (et devez) illustrer tous les exemples d'étude de fonctions à l'aide des représentations

graphiques.

La calculatrice graphique est un outil pour prévoir ou pour vérifier (jamais pour démontrer).

3.1 Limite égale à +∞.

le symbole ω désigne +∞ ou –∞ ou un réel a selon les cas.

3.1.1 Définition

Remarque: A est un réel quelconque que l'on peut choisir aussi grand que l'on veut.

Dire que la limite de f en ω est +∞ signifie que C_f reste au-dessus de la droite d'équation $y = A$ où A est un réel quelconque dès que x est suffisamment proche de ω.

On note: $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = +\infty$

On lit: la limite de f quand x tend vers ω est +∞, ou, la limite de f en ω est +∞.

3.1.2 Illustrations

3.1.2.1 Lorsque x tend vers –∞.

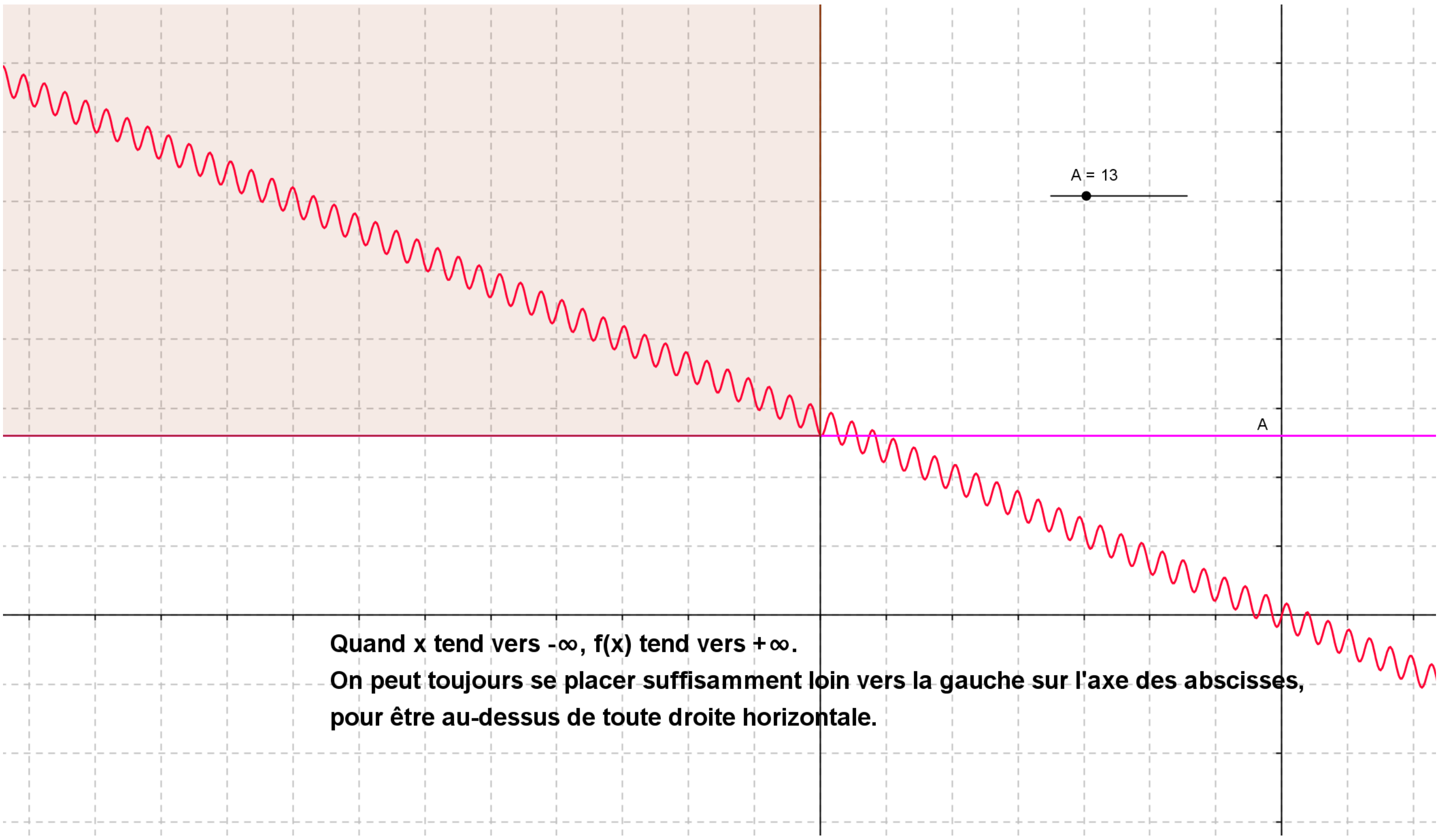


