Table des matières

Un peu d'histoire

Il n'existe pas un seul logarithme, mais des logarithmes.

Le ***logarithme népérien*** a été créé par l'écossais John Napier (francisé en Jean Neper) au début du XVIIème siècle afin de faciliter les calculs astronomiques (au sens propre et au sens figuré) en transformant des produits en somme... aller et retour.

En langage actuel, il a cherché une fonction bijective f qui vérifie $f(a \times b) = f(a) + f(b)$.

Les mathématiciens de l'époque ont alors bâti (à la main!) des tables de logarithmes.

On veut multiplier A par B.

On cherche dans la première colonne le nombre A, et, on lui associe son logarithme ($\log(A)$), on cherche de même log(B).

On ajoute log(A) + log(B) = S, et, dans la colonne des logarithmes, on cherche S.

Retour à la première colonne, on lit $A \times B$ en face de S.

Un exemple:

On crée une table où on met en correspondance les puissances de 7 et les exposants, et, on utilise cette table pour faire le calcul suivant (que je ne qualifierai pas d'astronomique): $5\ 764\ 801 \times 2\ 401$

Nombres	**Logarithmes**	**Explications:**
1	**0**	
7	1	
49	2	on lit le logarithme de chacun des facteurs
343	3	
2401	4	
16807	5	On fait la somme
117649	6	
823543	7	
5764801	8	
40353607	9	
282475249	10	
1977326743	11	
13841287201	12	

On lit: $5\ 764\ 801 \times 2\ 401 = 13\ 841\ 287\ 201$

Évidemment, il faudrait compléter cette table pour tous les entiers, puis, les décimaux, puis, ...

Et, c'est là toute la beauté des mathématiques....

Dans la liste des primitives des fonctions, il n'y a aucun problème pour ... x^{-3} ; x^{-2} ; x^{0} ; x^{1} ; x^{2} ; ..., mais, il manque x^{-1}

Remarque: on suppose $x > 0$ et les primitives sont définies à une constante près.

Fonctions	**Primitives**
$x \mapsto x^{-3}$	$x \mapsto -\frac{1}{2}x^{-2}$
$x \mapsto x^{-2}$	$x \mapsto -x^{-1}$
$x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$	**Le trou**
$x \mapsto x^{0}$	$x \mapsto x$
$x \mapsto x^{1}$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^{2}$
$x \mapsto x^{2}$	$x \mapsto \frac{1}{3}x^{3}$

et, quelle est donc cette fonction primitive de la fonction inverse.... C'est un logarithme.

Et, toujours plus beau...

Vous venez d'apprendre à construire la fonction exponentielle; vous avez montré que c'était une bijection. Vous avez donc un "retour", une fonction réciproque de l'exponentielle, celle qui permet de résoudre $e^x = a$ lorsque $a > 0$, et, cette solution est le logarithme népérien de a.

I- Une définition du logarithme népérien.

I-1- Primitive d'une fonction continue

Rappel du §III-3 vu dans le chapitre sur la dérivation: dérivation

f, étant une fonction continue sur un intervalle I, on appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple: Les fonctions $F: x \mapsto x^2+2x$ et $F: x \mapsto x^2+2x-1$ sont des primitives de $f: x \mapsto 2x+2$

I-2- Définition du logarithme népérien.

I-2-1: Définition

La primitive de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 s'appelle ***logarithme népérien***, noté, ln.

I-1-2- Conséquences immédiates

La fonction ln est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$\ln(1) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$,

d'où, ln est une fonction **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

$0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < 0$

$x > 1 \Leftrightarrow \ln(x) > 0$

$0 < a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

$a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$

$\ln(1 + h) \approx h$ dès que h est suffisamment petit ou encore: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

x	0		1		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	‖	+		+	
$\ln(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

I-3- Logarithme népérien et exponentielle.

À la recherche de la fonction réciproque de l'exponentielle.

On a vu au §II-4 de la fonction exponentielle que:

la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.

Il existe donc une fonction f réciproque de exp, définie sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que,

pour tout $x > 0$, $\exp \circ f(x) = x$

pour tout x réel, $f \circ \exp(x) = x$

$\mathbb{R} \longrightarrow]0; +\infty[$

$x \mapsto \exp(x)$

Montrons que cette fonction f est dérivable.

