Table des matières

I- Généralités: Vocabulaire et propriétés (Rappels de première et quelques compléments)

Le vocabulaire est défini à partir d'un exemple:

Exemple:

On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et de couleurs différentes. On note les **couples** des numéros.

I-1-Expérience aléatoire, issue, univers, événement, réunion et intersection d'événements, ...

On a ainsi une **expérience aléatoire** ayant un nombre fini d'**issues** (ou **résultats possibles**) $e_{1.}$, $e_{2,}$ ..., e_n

L'**univers** Ω est l'ensemble de toutes ces issues. $\Omega = \{ e_{1.}, e_{2,} ..., e_n \}$

Dans l'exemple: $\Omega = \{(1; 1), (1; 2); ..., (1;6); (2; 1), (2; 2), ..., (6; 6)\}$

On peut représenter Ω par un tableau à double entrée

\dé 2 dé 1\	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)

3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Le **cardinal** de l'univers, noté, card(Ω), est le nombre d'éléments de l'univers, nombre de cas possibles.

Dans l'exemple: card(Ω) = 36 (Une issue est un couple de deux numéros)

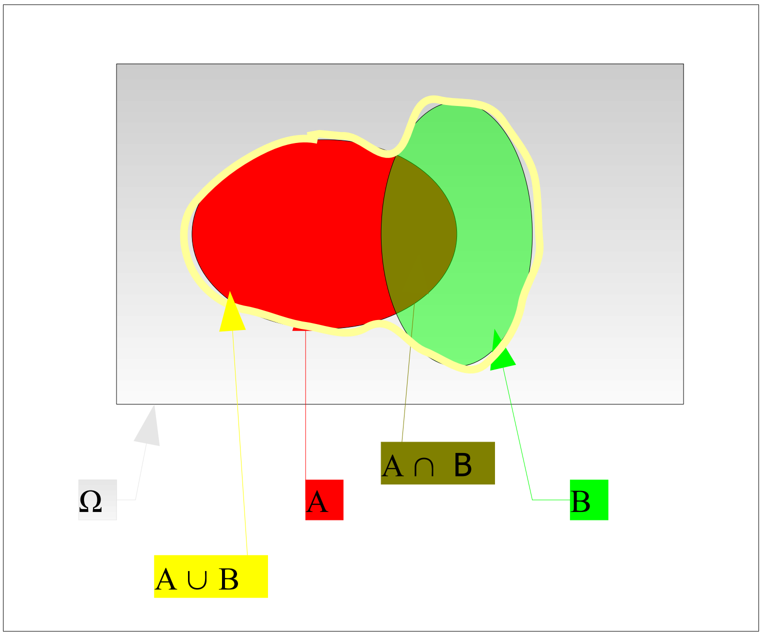
Un **événement** A est un sous-ensemble ou une partie de l'univers.

Exemple: A est l'ensemble des couples d'éléments pairs.

Les éléments de A sont colorés en rouge

\dé 2 dé 1\	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Le **complémentaire** de A ou **événement contraire** de A , noté $\overline{A}$, contient tous les éléments de l'univers Ω qui ne sont pas dans A.



Exemple: $\overline{A}$ est l'ensemble des couples de Ω où au moins une composante est impaire.

(Voir si nécessaire négation d'une phrase dans l'activité "logique et raisonnement" en seconde)

Les éléments de $\overline{A}$ sont dans le tableau précédent ceux qui ne sont pas colorés en rouge.

Un **événement élémentaire** (ou singleton) ne contient qu'une seule issue.
Exemple: B est l'ensemble des couples tels que la somme des numéros est un multiple de 12
$B = \{(6;\ 6)\}$

On considère deux événements A et B d'un univers Ω.
L'événement **A OU B**, noté $\boldsymbol{A \cup B}$, est réalisé si l'un au moins des événements A et B est réalisé.

