Table des matières

I- Analyse combinatoire.

I-1- Permutation

I-1-1- Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $n \geqslant 2$, on appelle factorielle de n, **notée $n!$**, le produit des entiers naturels de 1 à n.

On a: $n! = n(n-1)\times\ldots\times 1$.

Par convention: $0! = 1$ et $1! = 1$.

Exemple: $4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

$$\frac{15!}{5!} = \frac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5!}{5!} = 15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6 = 10\ 897\ 286\ 400$$

I-1-2- Permutation

Qu'est-ce que c'est?

Permutation: *extrait du dictionnaire:*

"Fait, pour un élément, de prendre la place d'un autre qui vient occuper la sienne en retour; fait, pour deux éléments, de changer réciproquement de place

Permutation d'un ensemble. *Bijection d'un ensemble sur lui-même .*

Permutation circulaire. *Opération qui décale tour à tour les éléments d'une position et place le dernier élément à la place du premier."*

La question: Soit n objets distincts, combien y'a-t-il de façon de les ranger.

Autrement dit: quel est le nombre de permutations de n objets distincts.

Anagramme: *Définition du dictionnaire:*

"Interversion des lettres qui composent un mot (ou plus rarement un syntagme ou une phrase) de manière à faire un autre mot (ou un autre syntagme ou une autre phrase).

Le résultat de cette opération".

Combien y a-t-il d'anagrammes au mot: ABCD (On ne cherche pas à savoir si le mot a du sens ou non).

On choisit la première lettre: 4 possibilités.

Cette première lettre étant choisie, on choisit la deuxième lettre, trois possibilités et ainsi de suite.

Le nombre d'anagrammes de ABCD: $4\times3\times2\times1=24$

Pour tous les écrire, soyons méthodiques: par exemple

ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.

Au départ, on se donne un ensemble E de n éléments.

Il s'agit alors de donner toutes les listes ordonnées de ces n éléments, mais, la plupart du temps, on se contente de savoir combien on peut faire de listes ordonnées.

Propriété:

Le nombre de façons de ranger n objets distincts est $n!$.

Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est $n!$.

Exercice: TARATATA

Quel est le nombre d'anagrammes de TARATATA.

Une démarche:

On suppose toutes les lettres distinctes: $T_1A_1RA_2T_2A_3T_3A_4$.

On a alors: 8! anagrammes en supposant les lettres distinctes.

Les permutations des quatre A donnent le même mot (la même anagramme). On a donc: $\frac{8!}{4!}$ anagrammes en supposant les trois T distincts.

Les permutations des trois T donnent le même mot (la même anagramme).

On a donc: $\dfrac{8\,!}{4\,!\,.\,3\,!}$ anagrammes de TARATATA, soit, $\dfrac{8\times7\times6\times5}{3\times2} = 8\times7\times5 = 280$

Une autre démarche au paragraphe suivant

I-2- Combinaison

I-2-1- définition

Soit un ensemble E de n éléments. p un entier naturel inférieur ou égal à n.

Une combinaison de p éléments pris parmi n éléments est une partie (ou sous-ensemble) de E contenant p éléments.

Exemple: $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Les parties à 2 éléments pris dans E sont:

$\{1; 2\}$, $\{1;3\}$, $\{1; 4\}$, $\{1; 5\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$, $\{2; 5\}$, $\{3; 4\}$, $\{3; 5\}$, $\{4; 5\}$.

On trouve 10 parties à 2 éléments pris parmi 5 éléments distincts.

I-2-2- Propriété: formule

Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n est noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

et il est égal à $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-p+1)}^{\text{p facteurs en décroissant à partir de n}}}{p\,!}$

ou encore

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n\,!}{(n-p)!\,p\,!}$$

Interprétation ensembliste:

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de sous-ensembles de E ayant p éléments est $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

Exemple: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{5\times4}{2\times1} = 10$

Démonstration:

Supposons qu'on commence par ordonner les n éléments.

Choix du premier élément: n possibilités.

Choix du deuxième élément: $n - 1$ possibilités.

...