On pose pour $a > 0$, $x > 0$ et $x \neq a$, $\tau(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Par définition de f: Si $f(x) = X$ et $f(a) = A$ alors $\exp(X) = x$ et $\exp(A) = a$, d'où, $\tau(x) = \dfrac{X - A}{e^X - e^A}$

Or, la fonction exponentielle est dérivable et sa dérivée est elle-même, d'où,

$\lim\limits_{X \to A} \dfrac{e^X - e^A}{X - A} = \exp'(A) = e^A$.

La fonction exponentielle est continue, d'où, quand x vers a, X tend vers A, et, par conséquent:

$\lim\limits_{x \to a} \tau(x) = \dfrac{1}{e^A} = \dfrac{1}{a}$. Ce qui prouve: f est dérivable et $f'(a) = \dfrac{1}{a}$

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction inverse.

Or $f(1) = 0$, car, $e^0 = 1$.

Conclusion:

La fonction réciproque est la primitive de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1, c'est donc, la fonction ***logarithme népérien.***

On a donc:

Pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$,

pour tout x réel, $\ln(e^x) = x$

$\ln(e) = 1$

Pour $k > 0$, l'équation $e^x = k$ a pour solution $\ln(k)$.

$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$

II- Propriété fondamentale du logarithme népérien.

II-1- Logarithme d'un produit et somme de logarithmes

II-1-1- Énoncé de la propriété

Si $a > 0$ et $b > 0$ alors $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Preuve:

D'après le paragraphe précédent: $\exp(\ln(ab)) = ab$ et

d'autre part, $\exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp((\ln(a)) \times \exp(\ln(b)) = ab$.

Comme $\exp(X) = \exp(Y) \Leftrightarrow X = Y$, on en déduit: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

II-1-2- Conséquences algébriques

Pour tout $a > 0$, tout $b > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

a) $\ln(a^n) = n.\ln(a)$

b) $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ et $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$

c) $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$ et $\ln(\sqrt[n]{a}) = \dfrac{1}{n}\ln(a)$

Preuves:

a) ***Démonstration par récurrence.***

Soit $P(n)$: Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(a^n) = n.\ln(a)$

Initialisation: $P(1)$ est vrai et P(2) est vérifiée d'après $\ln(a \times a) = \ln(a) + \ln(a) = 2\ln(a)$

Hérédité: Supposons $P(k)$ pour un entier $k \geqslant 1$, on a donc: $\ln(a^k) = k\ln(a)$

Or, $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k.a) = \ln(a^k) + \ln(a) = k\ln(a) + \ln(a) = (k+1)\ln(a)$

On a montré: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Conclusion: L'axiome de récurrence montre que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) D'une part, $\ln\left(b\times\frac{1}{b}\right) = \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$

D'autre part: $\ln\left(b\times\frac{1}{b}\right) = \ln(1) = 0$, ce qui prouve que $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a\times\frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

et $\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -\ln(a^n) = -n\ln(a)$

c) On sait $a = (\sqrt[n]{a})^n$, d'où, $\ln(a) = \ln((\sqrt[n]{a})^n) = n\ln(\sqrt[n]{a})$. Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\ln(a)$,

en particulier pour $n = 2$, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

II-2- Les fonctions dérivables vérifiant f(ab) = f(a) + f(b) (a > 0 et b > 0)

Soit f une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ vérifiant $f(ab) = f(a) + f(b)$

* La fonction f vérifie: $f(1) = 0$.

En effet, $f(1\times a) = f(1) + f(a)$, donc, $f(1) = 0$

** La fonction f vérifie: $f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$. En effet: $0 = f(1) = f\left(b\times\frac{1}{b}\right) = f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

*** Posons $g(x) = f(ax) - f(x)$ pour $x > 0$

On a donc: $g'(x) = af'(ax) - f'(x)$

Or, $g(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$. g, étant une fonction constante a une dérivée nulle.