L'événement **A ET B**, noté $\boldsymbol{A \cap B}$, est réalisé si les deux événements A et B sont réalisés.
Exemple: Soit C l'événement défini par: "la somme des numéros est un multiple de 3"

Les éléments de C sont les éléments sur fond bleu

Ceux de $A \cup C$ sont les éléments sur fond bleu **ou** colorés en rouge

$A \cup C$ = {(1;2), (1;5); (2;1), (2;2), (2;4); (2;6), (3;3), (3;6); (4;2); (4;4); (4;5), (4;6); (5;1); (5;4); (6;2), (6;3), (6;4), (6;6)}

Ceux de $A \cap C$ sont les éléments sur fond bleu **et** colorés en rouge

$A \cap C$ = {(2;4), (4;2), (6;6)}

\dé 2 dé 1\	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Définition:

Si $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que les événements A et B sont **incompatibles** ou **disjoints**.

I-2- Probabilité, hypothèse d'équiprobabilité, ...

I-2-1- Définition (dans le cas d'un univers fini)

À chacune des issues e_i de l'univers Ω, on associe un nombre noté $P(e_i)$ tel que

$$\begin{cases} 0 \leqslant P(e_i) \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad i \; 1 \leqslant i \leqslant n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1 \end{cases}$$

$P(e_i)$ est la **probabilité** de l'événement élémentaire $\{ e_i \}$

Soit A un événement, la probabilité de A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A.

I-2-2- Propriétés:

$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$P(\Omega) = 1$ $\quad$ Ω est l'événement certain

$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

$P(\emptyset) = 0$ $\quad$ $\emptyset$ est l'événement impossible

Si A et B sont **disjoints** ou incompatibles, **alors** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Remarque: Pour aller plus loin. On retrouvera lors de l'étude des lois continues les probabilités, mais, la définition ci-dessus liée aux ensembles finis ne convient plus.
La définition suivante contient celle vue en première dans le cadre des univers finis.
On note $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de Ω. L'ensemble vide $\emptyset$ et Ω sont des parties de Ω.
Une probabilité est une application P sur les parties $\mathscr{P}(\Omega)$ (ensemble des sous-ensembles de Ω) dans [0; 1] vérifiant $P(\Omega) = 1$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ lorsque A et B sont disjoints.

Exemple:

On jette un dé à six faces numérotées de 1 à 6 **truqué** de la façon suivante:
la probabilité de sortir un numéro est proportionnelle à ce numéro.
Calculer les probabilités des événements suivants:
A "le numéro sorti est pair"
B "le numéro sorti est impair"
C "le numéro sorti est un multiple de 3"
$A \cap C$ et $B \cap C$
$A \cup C$ et $B \cup C$

On sait: $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$
et $P(1) = k$, $P(2) = 2k$, ... , $P(6) = 6k$

On en déduit: $k + 2k + ... + 6k = 21k = 1$ $\qquad k = \frac{1}{21}$

$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 12k = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

$P(B) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{3}{7}$ (ou $P(B) = P(1) + P(3) + P(5) = 9k = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

$P(C) = P(3) + P(6) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

$P(A \cap C) = P(6) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

$P(B \cap C) = P(3) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

(ou $P(A \cup C)= P(2) + P(4) + P(6) + P(3) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$)

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$

(ou $P(B \cup C)= P(1) + P(3) + P(5) + P(6) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$)

I-2-3- Hypothèse d'équiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on a:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card\ \Omega} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{\text{nombres de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple du paragraphe I-1

On suppose que les deux dés sont bien équilibrés.
En ce cas, la sortie de chaque numéro a la même probabilité et les 36 cas possibles de l'univers Ω ont la même probabilité.

\dé 2 dé 1\	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)

5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

A est l'ensemble des couples d'éléments pairs. $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ et $P(\overline{A}) = \frac{3}{4}$

B est l'ensemble des couples tels que la somme des numéros est un multiple de 12. $P(B) = \frac{1}{36}$

C l'événement défini par: "la somme des numéros est un multiple de 3". $P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap C) = P(2;4) + P(4;2) + P(6;6) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{9}{36} + \frac{12}{36} - \frac{3}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

I-3- Variable aléatoire, loi de probabilité, espérance mathématique, variance, écart-type

I-3-1- Variable aléatoire- Loi de probabilité d'une v.a.r

Exemple: Dans l'exemple du §I-1, on fait la somme des deux numéros.