Illustration 1 avec GeoGebra

3.1.2.2 Lorsque x tend vers +∞.

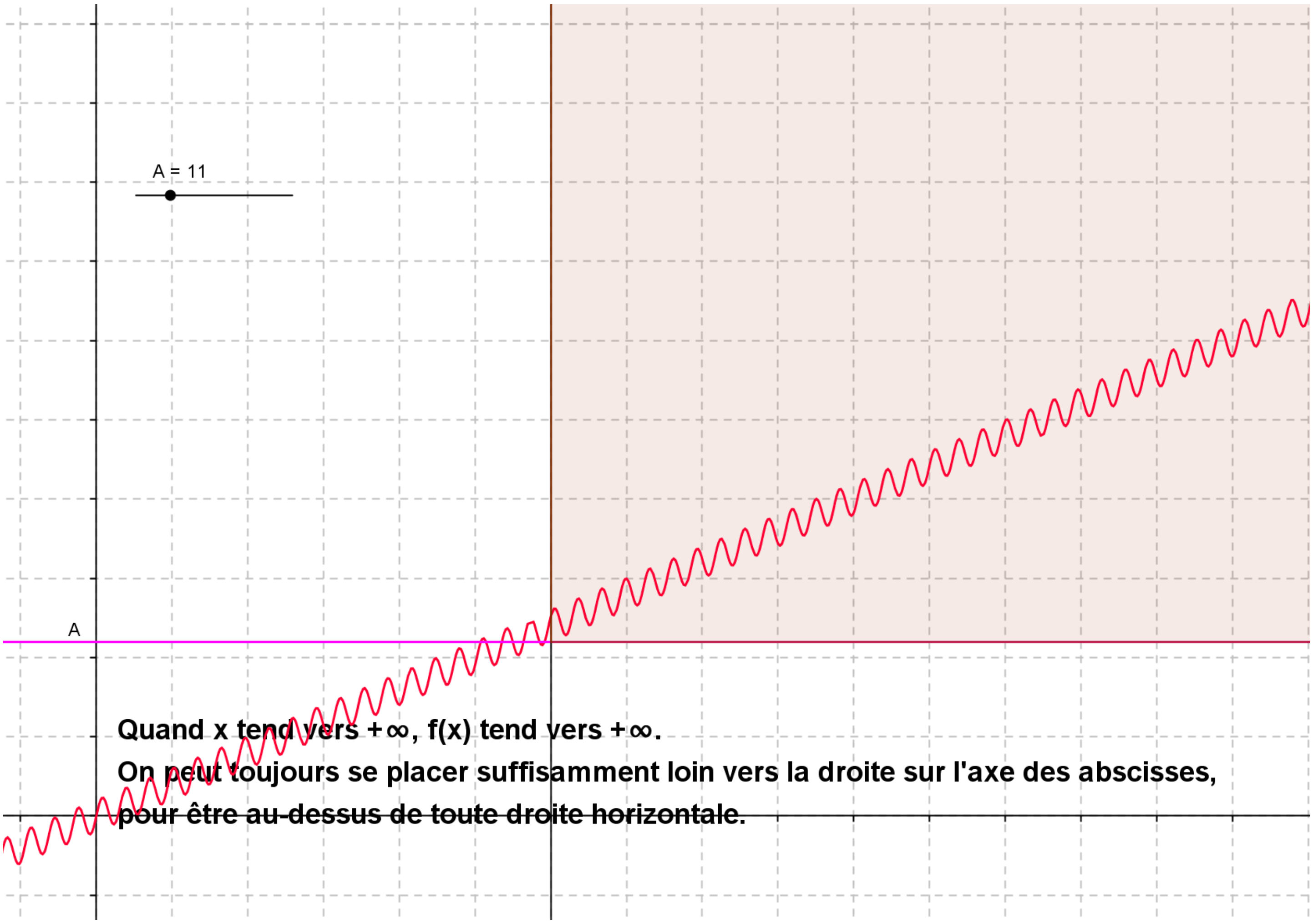


Illustration 2 avec GeoGebra

3.1.2.3 *Lorsque x tend vers un réel a.*

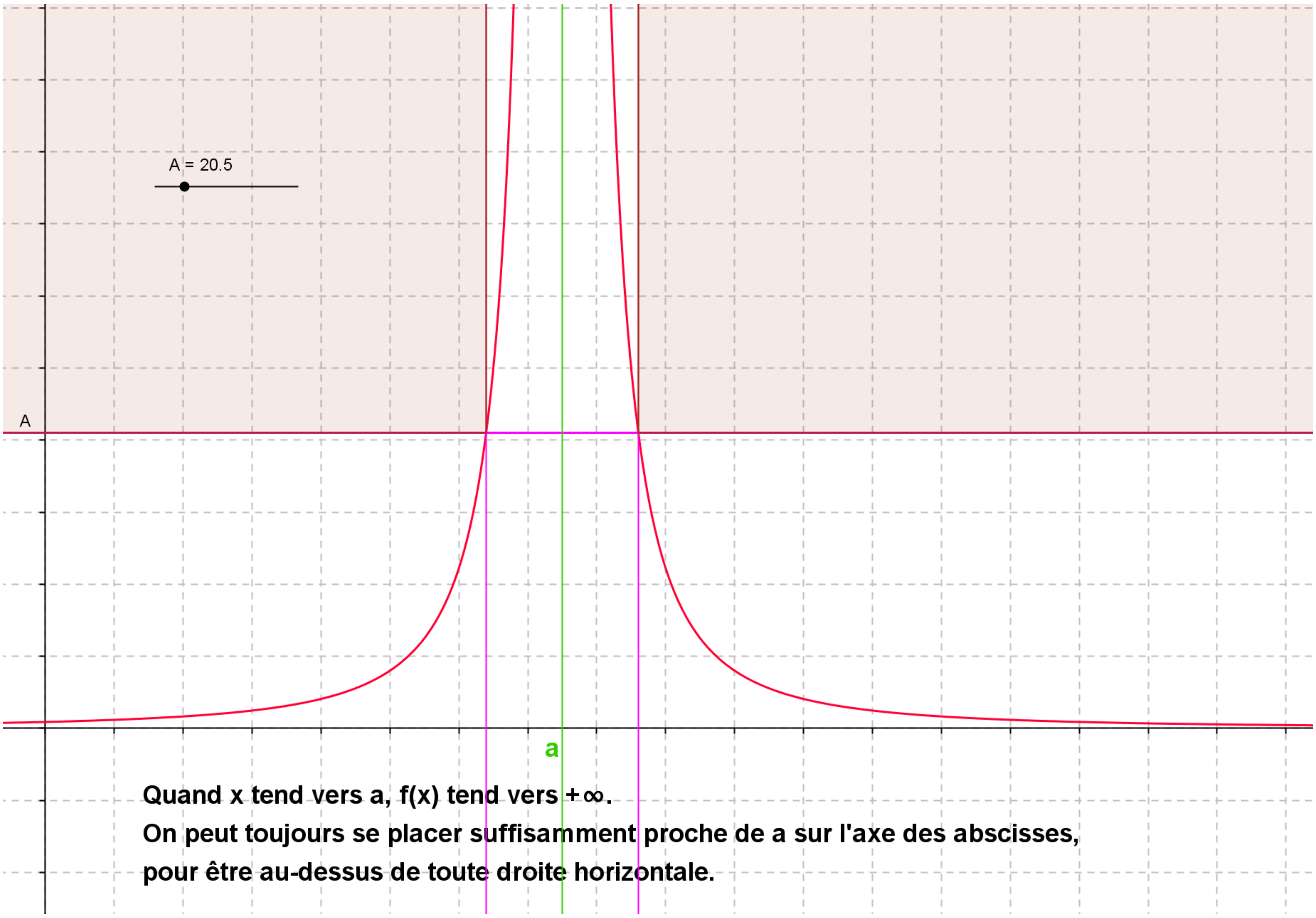


Illustration 3 avec GeoGebra

Voir aussi le paragraphe: asymptote verticale

3.2 Limite égale à $-\infty$

le symbole ω désigne $+\infty$ ou $-\infty$ ou un réel a selon les cas.

3.2.1 Définition

Remarque: A est un réel quelconque que l'on peut choisir aussi loin que possible vers $-\infty$.

Dire que la limite de f en ω est $-\infty$ signifie que C_f reste au-dessous de la droite d'équation $y = A$ où A est un réel quelconque dès que x est suffisamment proche de ω.

On note: $\lim_{x \to \omega} f(x) = -\infty$

On lit: la limite de f quand x tend vers ω est $+\infty$, ou, la limite de f en ω est $-\infty$.