On en déduit: $af'(ax) - f'(x) = 0$

Pour tout $x > 0$, $f'(ax) = \frac{f'(x)}{a}$ quel que soit $a > 0$.

En particulier, si $x = 1$, on a: pour tout $a > 0$, $f'(a) = \frac{f'(1)}{a} = \frac{k}{a}$ en posant $k = f'(1)$.

Lorsque $k = 1$, f est la fonction ln (primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction inverse qui s'annule en 1.

Si $k \neq 1$, on a: $f'(a) = k\times\frac{1}{a}$, d'où, $f(a) = k\ln(a) + C$ avec $f(1) = C$, donc, $C = 0$.

On peut remarquer: $f(e) = k$

et on appelle base du logarithme le nombre a *(noté parfois $\log_a$)* tel que $f(a) = 1$, soit, $k = \frac{1}{\ln(a)}$

Conclusion:

les fonctions f définies et dérivables sur $]0; +\infty[$ vérifiant $f(ab) = f(a) + f(b)$ sont les fonctions logarithmes.

Le logarithme décimal, log

Le logarithme décimal, noté log, vérifie $\log(10) = 1$.

On a donc: $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

La fonction réciproque de log est la fonction: $x \mapsto 10^x$

III- Étude de la fonction ln

III- 1- Variation

Déjà fait au §-I-1-2

x	0		1		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	‖	$+$		$+$	
$\ln(x)$	‖		0		

III-2- Les limites

III-2-1- Limite en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Preuve: (voir si besoin, limite infinie en l'infini)

Montrons que pour tout $A > 0$, il existe un réel $a > 0$ tel que $x > a$ implique $\ln(x) > A$.

On sait: $\ln(x) > A \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^A$.

Posons $a = \mathrm{e}^A$.

Si $x > a$ alors $\ln(x) > \ln(a)$ et comme $\ln(a) = A$ la proposition est démontrée.

III-2-2- Limite en 0

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

Preuve:

Soit $x > 0$, on a alors: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$.   Posons $t = \dfrac{1}{x}$.

On a: $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t \to +\infty} -\ln(t) = -\infty$.

III-3- Représentation graphique de ln

III-3-1- Tangentes

III-3-1-1 Des tangentes particulières

Soit T_1 la tangente au point d'abscisse 1, on a: $y = \frac{1}{1}(x-1)+\ln(1)$, soit: $y = x - 1$ est une équation de T_1 .

Soit T_e la tangente au point d'abscisse e, on a: $y = \frac{1}{e}(x-e)+\ln(e)$, soit: $y = \frac{1}{e}x$ est une équation de T_e .

La tangente T_e passe par l'origine du repère.

III-3-1-2- Position relative de $\mathscr{C}_{\ln}$ et des tangentes.

Soit $a > 0$ et T_a la tangente au point d'abscisse a.

Une équation de T_a est: $y = \frac{1}{a}(x-a)+\ln(a)$

Posons pour $x > 0$, $d(x) = \ln(x) - \frac{1}{a}(x-a)+\ln(a)$

$d'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a-x}{ax}$.

on a donc:

x	0		a		$+\infty$
$d'(x)$	‖	+	0	–	
$d(x)$	‖	↗	0	↘	

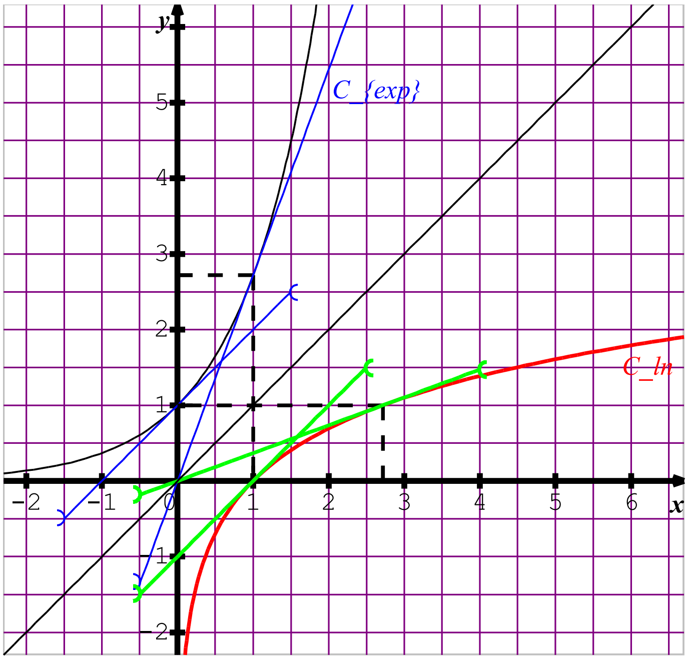
On en déduit, pour tout $x > 0$, $d(x) \leqslant 0$, la courbe de ln est toujours située au-dessous de ses tangentes.