Ainsi, à chaque couple, on associe un nombre réel.

On crée une variable aléatoire réelle définie sur Ω

On obtient le tableau suivant:

\dé 2 dé 1\	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Une **variable aléatoire réelle** *X* est une fonction définie sur l'ensemble des parties de Ω à valeurs réelles.

À chaque issue, on associe un nombre réel.
La variable aléatoire *X* prend des valeurs x_1, x_2, ..., x_k où les x_i sont des nombres réels.
L'ensemble $\{ x_1, x_2, ..., x_k \} = X(\Omega)$ est l'univers image.
On note $(X = x_i)$ l'événement: "*X* prend la valeur x_i"
Les éléments de $(X = x_i)$ sont les antécédents de x_i par *X*
$P(X = x_i) = p_i$ est la probabilité de cet événement.

On définit ainsi une **loi de probabilité** de la variable aléatoire *X* à partir de la probabilité définie sur Ω.
Exemple: Loi de probabilité de *X* définie par la somme des numéros dans le cas de l'hypothèse d'équiprobabilité.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

I-3-2 Espérance mathématique de *X*

L'**espérance mathématique** de *X*, notée *E*(*X*), est définie par $E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$

C'est la moyenne pondérée (barycentre) des x_i affectés des coefficients (poids, pondérations) p_i.

Exemple: Loi de probabilité de *X* définie par la somme des numéros dans le cas de l'hypothèse d'équiprobabilité.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$p_i x_i$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$E(X) = \frac{252}{36} = 7$

I-3-3 Variance- Écart-type

La **variance** de *X*, notée *V*(*X*), est définie par: $V(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - E(X))^2$

C'est-à-dire que la variance est la moyenne pondérée des écarts à la moyenne au carré

Exemple: Loi de probabilité de *X* définie par la somme des numéros dans le cas de l'hypothèse d'équiprobabilité.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$p_i x_i$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$E(X) = \frac{252}{36} = 7$
$x_i - E(X)$	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	
$p_i (x_i - E(X))^2$	$\frac{25}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{5}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{25}{36}$	$V(X) = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$

On peut démontrer l'égalité suivante (formule de Koenig): $V(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

En pratique, on utilise cette formule beaucoup plus simple d'utilisation.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$p_i x_i$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$E(X) = \frac{252}{36} = 7$
$p_i x_i^2$	$\frac{4}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{48}{36}$	$\frac{100}{36}$	$\frac{180}{36}$	$\frac{294}{36}$	$\frac{320}{36}$	$\frac{324}{36}$	$\frac{300}{36}$	$\frac{242}{36}$	$\frac{144}{36}$	$E(X^2) = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}$

On a alors: $V(X) = \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{35}{6}$

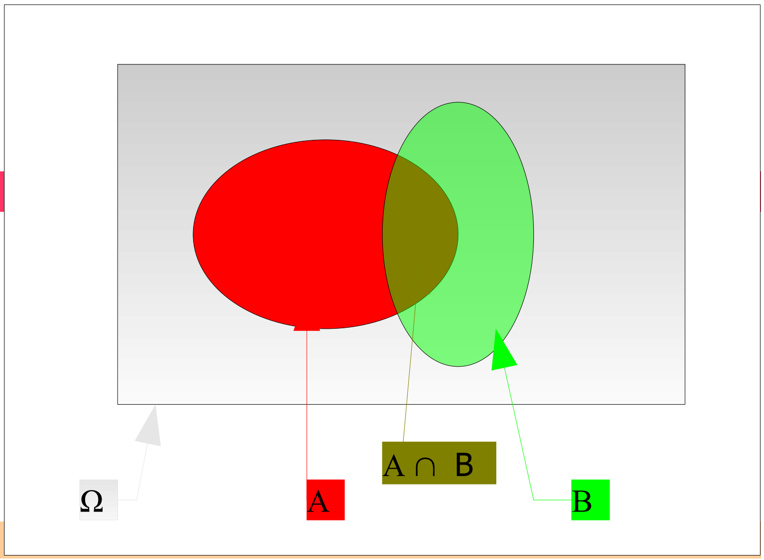
L'**écart-type** de *X* , noté $\sigma(X)$, est défini par: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple: Loi de probabilité de *X* définie par la somme des numéros dans le cas de l'hypothèse d'équiprobabilité. $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}}$