3.2.2 Illustrations

3.2.2.1 Lorsque x tend vers $-\infty$.

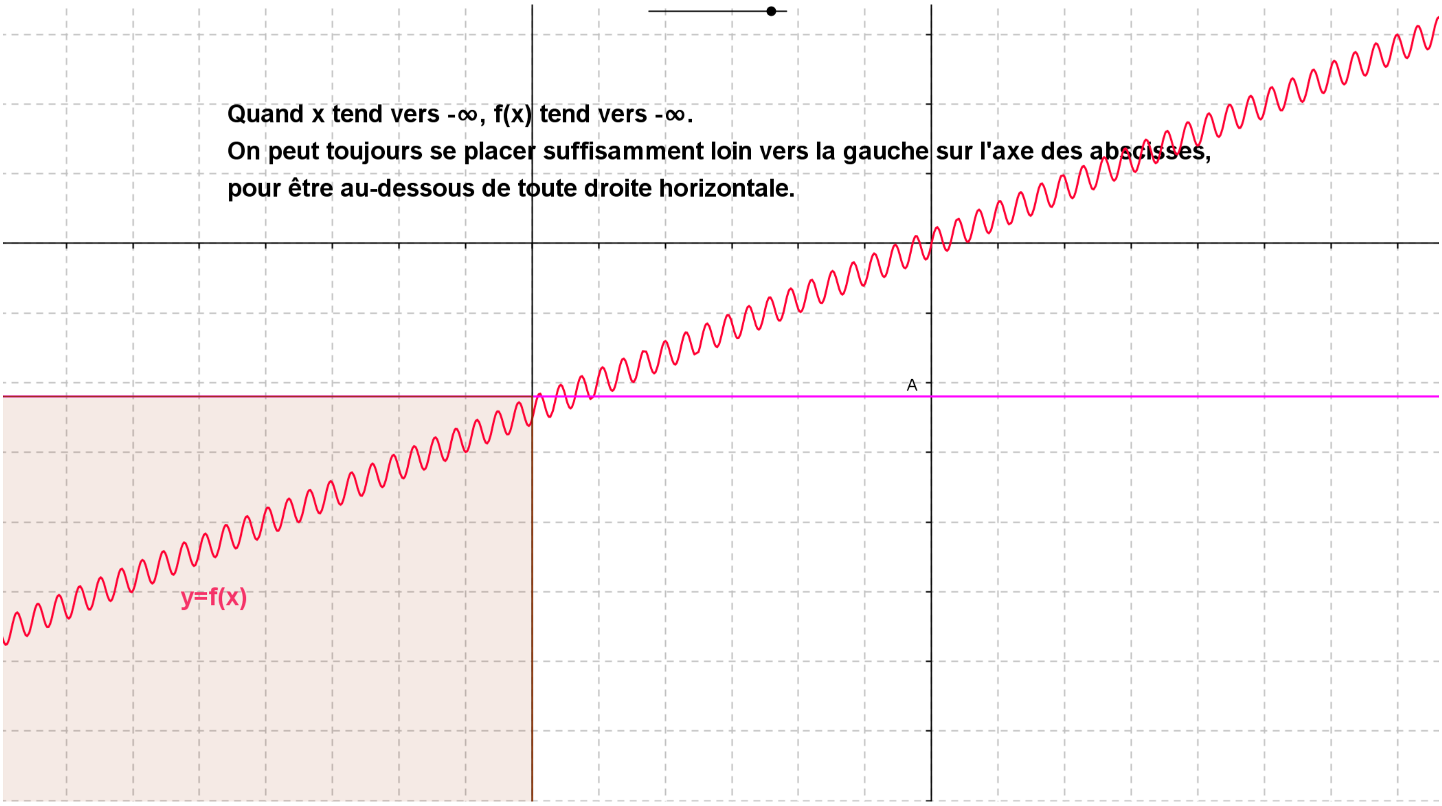


illustration 4 avec GeoGebra

3.2.2.2 Lorsque x tend vers $+\infty$.

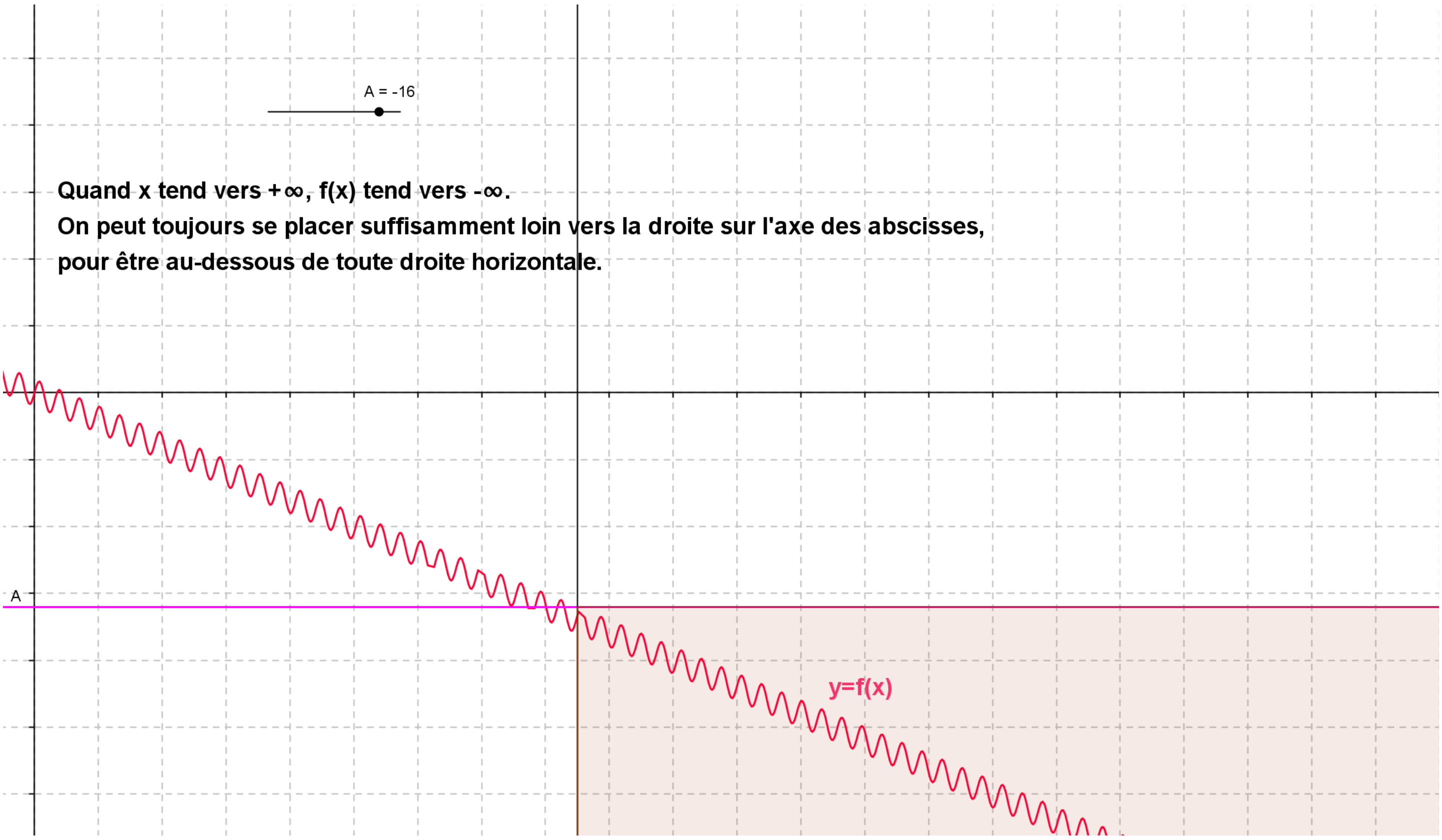


Illustration 5 avec GeoGebra

3.2.2.3 Lorsque x tend vers un réel a.

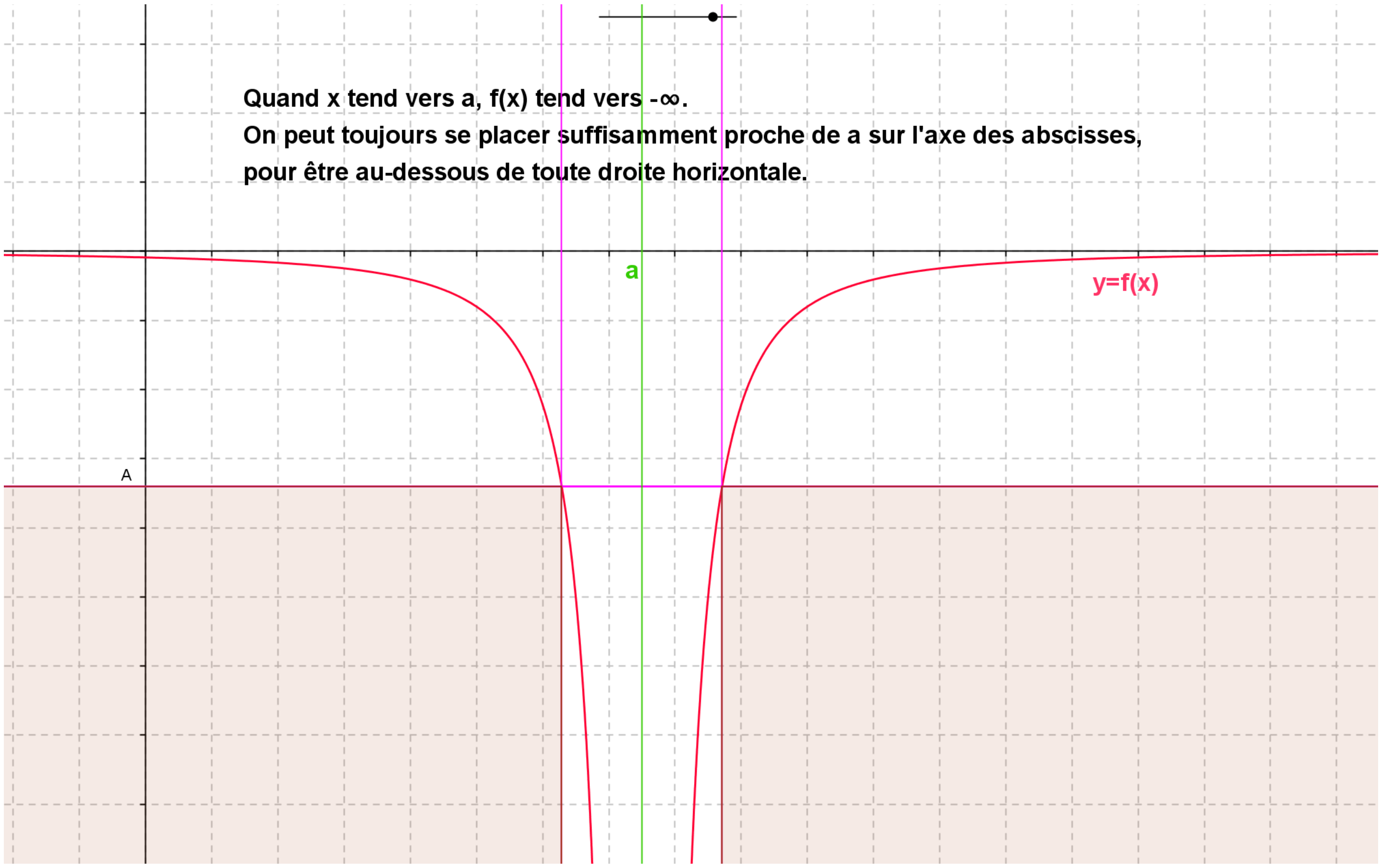


Illustration 6 avec GeoGebra

Voir aussi le paragraphe: asymptote verticale

3.3 Limite égale à un réel l

le symbole ω désigne $+\infty$ ou $-\infty$ ou un réel a selon les cas.

3.3.1 Définition

l est un nombre réel donné (fixé)

On définit une bande (horizontale) centrée sur la droite d'équation $y = l$.

Autrement dit, cette bande est limitée par deux droites (les bords de la bande) d'équation $y = l + \epsilon$ et $y = l - \epsilon$ où ϵ est un réel quelconque non nul (aussi petit que l'on veut).

La bande peut être aussi étroite que l'on veut.

Dire que la limite de f en ω est le réel l signifie que la courbe C_f est entièrement incluse dans toute bande centrée sur la droite d'équation $y = l$ dès que x est suffisamment proche de ω.

On note: $\lim_{x \to \omega} f(x) = l$, et, on lit: la limite de $f(x)$ quand x tend vers ω est égale à l, ou $f(x)$ tend vers l quand x tend vers ω.