III-3-2- Lien entre $\mathscr{C}_{\exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$

On a montré en activité que dans un repère orthonormal, si f est une bijection définie sur I vers J, alors, C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Dans un repère orthonormal, $\mathscr{C}_{\exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

III-3-3- Représentation graphique de ln



IV- Les limites à connaître

a) Limites déjà étudiées.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

b) Comparaison avec x

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ $\quad$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

Preuve:

Étude de $\dfrac{\ln(x)}{x}$. On pose $X = \ln(x)$, d'où, $x = e^X$. On a donc:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

Étude $x \ln(x)$. On pose $t = \dfrac{1}{x}$. On a donc:

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln(t)}{t} = 0.$$

La croissance de $\ln(x)$ est très faible par rapport à celle de x

V- Fonctions composées avec ln

V-1- Dérivée de ln ° u

Soit u une fonction **dérivable et strictement positive** sur un intervalle I alors la fonction composée $f = \ln \circ u$ est définie et dérivable sur I et $f' = \dfrac{u'}{u}$.

Conséquence: f' et u' sont de même signe.

f et *u* ont les mêmes variations sur *I*. *(Ce que l'on sait déjà en composant n'importe quelle fonction avec une fonction strictement croissante)*

V-2- Primitives de u' / u (u > 0)

Si *u* est une fonction **dérivable et strictement positive** sur un intervalle *I* alors les primitives de $\frac{u'}{u}$ sont les fonctions $\ln \circ u + C$.

V-3- Exercice

Étude de $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

* *f* est définie si et seulement si $x^2 - 1 > 0$ si et seulement si $x < 1$ ou $x > 1$

D_f =]–∞; –1[∪]1; +∞[

** ***Limites à l'infini:***

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$, donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty$.

Même démarche pour $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty$.

Limites en –1

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x^2 - 1 = 0$ et $x^2 - 1 > 0$, et, $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \ln(x^2 - 1) = -\infty$.

Même démarche pour $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln(x^2 - 1) = -\infty$.

*** ***Dérivée***

f est de la forme $\ln \circ u$ avec *u* fonction dérivable et strictement positive sur chacun des intervalles de D_f.

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

$f'(x)$ est donc du signe de $2x$, car, $x^2 - 1 > 0$ sur D_f.

**** ***Variations***

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		X X X		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	X X X X X X X X X	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Utilisation du ***théorème des valeurs intermédiaires:***

- Nombre de solutions à l'équation $f(x) = m$ où $m \in \mathbb{R}$.

Sur]–∞; –1[, on sait:

f est dérivable, donc, *f* est continue

f est strictement décroissante,

$m \in \left] \lim\limits_{x \to -1} f(x); \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[$

Donc, l'équation admet une et une seule solution α appartenant à]–∞; –1[.

Même démarche sur]1; +∞[en remplaçant strictement décroissante par strictement croissante.

l'équation admet une et une seule solution β appartenant à]1; +∞[.

Encadrement à 10^{-2} près de la solution positive de l'équation $f(x) = 5$

Sur la calculatrice on lit $f(12{,}22) \approx 4{,}9994$ et $f(12{,}23) \approx 5{,}0011$

d'où 12,22 β < 12,23

***** ***Tracé***

Tangentes:

Existe-t-il une ou des ***tangentes*** à C_f ***parallèles*** à la droite d'équation $y = 1$?