Choix du $p^{\text{ième}}$ élément: $(n - p + 1)$ possibilités

On a donc $N = n(n - 1) \ldots (n - p + 1)$ listes ordonnées de p éléments pris parmi n éléments distincts. (On appelle une telle liste un ***arrangement***)

Or, les éléments n'étant pas classés, les permutations des p éléments donnent le même arrangement.

On a donc compté $p!$ fois chaque combinaison.

Le nombre de combinaisons est donc: $\dfrac{N}{p!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-p+1)}^{\text{p facteurs en décroissant à partir de n}}}{p!}$

En multipliant par $(n-p)!$ le numérateur et le dénominateur, il vient: $\dfrac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-p+1)}^{\text{p facteurs en décroissant à partir de n}}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

Dans l'exemple précédent du I-2-1 (définition):

$E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
Les listes ordonnées à 2 éléments pris dans E sont:

(1; 2), (2; 1), (1; 3), (3; 1), (1; 4), (4; 1), (1; 5), (5; 1);

(2; 3); (3; 2), (2; 4), (4; 2), (2; 5), (5; 2),

(3; 4), (4; 3), (3; 5), (5; 3),

(4; 5), (5; 4)

Pour une combinaison à 2 éléments, on obtient deux listes ordonnées de deux éléments.

I-2-3- Propriétés des combinaisons

* $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$

** $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$

*** $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$

**** $\dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p} = \dbinom{n}{p}$

Preuves:

Toutes ces égalités peuvent se démontrer à l'aide de la formule du § précédent, mais, pour leur donner toute leur signification, il est plus intéressant de les prouver à l'aide du langage ensembliste.

Soit un ensemble E de n éléments.

* Il n'y a qu'un seul sous-ensemble de E ayant 0 éléments et qu'un seul sous-ensemble de E ayant n éléments, d'où, $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$.

** Quand on a pris p éléments de E, il reste alors $(n-p)$ éléments de E. À chaque sous-ensemble de p éléments de E correspond un sous-ensemble de $n-p$ éléments.

Il y a autant de parties à p éléments de E que de parties à $n-p$ éléments de E, d'où, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$

Exemple: $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

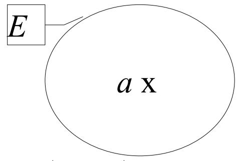
Les parties à 2 éléments pris dans E sont:

$\{1; 2\}$, $\{1;3\}$, $\{1; 4\}$, $\{1; 5\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$, $\{2; 5\}$, $\{3; 4\}$, $\{3; 5\}$, $\{4; 5\}$.

À $\{1; 2\}$ correspond $\{3; 4; 5\}$
À $\{1; 3\}$ correspond $\{2; 4; 5\}$ etc.

*** Il y a évidemment n parties distinctes ayant un et un seul élément de E, d'où, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

**** E a n éléments.
Soit a un élément de E, l'ensemble $E' = E \setminus \{a\}$ contient $n - 1$ éléments.
Pour constituer une partie à p éléments de E,



ou bien, on prend p éléments de E', et, le nombre de sous-ensembles est $\binom{n-1}{p}$

ou bien, on prend l'élément a et $p - 1$ éléments de E', et, le nombre de sous-ensembles est $\binom{n-1}{p-1}$

Ces choix étant exclusifs, on a: $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Exemple: $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. On pose $E' = E \setminus \{1\} = \{2; 3; 4; 5\}$

Les parties à 3 éléments de E' sont des parties à 3 éléments de E.

Ce sont: $\{2; 3; 4\}$, $\{2; 3; 5\}$, $\{2; 4; 5\}$, $\{3; 4; 5\}$

Les parties à 2 éléments de E' auxquelles on adjoint l'élément 1 sont des parties à 3 éléments de E.

Ce sont: $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$, $\{2; 5\}$, $\{3; 4\}$, $\{3; 5\}$, $\{4; 5\}$.