3.3.2 Illustrations

3.3.2.1 Lorsque x tend vers $-\infty$.

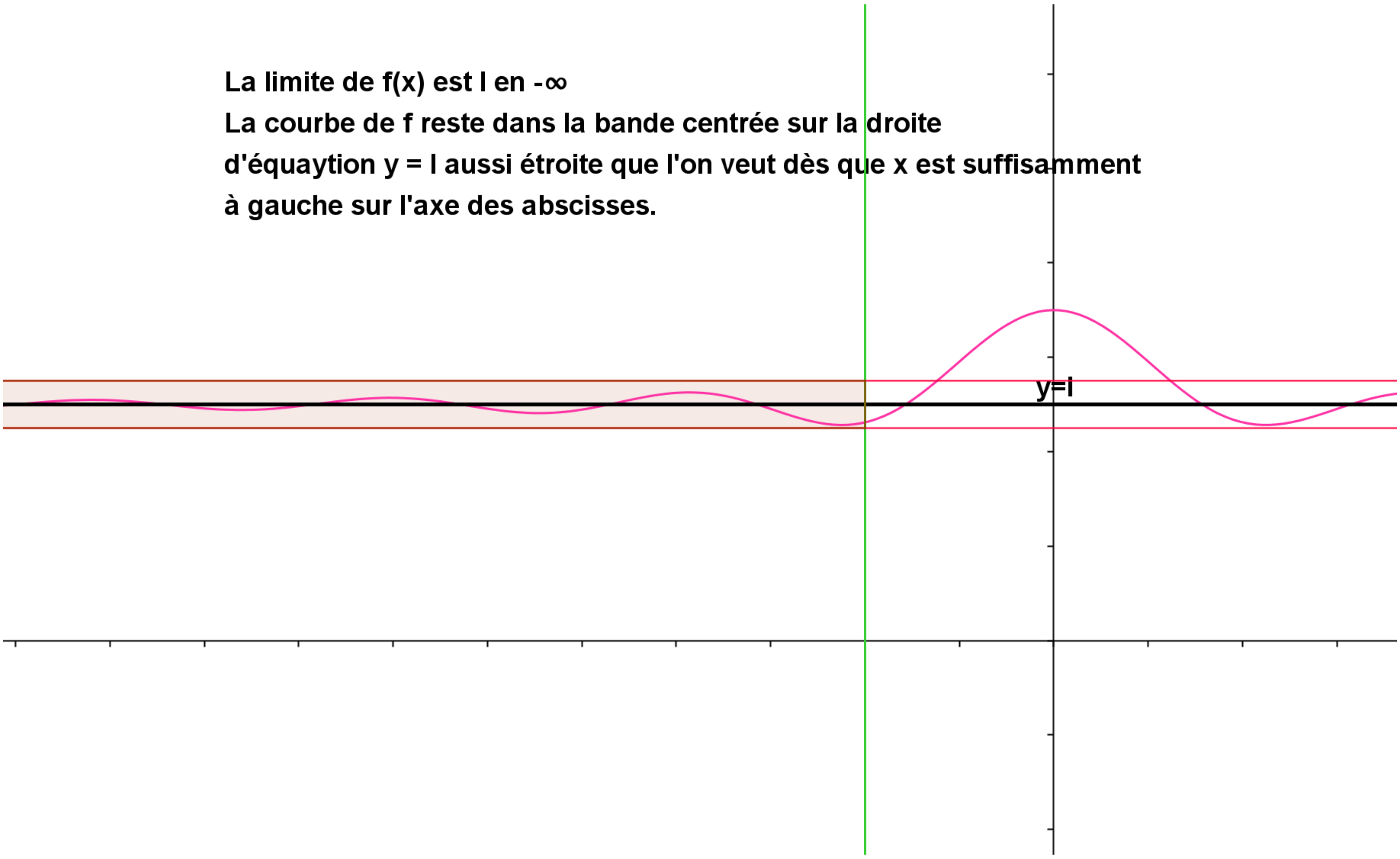


Illustration 7 avec GeoGebra

Voir aussi le paragraphe: asymptote horizontale

3.3.2.2 Lorsque x tend vers +∞.

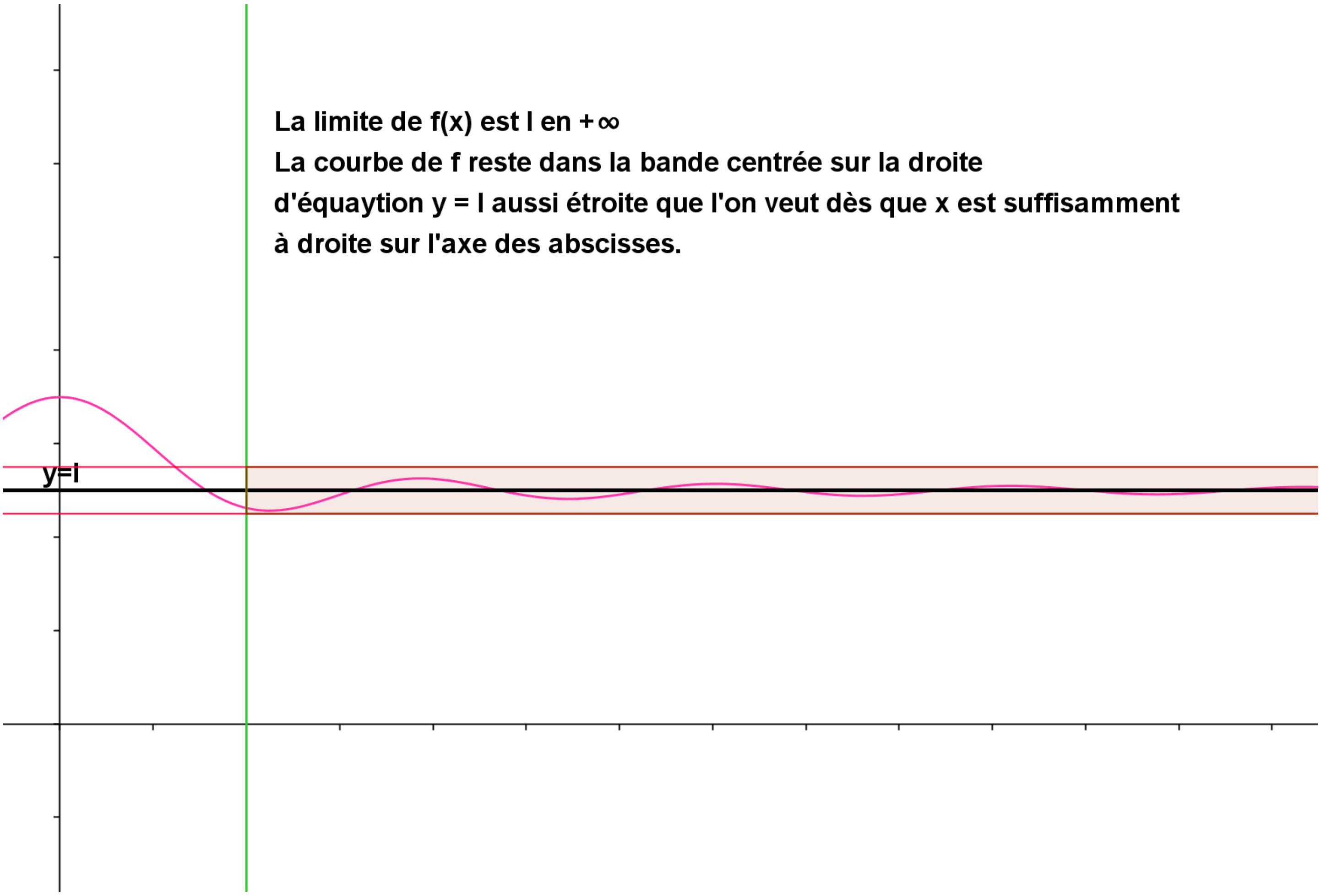


Illustration 8 avec GeoGebra

Voir aussi le paragraphe: asymptote horizontale

3.3.2.3 **Lorsque *x* tend vers un réel *a*.**

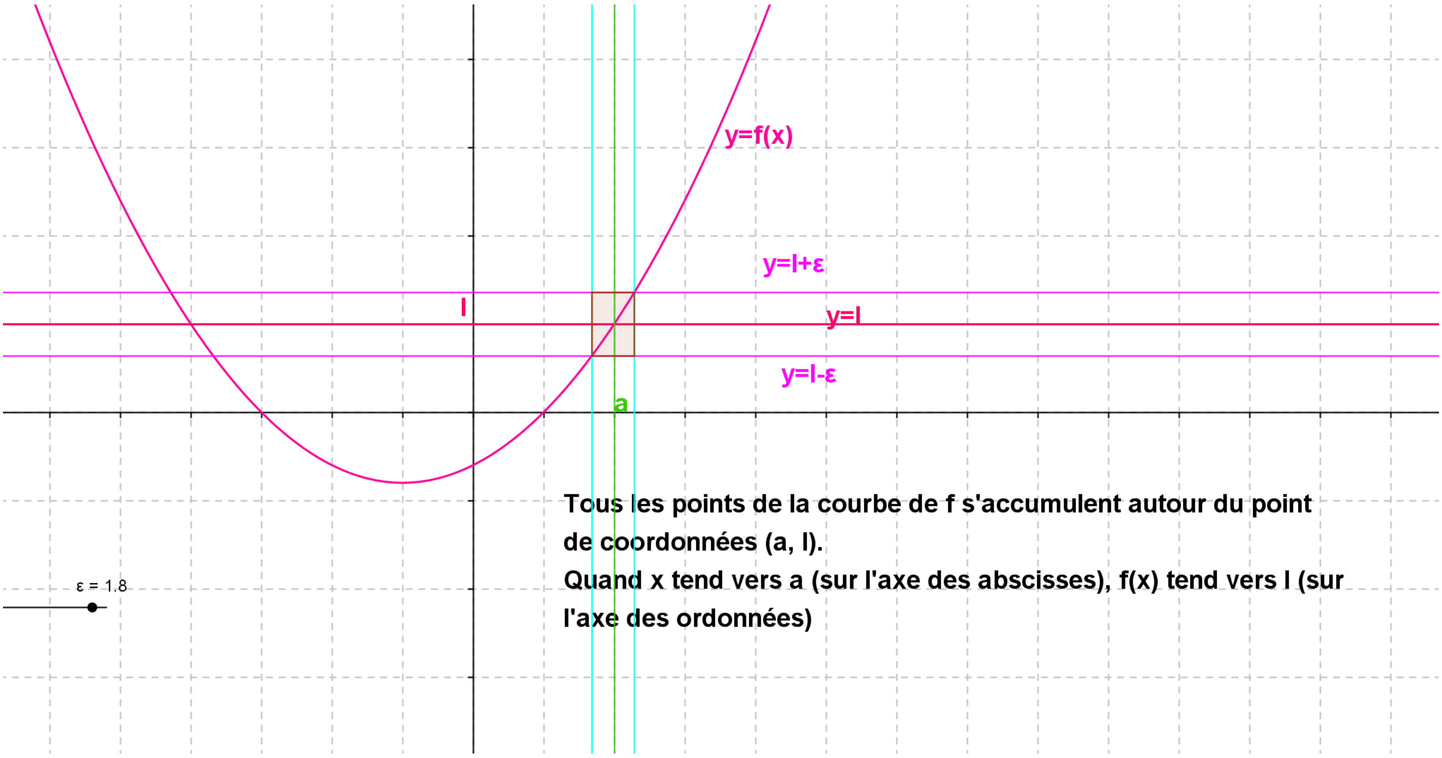


Illustration 9 avec GeoGebra

Cette notion est celle que l'on a déjà rencontrée dans le cas où on a étudié la dérivabilité d'une fonction.