On résout: $f'(x) = 1$

soit $\dfrac{2x}{x^2-1} = 1$, ce qui mène à : $x^2 - 2x - 1 = 0$ qui a pour solutions dans $\mathbb{R}$ $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

Comme $x1 \notin D_f$, $x1$ est exclu. $x2 \in D_f$.

Il existe une et une seule tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ au point $A(1 + \sqrt{2}\,; f(1 + \sqrt{2}\,)$

$f(1 + \sqrt{2}\,) = \ln(2 + 2\sqrt{2}\,)$

Équation de la tangente au point $B(\sqrt{2}\,; 0)$ (car, $f(\sqrt{2}\,) = \ln 1 = 0$)

$y = f'(\sqrt{2}\,)(x - \sqrt{2}\,) + f(\sqrt{2}\,)$

$y = 2\sqrt{2}\,(x - \sqrt{2}\,)$

Symétrie

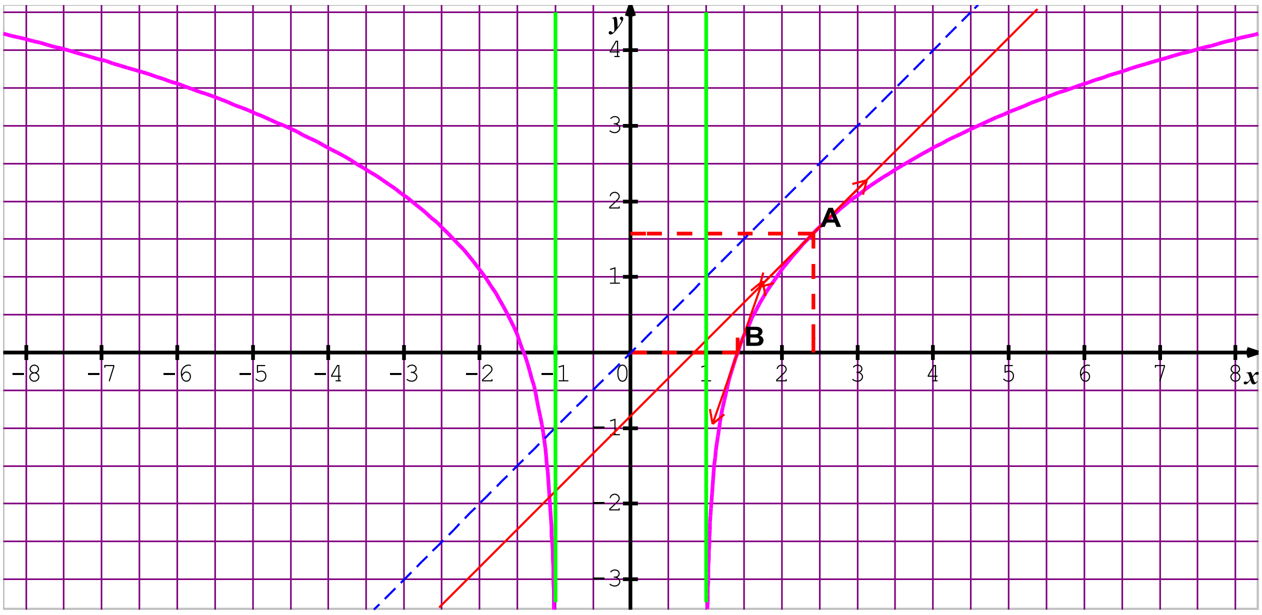
Comme $f(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = \ln(x^2 - 1) = f(x)$, l'axe des ordonnées est en axe de symétrie de C_f.

Représentation de *f* définie par $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

On trace les deux asymptotes verticales: $x = -1$ et $x = 1$

On trace les tangentes étudiées

On cherche quelques points ...



VI- Autres fonctions exponentielles et croissances comparées

VI-1- Puissances d'un réel strictement positif

VI-1-1- Définition

Soit $a > 0$ et b un réel quelconque.