Les parties à 3 éléments de E sont donc: $\{2; 3; 4\}$, $\{2; 3; 5\}$, $\{2; 4; 5\}$, $\{3; 4; 5\}$, $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 2; 4\}$, $\{1; 2; 5\}$, $\{1; 3; 4\}$, $\{1; 3; 5\}$, $\{1; 4; 5\}$

Triangle de Pascal

Cette dernière égalité permet de construire le triangle de Pascal (connu des Chinois bien avant),

pour remplir une ligne du tableau triangulaire suivant, on ajoute les deux nombres situés sur la ligne précédente au-dessus et à gauche du nombre cherché.

p étant un entier inférieur ou égal à n,

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

À l'intersection de la ligne n et de la colonne p, on lit $\binom{n}{p}$

On lit: $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$

Ces coefficients sont aussi appelés **coefficients binomiaux**, en effet,

I-2-4- Formule du binôme

a et b sont des nombres réels ou complexes.

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b + \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}\,b^2 + \ldots + \binom{n}{k}\,a^{n-k}\,b^k + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\,a^2\,b^{n-2} + na\,b^{n-1} + b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,a^{n-k}\,b^k$$

Démonstration:

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)\ldots(a+b)}^{n\ facteurs}$$

En développant on obtient des termes de la forme $a^{n-k}\,b^k$

(***Remarquer***: la somme des exposants est évidemment n)

Pour obtenir un terme $a^{n-k}\,b^k$, on obtient le facteur b^k en prenant k facteurs ($a + b$) parmi les n facteurs ($a + b$).

On sait qu'il y a $\binom{n}{k}$ possibilités

Exemple: $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15\,a^4\,b^2 + 20\,a^3\,b^3 + 15\,a^2\,b^4 + 6ab^5 + b^6$ en lisant la ligne 6 du triangle de Pascal.

Cas particuliers:

1) Lorsque $a = b = 1$, il vient: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Interprétation ensembliste: le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est 2^n

Lorsqu'on a un ensemble à n éléments, pour constituer les sous-ensembles, on peut faire ainsi:

élément 1, deux choix: pris ou pas pris.

élément 2: 2 choix pris ou pas pris...

et ainsi de suite.

Finalement: pour constituer tous les sous-ensembles de E, on a: 2^n possibilités. (Voir loi binomiale au §II-1-3)

2) Lorsque $a = 1$ et $b = -1$, on a: $0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,(-1)^n$

Par exemple dans le triangle de Pascal:

ligne 5: 1 – 5 + 10 – 10 + 5 – 1 =0

ligne 6: 1 – 6 + 15 – 20 + 15 – 6 + 1 = 32 – 32 = 0

Où on retrouve TARATATA

Supposons qu'on ait huit cases à remplir avec les lettres de TARATATA.

On peut considérer que l'on prend quatre cases parmi huit pour les A, puis trois cases pour les T parmi les quatre restantes et enfin la case restante pour le R.

Le nombre d'anagrammes de TARATATA est donc: $\binom{8}{4}\binom{4}{3}\binom{1}{1} = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1} = 8\times7\times5$

Évidemment, l'ordre du choix des lettres n'a pas d'importance: Si on place d'abord le R parmi 8 cases, puis les 3 T parmi les 7 cases restantes et enfin les 4 A pour 4 cases finales, on a: $\binom{8}{1}\binom{7}{3}\binom{4}{4} = ... = 8\times7\times5$

Voir dénombrement

II- Lois de probabilité

II-1- Exemples de lois discrètes

II-1-1- Loi uniforme discrète

Soit une variable aléatoire réelle X qui prend n valeurs distinctes x_1, x_2, ..., x_n.

On dit que X suit une ***loi uniforme discrète*** ou ***loi équirépartie*** lorsque

$P(X = x_1) = P(X = x_2) = ... = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$.

Exemple:

On lance un dé icosaédrique (20 faces) bien équilibré

Les faces sont numérotées de 1 à 20.

On lance le dé, on note le numéro de la face supérieure.

La variable aléatoire X ainsi définie suit une loi équirépartie. $P(X = \text{i}) = \frac{1}{20}$ avec $1 \leqslant i \leqslant 20$ et $i \in \mathbb{N}$.

II-1-2- Loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à ***deux issues*** {Succès, Échec}.

On note S pour Succès et $\overline{S}$ pour Échec.

Exemple: On lance un dé à six faces et on considère qu'obtenir le numéro 6 est un succès. Ne pas obtenir le numéro 6 est alors un échec.

On a donc l'univers $\Omega = \{S, \overline{S}\}$

Si p est la probabilité du succès, on a $q = 1 - p$ est la probabilité de l'échec.