"J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !" ***Hilbert, David***
au sujet d'un étudiant qui a renoncé aux mathématiques pour la poésie

Remarquer: Si les valeurs prises par la variable aléatoire sont dans une unité, alors, la variance est cette unité au carré et l'écart-type a la même unité que la v.a.r.

II- Probabilités conditionnelles



B étant un ensemble non vide, on **réduit** l'univers à B

On prend alors les éléments de A qui sont dans B (c'est-à-dire les éléments de $A \cap B$) et à partir de la probabilité définie sur Ω, on définit une probabilité sur B, notée P_B .

Exemple:

Dans une classe de 30 élèves, on dénombre 12 garçons et 18 filles qui ont le choix entre deux langues LV1, anglais et allemand.

Les effectifs se répartissent ainsi:.

Sexe\LV1	Anglais	Allemand	Total
Garçons	8	4	12
Filles	13	5	18
Total	21	9	30

Situation 1: On prend dans la liste un élève au hasard (pour assurer l'hypothèse d'équiprobabilité)

Donner la probabilité de chacun des événements suivants:

G: "l'élève est un garçon" $P(G) = \frac{12}{30} = 0{,}4$

F: "l'élève est une fille" $P(F) = \frac{18}{30} = 0{,}6$

A: "l'élève est en anglais" $P(A) = \frac{21}{30} = 0{,}7$

D: "l'élève est en allemand" $P(D) = \frac{9}{30} = 0{,}3$

$G \cap A$: "l'élève est un garçon et est en anglais" $P(G \cap A) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

$G \cap D$: "l'élève est un garçon et est en allemand" $P(G \cap D) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

$F \cap A$: "l'élève est une fille et est en anglais" $P(F \cap A) = \frac{13}{30}$

$F \cap$ D: "l'élève est une fille et est en allemand" $P(F \cap D) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

Situation 2: On prend dans la liste un élève au hasard (pour assurer l'hypothèse d'équiprobabilité)

On sait que c'est un garçon.

L'univers est maintenant l'ensemble des 12 garçons. On note P_G la probabilité définie sur cet ensemble

On considère les événements suivants:

A: "l'élève est en anglais" $\quad P_G(A) = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

$P_G(A)$ est la probabilité conditionnelle de A sachant G.

D: "l'élève est en allemand" $\quad P_G(D) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

On a les mêmes résultats en faisant: $P_G(A) = \dfrac{P(G \cap A)}{P(G)}$ et $P_G(D) = \dfrac{P(G \cap A)}{P(G)}$

Situation 3: On prend dans la liste un élève au hasard (pour assurer l'hypothèse d'équiprobabilité)

On sait que c'est un élève faisant de l'anglais.

L'univers est maintenant l'ensemble des 21 anglicistes. On note P_A la probabilité définie sur cet ensemble