On pose $a^b = e^{b.\ln(a)}$

VI-1-2- Remarques

1) Cette définition est cohérente avec les règles démontrées pour une puissance entière.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a montré $a^n = e^{n\ln(a)}$

D'autre part, on a aussi: $e^x = e^{x\ln(e)}$

2) Si $n \in \mathbb{N}^*$, $b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$ et aussi $(b^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$

La racine n-ième de a : $\sqrt[n]{a}$, est 0 lorsque $a = 0$ et peut s'écrire $a^{\frac{1}{n}}$ lorsque $a > 0$.

3) Lorsque la variable est le nombre dont on calcule une puissance, on crée une fonction $x \mapsto x^b$ définie sur]0;+∞[. Cette fonction est une fonction puissance. (Voir § suivant VI-2)

4) Lorsque la variable est l'exposant, on crée une fonction $x \mapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est la fonction exponentielle de base a. (Voir § suivant VI-3)

La fonction réciproque est $\log_a$: en effet, $y = a^x \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x)$ (voir § II-2)

VI-2- Les fonctions puissances

a est un réel.

Les fonctions puissances sont définies par $x \mapsto x^a$ sur]0;+∞[.

Comme $x^a = e^{a\ln(x)}$, pour les étudier, on étudie la fonction composée:

$x \mapsto \ln(x) \mapsto a\ln(x) \mapsto \exp(a\ln(x))$

Pour étudier ces fonctions, on applique, les propriétés des fonctions composées.

Notamment, si $f(x) = x^a$, la dérivée $f'(x) = \dfrac{a}{x} \times \exp(a\ln(x)) = \dfrac{a}{x} \times x^a = a\, x^{a-1}$.

On retrouve la forme connue de la dérivée des fonctions puissances.

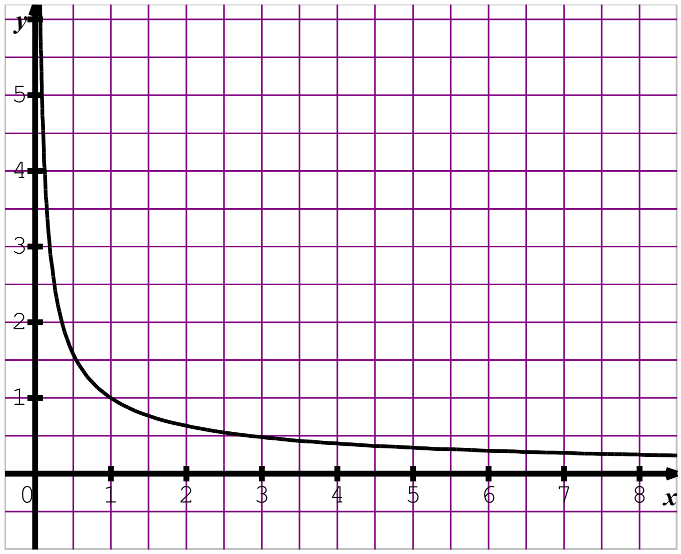
On a les trois cas suivants:

$a < 0$

x	0	$+\infty$
$f\,'(x)$	‖ $-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	0

En effet, la fonction $x \mapsto a^x$ est la composée des trois fonctions : ln, suivie de la fonction affine $x \mapsto ax$, suivie de l'exponentielle.
si $a < 0$, la fonction $x \mapsto ax$ est strictement décroissante.
Comme ln et exp sont strictement croissantes, la composée est strictement décroissante.
D'autre part, la limite en 0 est la limite en $+\infty$ de la fonction exponentielle, car, $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, puisque $a < 0$, on a: $\lim\limits_{x \to 0} a\ln(x) = +\infty$.

En $+\infty$, la limite est la limite de la fonction exp en $-\infty$.