Sur cet univers Ω, on définit la variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

La loi de Bernoulli de paramètre p (notée parfois $\mathscr{B}_p$) est la loi de probabilité suivie par une telle variable aléatoire.

Elle est définie par: p étant un réel tel que $0 < p < 1$

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

On en déduit: $E(X) = 1\times p + 0\times(1 - p) = p$

et $V(X) = (p\times1^2 + (1 - p)\times0) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$.

et $\sigma(X) = \sqrt{pq}$.

II-1-3- Loi binomiale

Définition

Soit une expérience aléatoire suivant la loi de Bernoulli, notée $\mathscr{B}_p$

On répète n fois de ***façon indépendante*** cette expérience aléatoire.

La variable aléatoire X définie par le nombre de succès obtenus parmi les n expériences suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée, $\mathscr{B}(n; p)$.

Propriété

Soit k un entier inférieur ou égal à n, on a:

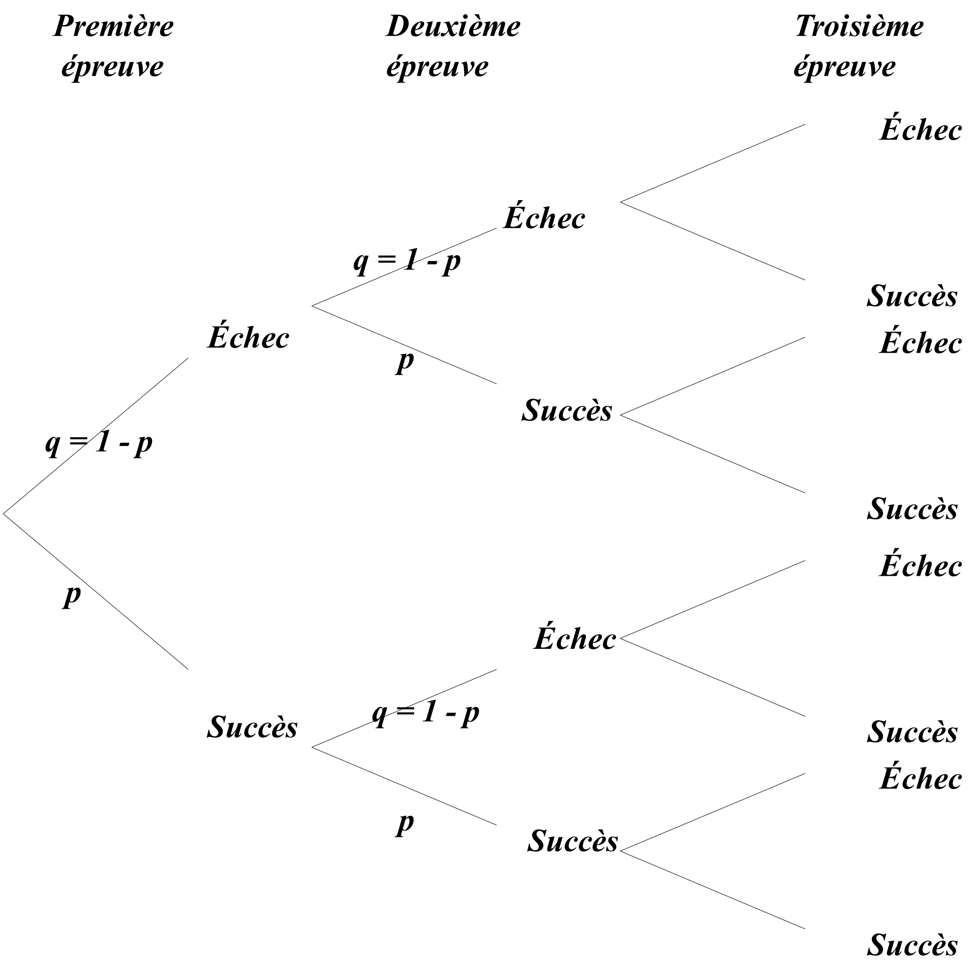
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Preuve:

pour obtenir k fois 1 (*k succès)* et $n - k$ fois 0 (*$n - k$ échecs)* il faut placer k fois 1 parmi n places possibles.