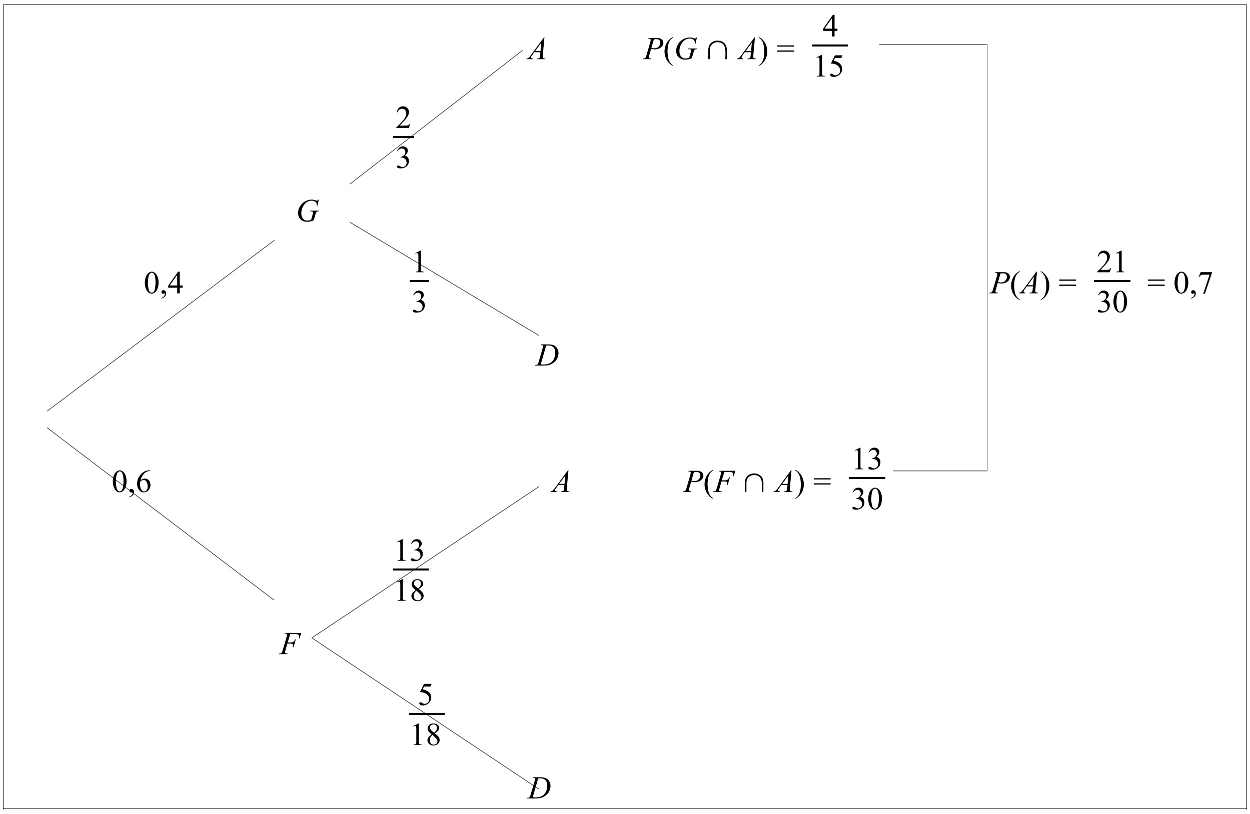
On considère les événements suivants:

G: "l'élève est un garçon" $\quad P_A(G) = \dfrac{8}{21} = \dfrac{P(G \cap A)}{P(A)}$. Sachant que cet élève fait de l'anglais, la probabilité pour que cet élève soit un garçon vaut $\dfrac{8}{21}$

F: "l'élève est une fille" $\quad P_A(F) = \dfrac{13}{21} = \dfrac{P(F \cap A)}{P(A)}$

arbre pondéré

On peut résumer ces probabilités à l'aide d'un arbre pondéré.



II-1- Définition

Soit un univers Ω sur lequel est définie une probabilité P.

B est un événement tel que $P(B) \neq 0$.

On appelle probabilité de A sachant B (ou probabilité de A si B), notée $P_B(A)$,

le quotient $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

II-2- Propriétés

P_B vérifie toutes les propriétés des probabilités:

$P_B(B) = 1$

Pour tout événement A, $0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1$

$P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité: $P_B(A) = \dfrac{\text{Nombres d'issues favorables à } A \cap B}{\text{Nombres d'issues de } B}$

De plus, si $P(A) \neq 0$, on a: $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B)$

II-3- Événements indépendants

II-3-1- Définition

P est une probabilité définie sur un univers Ω

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

II-3-2- Conséquence

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

A et B sont des événements indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$

si et seulement si $P_A(B) = P(B)$

Exemple

On fait deux lancers successifs d'un dé numéroté de 1 à 6 et bien équilibré.

On considère les événements suivants:

A: "les deux numéros sont identiques"

B: "le premier résultat est impair"

C: "la somme des résultats est paire"

A et B sont indépendants?