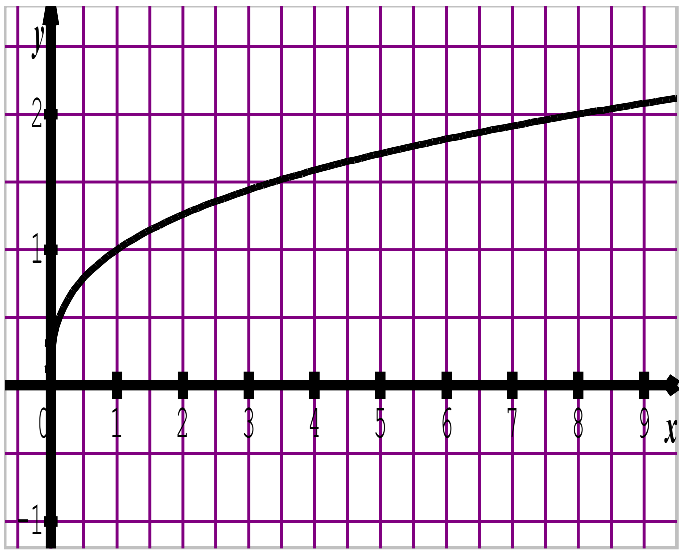


Sur ce graphique $a = -\dfrac{2}{3}$

$0 < a < 1$

x	0	$+\infty$
$f\,'(x)$	‖ $+$	
$f(x)$	‖ 0 ↗	$+\infty$

En effet, si $a > 0$, la fonction affine $x \mapsto ax$ est strictement croissante.
Comme ln et exp sont strictement croissantes, la composée est strictement croissante.
D'autre part, la limite en 0 est la limite en $-\infty$ de la fonction exponentielle, car, $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, puisque $a > 0$, on a: $\lim\limits_{x \to 0} a\ln(x) = -\infty$.
En $+\infty$, la limite est la limite de la fonction exp en $+\infty$.



Sur ce graphique $a = \dfrac{1}{3}$

$a > 1$

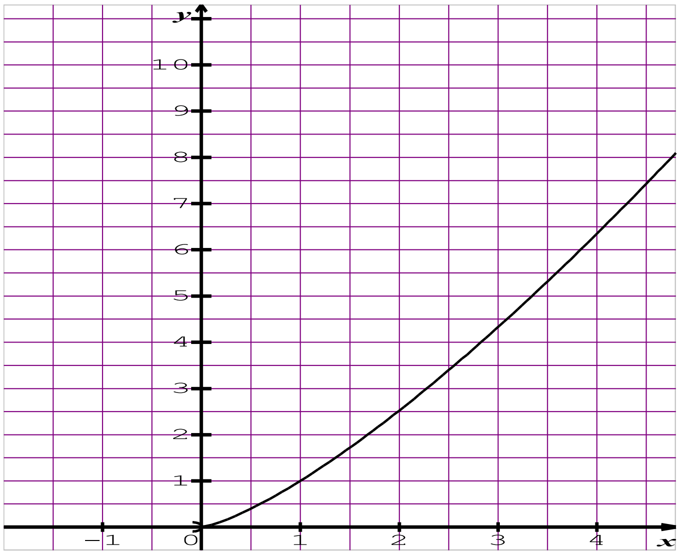
x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

En effet, si $a > 0$, la fonction affine $x \mapsto ax$ est strictement croissante.

Comme ln et exp sont strictement croissantes, la composée est strictement croissante.

D'autre part, la limite en 0 est la limite en $-\infty$ de la fonction exponentielle, car, $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, puisque $a > 0$, on a: $\lim_{x \to 0} a \ln(x) = -\infty$.

En $+\infty$, la limite est la limite de la fonction exp en $+\infty$.



Sur ce graphique $a = \dfrac{4}{3}$

VI-3- Les fonctions exponentielles de base a.

$a > 0$ et $a \neq 1$.

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto a^x$ sont les fonctions exponentielles de base a.

Comme $a^x = e^{x \ln(a)}$

Pour étudier ces fonctions, on étudie la fonction composée $x \mapsto x \ln(a) \mapsto \exp(x \ln(a))$