Construire un arbre de probabilités avec 2^n branches finales (car, à chaque nœud, on a deux possibilités).

(Ce type de schéma est appelé schéma de Bernoulli.)



Un résultat est de la forme $\overbrace{(E, E, S, E, \dots, S, S, E)}^{\text{n épreuves}}$ avec k fois S et $n-k$ fois E.

Le nombre de combinaisons est $\binom{n}{k}$.

Les épreuves étant indépendantes, la probabilité d'une de ces combinaisons est le produit des probabilités. D'où la probabilité d'avoir k succès et $n-k$ échecs est $p^k q^{n-k}$

À admettre:
Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p ($\mathscr{B}(n; p)$), on a:
$E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

Remarque: $(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ or, $p+q=1$, on retrouve la somme des probabilités de tous les possibles est 1.

Exemple:
Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher: 2 rouges et 3 vertes.
On procède à 4 tirages successifs **avec remise**.
On note le nombre de boules rouges obtenues sur ces quatre tirages.

On appelle Succès l'événement: "obtenir une boule rouge".
Un tirage est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{5}$ (car, boules indiscernables au toucher)
Puisqu'il y a remise les quatre tirages sont indépendants (la constitution de l'urne est inchangée et le tirage s'effectue dans les mêmes conditions).
Soit k le nombre de boules rouges obtenues sur ces quatre tirages.
La variable aléatoire X définie par: X est le nombre de boules rouges suit la loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{2}{5}$.
$\mathscr{B}(4; \frac{2}{5})$.
On a donc:

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$1\times\left(\frac{3}{5}\right)^4$	$\binom{4}{1}\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^3$	$\binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2$	$\binom{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)$	$1\times\left(\frac{2}{5}\right)^4$

d'où, $P(X=0) = \frac{81}{625}$, $P(X=1) = \frac{216}{625}$, $P(X=2) = \frac{216}{625}$, $P(X=3) = \frac{96}{625}$, $P(X=4) = \frac{16}{625}$

On a aussi: $E(X) = 4\times\frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ et $V(X) = 4\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

Remarque: $\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)^4 = 1\times\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \binom{4}{1}\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right) + 1\times\left(\frac{2}{5}\right)^4$

II-2- Exemples de lois continues (notion de densité)

II-2-1- Loi uniforme

Du discret vers le continu

Vers une loi continue sur [0; 1].

X_1 est la variable aléatoire qui prend les valeurs décimales 0; 0,1; 0,2; ...; 0,9 (une décimale même nulle)

X_2 est la variable aléatoire qui prend les valeurs décimales 0; 0,01; 0,02; ...; 0,99 (deux décimales même nulles).

X_p est la variable aléatoire qui prend les valeurs décimales 0; 0,0...01; 0,0...02; ...; 0,9..9 (p décimales même nulles)

On suppose que toutes ces variables aléatoires suivent la loi uniforme discrète (voir §-II-2-1).

Rappel: "discret" signifie qu'on peut isoler les valeurs. L'ensemble ℕ des entiers naturels est un ensemble discret.

"discret" s'oppose à "continu"

On a donc: $P(X_1 = x_i) = \frac{1}{10}$, $P(X_2 = x_i) = \frac{1}{100}$, ... , $P(X_p = x_i) = \frac{1}{10^p}$.

Lorsque p tend vers $+\infty$, $\frac{1}{10^p}$ tend vers 0.

On a aussi: en se rappelant que la somme de n entiers consécutifs est: $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$E(X_1) = \frac{1}{10}(0{,}1 + 0{,}2 + ... + 0{,}9) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}(1 + 2 + ... +9) = 0{,}45$$

$$E(X_2) = \frac{1}{100}(0{,}01 + 0{,}02 + ... + 0{,}99) = \frac{1}{100} \times \frac{1}{100}(1 + 2 + ... +99) = 0{,}495$$

$$E(X_p) = \frac{1}{10^p}(0{,}0...01 + 0{,}0...02 + ... + 0{,}9...9) = \frac{1}{10^p} \times \frac{1}{10^p}(1 + 2 + ... +9...9)$$

$$= \frac{1}{10^{2p}} \frac{10^p(10^p-1)}{2} = \frac{10^p-1}{2\times 10^p}$$ qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand p tend vers $+\infty$.