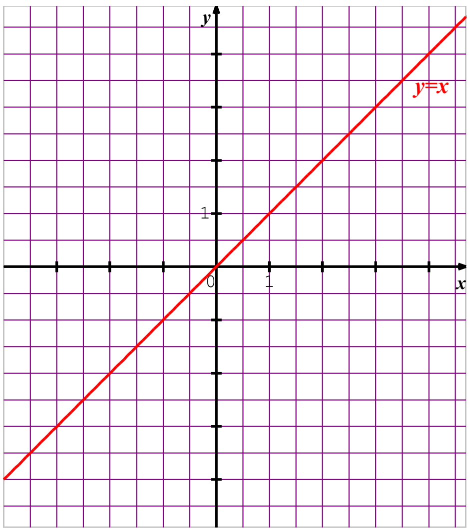
En effet, si on nomme τ la fonction $h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, on a eu besoin d'étudier $\lim_{h\to 0} \tau(h)$

Voir le paragraphe: retour au nombre dérivé

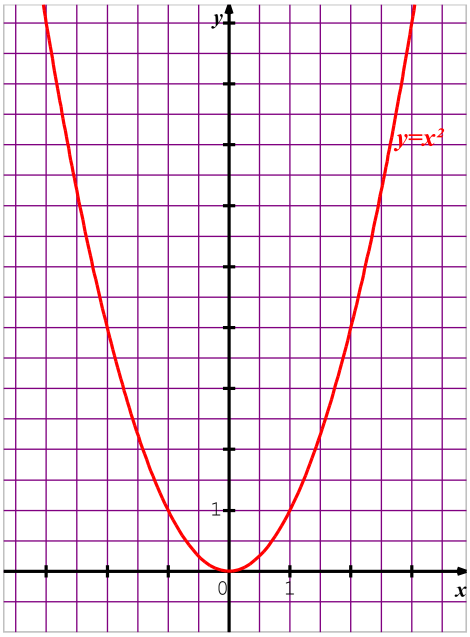
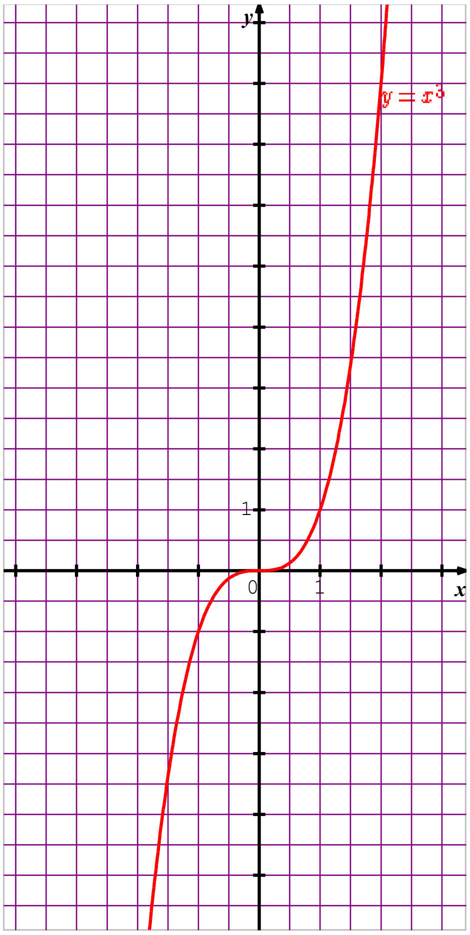
4 Limites des fonctions de référence

Dans tous les cas, il suffit de retenir l'allure de la courbe représentative pour retenir le résultat.

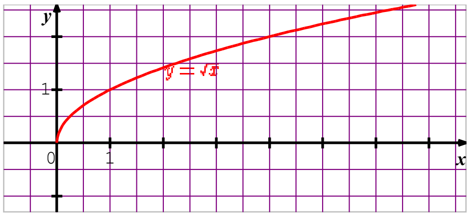
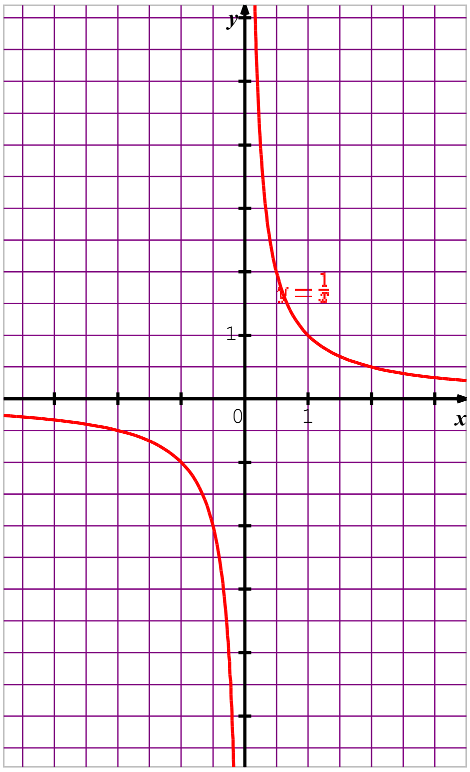
Les limites indiquées sont celles aux bornes des intervalles de définition de la fonction.

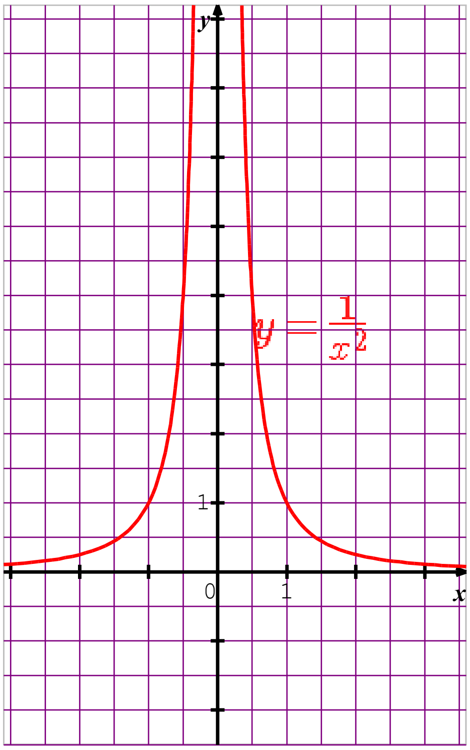
Fonction	Observation	Limites
$x \mapsto x$ $D_f =]-\infty; +\infty[$		**En −∞,** $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$. **En +∞,** $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

Comportements asymptotiques

Fonction	Observation	Limites
$x \mapsto x^2$ $D_f =]-\infty ; +\infty[$		**En $-\infty$,** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$. **En $+\infty$,** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
$x \mapsto x^3$ $D_f =]-\infty ; +\infty[$		**En $-\infty$,** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$. **En $+\infty$,** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

Comportements asymptotiques

Fonction	Observation	Limites
$x \mapsto \sqrt{x}$ $D_f = [0; +\infty[$		**En 0,** $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ **En +∞,** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$		**En –∞;** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ **En 0:** Si $x < 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ Si $x > 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ **En +∞;** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Fonction	Observation	Limites
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ $D_f =]-\infty;\, 0[\cup]0;\, +\infty[$		**En $-\infty$;** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ **En 0;** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ **En $+\infty$;** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

5 Opérations sur les fonctions et limites

Mises en garde:

* Une limite de fonction ne donne pas nécessairement un nombre réel (c'est une étude du comportement de la fonction quand la variable tend vers ...)