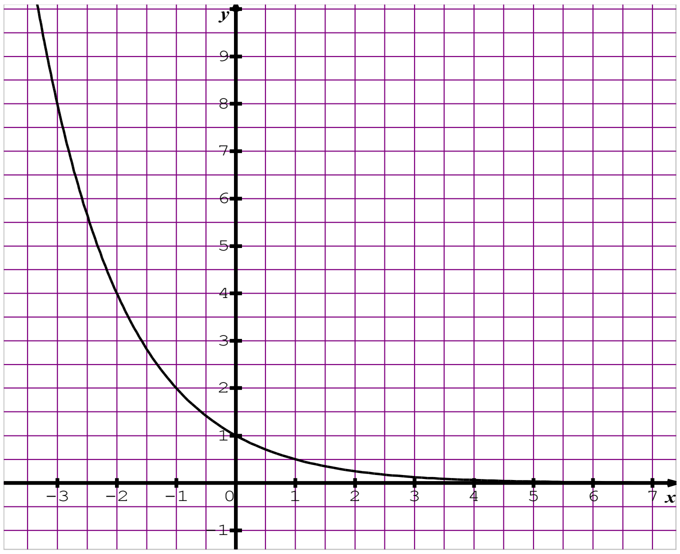
On a notamment, si $f(x) = a^x$, $f'(x) = \ln(a) \exp(x \ln(a)) = \ln(a)\, a^x$.

On peut distinguer deux cas:

$0 < a < 1$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

En effet, si $0 < a < 1$, $\ln(a) < 0$
La limite en $-\infty$ est la limite en $+\infty$ de la fonction exponentielle,
En $+\infty$, la limite est la limite de la fonction exp en $-\infty$.

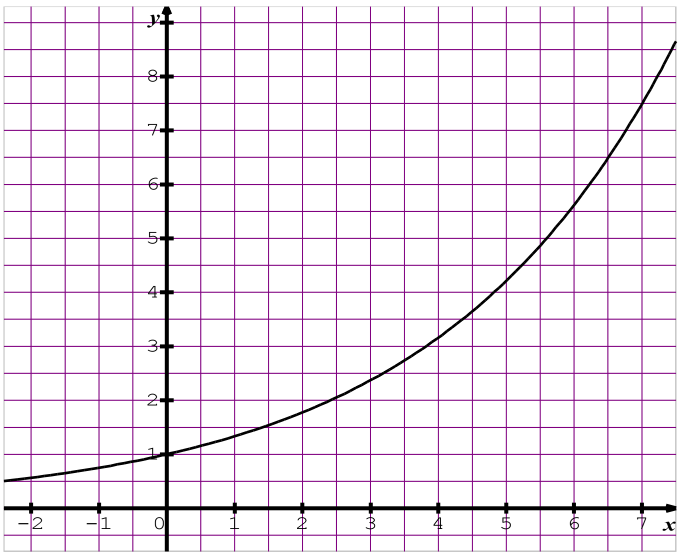


Sur ce graphique $a = \dfrac{1}{2}$

$1 < a$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

En effet, si $a > 1$, $\ln(a) > 0$
La limite en $-\infty$ est la limite en $-\infty$ de la fonction exponentielle,
En $+\infty$, la limite est la limite de la fonction exp en $+\infty$.



Sur ce graphique $a = \dfrac{4}{3}$

VI-4- Croissances comparées.

Il s'agit d'étudier les limites de quotients ou de produits faisant intervenir les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances. (Voir le § IV, ainsi que le § II-3 de la leçon sur l'exponentielle)

On peut comme moyen mnémotechnique retenir que l'exponentielle l'emporte sur toutes les fonctions puissances et que les puissances l'emportent sur les fonctions logarithmes.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Preuves:

Pour a), On peut écrire: $\dfrac{\ln(x)}{x^n} = \dfrac{1}{n}\times\dfrac{\ln(x^n)}{x^n}$. En posant $X = x^n$, on étudie la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(X)}{X}$

Pour b), on peut en posant $X = \dfrac{1}{x}$ se ramener au cas précédent.

On a: $x^n \ln(x) = \left(\dfrac{1}{X}\right)^n \ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{-\ln(X)}{X^n}$, et, on étudie la limite quand X tend vers $+\infty$.

Pour c), on peut poser $x = nX$. On a alors: $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \dfrac{\mathrm{e}^{nX}}{(nX)^n} = \dfrac{1}{n^n}\times\left(\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}\right)^n$, et, on étudie la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}$ en $+\infty$.

Pour d), on pose $X = -x$. On a alors $x^n e^x = (-X)^n e^{-X} = \dfrac{(-1)^n\times X^n}{\mathrm{e}^X}$, et, on est ramené au cas précédent.