Définitions:

1) Si la variable aléatoire X prend toute valeur réelle de l'intervalle [0; 1], on dit que cette variable est continue.

2) Si X étant une variable aléatoire continue suit la loi uniforme continue sur [0; 1] alors,

pour tous α et β de [0; 1] avec $\alpha \leqslant \beta$, on a: $P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta 1\,\mathrm{d}t = \beta - \alpha$

En particulier: $P(X = a) = 0$ et $P(0 \leqslant X \leqslant a) = a$.

Commentaires: la loi uniforme continue modélise le choix d'un réel pris au hasard dans l'intervalle [0; 1].

La longueur de l'intervalle [0; 1] est 1.

La probabilité d'obtenir un réel de [a; b] ou [a; b[ou]a; b] ou]a; b[est la longueur $b - a$.

Reprenons les variables aléatoires X_p suivant une loi uniforme

Le passage à la limite des variables aléatoires X_p mènent à: la probabilité d'obtenir un réel précisément de l'intervalle [0; 1] est nul.

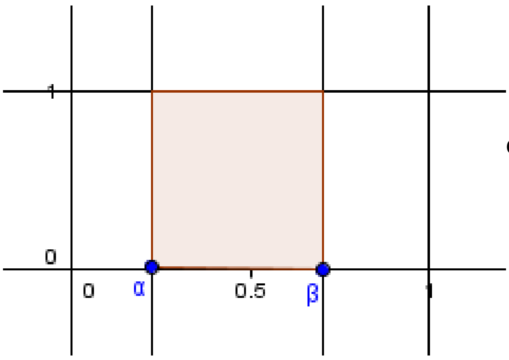
Mais si on considère un intervalle [α; β] inclus dans [0; 1], la probabilité pour qu'un réel se trouve dans cet intervalle [α; β] est égale à $\beta - \alpha$.

Cette loi uniforme sur [0; 1] est associée à la fonction constante: f: $t \mapsto 1$ appelée ***densité de la probabilité*** P.

L'espérance mathématique est $\frac{1}{2}$. Elle est obtenue en faisant la moyenne de la fonction $t \mapsto t \times f(t)$

Ici: $\int_0^1 t \times f(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

Interprétation graphique:



$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$ est la mesure de l'aire du rectangle de dimensions $\beta - \alpha$ et 1.

Exemples:

* La probabilité de choisir au hasard un réel de l'intervalle [0,2 ; 0,8[est 0,6

** On choisit un nombre au hasard dans [0; 1].

Quelle est la probabilité sachant que ce réel est supérieur à 0,7 que la première décimale soit impaire?

Ce réel appartient à $J =]0,7; 1]$.

La première décimale est impaire: $K = [0,1; 0,2[\cup [0,3; 0,4[\cup [0,5; 0,6[\cup [0,7;0,8[\cup [0,9; 1[$

On cherche $P_J(K) = \frac{P(K \cap J)}{P(J)} = \frac{P(]0,7;0,8[\cup]0,9;1[)}{P(]0,7;1])} = \frac{2}{3}$

II-2-2- Loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle

Exemple: la désintégration nucléaire

* $N(t)$ représente le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t.

La fonction N: $t \mapsto N(t)$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ où λ est une constante caractérisant l'élément chimique.

On a alors: $N(t) = N(0)\ \mathrm{e}^{-\lambda t}$ (Voir: chapitre sur la fonction exponentielle)

** Soit T la variable aléatoire égale à la durée de vie du noyau.

La proportion de noyaux encore en vie à la date t (c'est-à-dire que $T \geqslant t$) est $\frac{N(t)}{N(0)} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

On peut écrire: $P(T \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ (probabilité qu'un noyau soit encore en vie à l'instant t)

*** Soit l'événement A: "un noyau est encore en vie à l'instant t"

Soit l'événement B: "un noyau est encore en vie à l'instant $t + h$"

On cherche la probabilité qu'un noyau en vie à l'instant t soit encore en vie à l'instant $t + h$.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h}.$$

Cette probabilité est indépendante de l'instant t.