On ne fait pas des opérations sur les limites, mais, on fait des opérations sur les fonctions (on trouve une autre fonction: voir un précédent chapitre sur les fonctions), et, on cherche la limite de la nouvelle fonction

** Les théorèmes suivants sont admis.

*** Comme tous les théorèmes, ils s'énoncent sous la forme "si ... alors ..."

Le plus important dans ces théorèmes est de retenir les formes où ils ne permettent pas de conclure,

car, quand ils permettent de conclure, ils sont "évidents" et ne posent donc pas de difficultés.

**** le symbole ω désigne $+\infty$ ou $-\infty$ ou un réel a selon les cas.

5.1 Limite de la somme de deux fonctions

Si f a pour limite en ω,	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et, si g a pour limite en ω,	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors, $f+g$ a pour limite en ω,	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut pas conclure

Des exemples:

5.1.1.1 Exemple 1

a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$

f est la somme de deux fonctions: $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$

En $+\infty$, on sait: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (Théorème sur limite d'une somme de fonctions)

En $-\infty$, on sait: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, d'où, **on ne peut pas conclure ainsi** **(une méthode sera indiquée lorsque toutes les propriétés auront été étudiées: voir paragraphe, limite d'un polynôme à l'infini)**

5.1.1.2 Exemple 2

b) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

g est la somme de deux fonctions: $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

5.1.1.2.1 En l'infini

En $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ (Théorème sur limite d'une somme de fonctions)

De même, en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

5.1.1.2.2 En 0

En 0, **deux cas**

Limite à gauche ($x < 0$), $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x) = -\infty$.

Limite à droite ($x > 0$), $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = +\infty$.

Voir aussi le paragraphe : asymptote verticale

5.2 Limite du produit de deux fonctions

Si f a pour limite en ω,	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
et, si g a pour limite en ω,	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
alors, $f\times g$ a pour limite en ω,	$l\times l'$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut pas conclure

5.2.1.1 Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (x + 5)\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

f est le produit de deux fonctions $x \mapsto x+5$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x} - 1$

5.2.1.1.1 En l'infini

En $+\infty$, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 = 5$, d'où, (limite d'une somme), $\lim\limits_{x\to+\infty} x+5 = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -1 = -1$, d'où, (limite d'une somme), $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}-1\right) = -1$

On en déduit: $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+5)\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = -\infty$.

En $-\infty$, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 5 = 5$, d'où, (limite d'une somme), $\lim\limits_{x\to-\infty} x+5 = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -1 = -1$, d'où, (limite d'une somme), $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x}-1\right) = -1$

On en déduit: $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+5)\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = +\infty$.

5.2.1.1.2 En 0

En 0, **deux cas**

Limite à gauche ($x < 0$),

$\lim\limits_{x\to 0} (x+5) = 5$, et, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} -1 = -1$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{1}{x} - 1 = -\infty$ (limite d'une somme ...)

On en déduit: (limite d'un produit) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} (x+5)\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = -\infty$.

Limite à droite ($x > 0$),

$\lim\limits_{x\to 0} (x+5) = 5$, et, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} -1 = -1$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} - 1 = +\infty$ (limite d'une somme ...)

On en déduit: (limite d'un produit) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (x+5)\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = +\infty$.

Voir aussi le paragraphe : asymptote verticale

5.3 Limite de l'inverse d'une fonction

Si f a pour limite en ω,	$l \neq 0$	**0** $f(x) > 0$ pour x voisin de ω	**0** $f(x) < 0$ pour x voisin de ω	$+\infty$	$-\infty$
alors, $\dfrac{1}{f}$ a pour limite en ω,	$\dfrac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

5.3.1.1 Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

f est l'inverse de la fonction $x \mapsto x-3$

5.3.1.1.1 En l'infini

En $-\infty$, on sait: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3) = -\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-3} = 0$ (limite de l'inverse)

En $+\infty$, on sait: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3) = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-3} = 0$ (limite de l'inverse)

5.3.1.1.2 En 3

En 3, on a deux cas, en effet, **$x - 3$ change de signe en 3**
Limite à gauche ($x < 3$), en ce cas: $x - 3 < 0$

$\lim\limits_{x\to3} x-3 = 0$ et $x - 3 < 0$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\dfrac{1}{x-3} = -\infty$.

Limite à droite ($x > 3$), en ce cas: $x - 3 > 0$

$\lim\limits_{x\to3} x-3 = 0$ et $x - 3 > 0$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\dfrac{1}{x-3} = +\infty$.

Voir aussi le paragraphe : asymptote verticale

5.4 Limite d'un quotient de deux fonctions

Si f a pour limite en ω,	l	l	$l \neq 0$	∞	0
et, si g a pour limite en ω,	$l' \neq 0$	∞	0	∞	0
alors, $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en ω,	$\dfrac{l}{l'}$	0	∞ et étudier le signe	on ne peut pas conclure	on ne peut pas conclure

5.4.1.1 Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

f est le quotient de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x-1$

5.4.1.1.1 En l'infini

En $-\infty$ et en $+\infty$, on ne peut pas conclure avec ce théorème, car, le numérateur et le dénominateur ont des limites infinies. (On verra la méthode au paragraphe suivant).

5.4.1.1.2 En 1

En 1: on a deux cas, en effet, $x - 1$ change de signe en 1.

Limite à gauche ($x < 1$), en ce cas: $x - 1 < 0$

On a: $\lim\limits_{x \to 1} x^2$ **= 1 et** $\lim\limits_{x \to 1} x-1$ **= 0 et** $x - 1 < 0$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

Limite à droite ($x > 1$), en ce cas: $x - 1 > 0$

On a: $\lim\limits_{x \to 1} x^2$ **= 1 et** $\lim\limits_{x \to 1} x-1$ **= 0 et** $x - 1 > 0$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$.

Voir aussi le paragraphe : asymptote verticale

5.5 Des exemples Des méthodes

5.5.1 limite d'un polynôme à l'infini

Soit f la fonction polynôme définie sur ℝ par $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$

Limites en –∞ et en +∞.

Dans les deux cas, si on cherche à appliquer le théorème sur la limite d'une somme de fonctions, on ne peut pas conclure.

La méthode consiste à transformer l'écriture en factorisant le terme de plus haut degré.

Cette méthode se retrouve avec d'autres fonctions qui seront étudiées en terminale.

Pour $x \neq 0$, $x^3 - x^2 - 3x + 1 = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - 3\times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = f(x)$.

Maintenant, $f(x)$ est écrit sous forme d'un produit.