Quel que soit l'âge du noyau, la probabilité de "rester en vie" est constante... un noyau n'a pas de jeunesse, ni d'adolescence, ni de vieillesse, il est toujours "mûr" et meurt... d'où, le nom de la loi: loi de durée de vie sans vieillissement.

Définition:

T est une variable aléatoire continue mesurant la durée de vie d'un individu.

On dit que T suit une loi de durée de vie sans vieillissement si la probabilité que l'individu soit en vie à l'instant $t + h$ sachant qu'il est en vie à l'instant t ne dépend pas de t.

Propriété et définition:

T est une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement alors il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant 0$, $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$

On dit que T suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

Remarque:

Le fait d'avoir la formule sous cette forme est due au fait qu'on ne peut pas noter une intégrale avec une borne infinie en terminale.

Comme $(T > t)$ et $(T \leqslant t)$ sont des événement contraires, on a: $P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t)$, ce qui est cohérent avec le modèle nucléaire.

Propriétés:

1) $P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$

2) $P(a \leqslant T \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$

3) L'espérance mathématique de T est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ (à admettre)

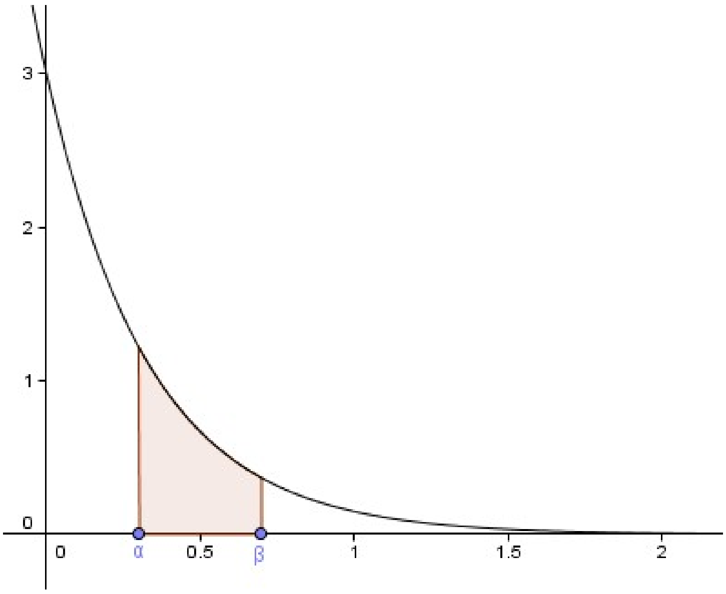
La fonction $g: x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est la fonction densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre λ.

Preuve:

Une primitive de g est $G: x \mapsto -e^{-\lambda x}$, d'où, $P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = [G(x)]_0^a = ... = 1 - e^{-\lambda a}$

et, $P(a \leqslant T \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = ... = G(b) - G(a)$

Interprétation graphique:



La fonction $g : x \mapsto 3\,e^{-3x}$ étant représentée, l'aire sous la courbe jusqu'à l'infini est la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x g(t)\,dt = G(x) - G(0) = 1 - e^{-\lambda x}$ (avec $\lambda = 3$) On trouve 1.

$P(\alpha \leqslant T \leqslant \beta)$ est la mesure de l'aire hachurée.

Vocabulaire:

Soit un intervalle $I = [a; b]$.

f est une fonction continue, positive sur I telle que $\int_a^b f(t)\,dt = 1$

Pour tout intervalle $[\alpha; \beta]$ inclus dans $[a; b]$, on définit la probabilité $P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ (probabilité de l'intervalle $[\alpha; \beta]$.

f est la fonction densité de la probabilité P.

II-2-3- Adéquation de données à une loi équirépartie

Soit une épreuve conduisant à n issues (x_1, x_2, ..., x_n).

On répète de nombreuses fois ($\geqslant$ 100) cette épreuve et on obtient un tableau des fréquences f_i des valeurs x_i

On calcule le nombre $d^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i - \frac{1}{n}\right)^2$

Si $d^2 \leqslant D_9$ (9ième décile), alors, les données sont compatibles avec le modèle de loi uniforme au seuil de 10%.

Voir exemple d'adéquation