Ainsi, quand x tend vers l'infini (+ ou – ∞), les nombres $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x^3}$ tendent vers 0.

D'où, la somme entre parenthèses $1 - \frac{1}{x} - 3\times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ tend vers 1 quand x tend vers + ou – ∞.

On a alors: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1$.

On peut conclure (limite d'un produit): $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

La même démarche mène à: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

5.5.2 limite d'une fonction rationnelle à l'infini

Une fonction rationnelle est un quotient de deux polynômes.

5.5.2.1 exemple 1

a) Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1}$

Limites en –∞ et en +∞.

Dans les deux cas, si on cherche à appliquer le théorème sur la limite d'un quotient de fonctions, on ne peut pas conclure.

Comme pour les polynômes, on factorise au numérateur et au dénominateur les termes de plus haut degré et ensuite, on "simplifie" les facteurs communs.

Pour $x \neq 0$, $2x^2 - 5x + 1 = x^2(2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2})$ et $x^2 + 1 = x^2(1 + \frac{1}{x^2})$

On peut écrire: $f(x) = \dfrac{x^2(2-5/x+1/x^2)}{x^2(1+1/x^2)} = \dfrac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$

D'après le paragraphe précédent, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$

On peut conclure (limite d'un quotient): $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

La même démarche en $-\infty$ mène à: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

5.5.2.2 Exemple 2

b) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^3+2x-1}{x^2+1}$.

Limites en –∞ et en +∞.

La démarche prise au a) donne successivement:

$$g(x) = \frac{x^3(1+2/x^2-1/x^3)}{x^2(1+1/x^2)} = \frac{x\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Au numérateur, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3} = 1$, d'où, (produit) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$

Au dénominateur, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$

On peut conclure (quotient): $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

La même démarche en $-\infty$ mène à: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

5.5.2.3 Exemple 3

c) Soit la fonction h définie sur ℝ par $h(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+1}$

Limites en –∞ et en +∞.

La démarche prise au a) donne successivement:

pour $x \neq 0$, $h(x) = \dfrac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{3-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

Au numérateur, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\frac{1}{x} = 3$

Au dénominateur: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$, d'où, (produit), $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

On peut conclure (quotient): $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

La même démarche en $-\infty$ mène à: $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$

5.5.3 retour au nombre dérivé

En cherchant la limite quand *x* tend vers *a* du taux d'accroissement de *f* en *a* déterminer le nombre dérivé en *a*, s'il existe, *f ′* (*a*)

$f(x) = \frac{x+1}{2x+5}$ et $a = 2$

On a: $f(2) = \frac{1}{3}$.

On cherche donc: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-\frac{1}{3}}{x-2}$

Il est évident qu'on ne peut pas conclure ainsi car cette forme mène nécessairement à un quotient de la forme 0 sur 0.

Calcul de $f(x) - \frac{1}{3} = \frac{x+1}{2x+5} - \frac{1}{3} = \frac{3(x+1)-1\times(2x+5)}{3(2x+5)} = \frac{x-2}{3(2x+5)}$.

Le taux d'accroissement vaut donc: $\frac{x-2}{3(2x+5)} \times \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3(2x+5)}$ après simplification par $x - 2$

Comme $\lim\limits_{x\to 2} 3(2x+5) = 27$, on en déduit: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-\frac{1}{3}}{x-2} = \frac{1}{27}$.

f est donc dérivable en 2 et $f'(2) = \frac{1}{27}$.

6 Asymptotes

Grosso modo, les courbes asymptotes sont des courbes qui sont extrêmement proches quant à leur comportement.

Dans le programme du lycée, on ne considère que des droites asymptotes à C_f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Le vocabulaire usuel provient de l'observation à partir des représentations graphiques habituelles.

6.1 Asymptote verticale

Dire que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à C_f signifie que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Illustrations voir les paragraphes : limite $+\infty$ en *a* et limite $-\infty$ en *a*.

Exemples:

Les exemples étudiés au paragraphe 5: limites et opérations, ont montré que:

6.2 Asymptote horizontale

Dire que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à C_f en $+\infty$ (respectivement: en $-\infty$) signifie que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (respectivement: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$)

Illustrations voir les paragraphes : limite égale à l en $+\infty$ et limite égale à l en $-\infty$.

Exemples:

Les exemples étudiés au paragraphe 5: limites et opérations, ont montré que:

6.3 Asymptote oblique

f est une fonction définie sur un ensemble ayant une borne $+\infty$ (respectivement: $-\infty$)

6.3.1 Définition

Dire que la droite d'équation $y = a\,x + b$ est asymptote à C_f en $+\infty$ (respectivement: en $-\infty$) signifie que : $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ (respectivement: $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

6.3.2 Propriété (équivalente à la définition)

Dire que la droite d'équation $y = a\,x + b$ est asymptote à C_f en $+\infty$ (respectivement: en $-\infty$) signifie qu'on peut écrire $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$ (respectivement: $\lim_{x \to -\infty} \varepsilon(x) = 0$)

6.3.3 Exemple

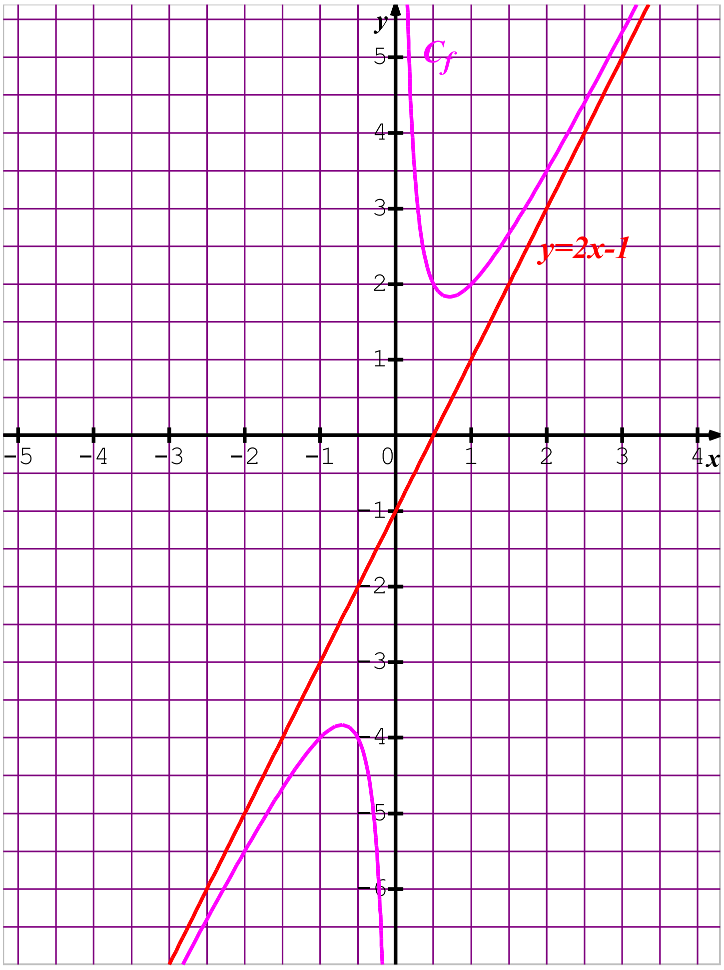
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x}$

Il est évident que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

D'après la propriété du § précédent, la droite d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote à C_f.

Il en de même en $-\infty$.

Graphique:



y
x
C_f
y=2x-1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6