A et C sont-ils indépendants?

B et C sont-ils indépendants?

card (Ω) = 36 et $A = \{(i, i) / 1 \leqslant i \leqslant 6\}$. card ($A$) = 6 $P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$B = (i; j) / i = 1$ ou 3 ou 5 et $1 \leqslant j \leqslant 6\}$ card (B) = 18 $P(B) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

$C = (i; j) / 0 \leqslant i \leqslant 6$ et $1 \leqslant j \leqslant 6$ et $i + j = 2n\}$ card (C) = 18 $P(C) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

$A \cap B = \{(1; 1); (3; 3); (5; 5)\}$ $P(A \cap B) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$ et $P(A)\times P(B) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$

A et B sont indépendants.

$A \cap C = A$

A et C ne sont pas indépendants.

$B \cap C = \{(1; 1); (1; 3), (1; 5), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (5; 5)\}$

$$P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ et } P(B)\times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

B et C sont indépendants.

II-4- Probabilités totales

II-4-1 Partition de l'univers

Soit Ω un univers.

A_1 , A_2 , ..., A_n forment une partition de Ω lorsque:

(i) Pour tout i entier de 1 à n, $A_i \neq \emptyset$.

(ii) Pour tout i et tout j entiers distincts de 1 à n,

$A_i \cap A_j = \emptyset$

(iii) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$

$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \right)$

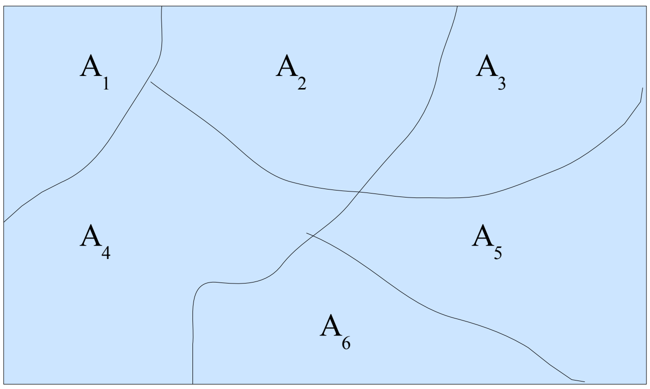
Remarque: Soit $A \neq \emptyset$ alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Une partition de l'univers:

Aucun sous-ensemble n'est vide

Tous les éléments de Ω sont dans un des sous-ensembles.

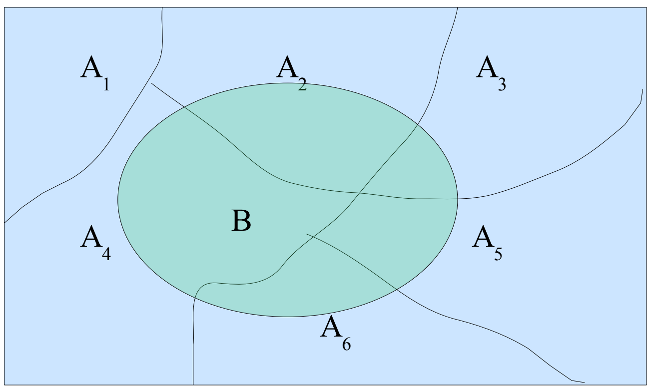
Aucun élément n'est commun à deux sous-ensembles



II-4-2- Propriété

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une partition de Ω et B un événement de Ω.

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$
$$= P_{A_1}(B) \times P(A_1) + ... + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$$



Deux exemples:

"J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !" ***Hilbert, David***
au sujet d'un étudiant qui a renoncé aux mathématiques pour la poésie

1) Dans un groupe de personnes, on compte 60% de femmes et, parmi celles-ci 15% portent des lunettes.

On sait aussi que dans le groupe, 15% des personnes portent des lunettes.

On prend une personne au hasard dans le groupe elle porte des lunettes.

Quelle est la probabilité pour que cette personne soit un homme?

On note: F "la personne est une femme", $H = \overline{F}$ " la personne est un homme", L: " la personne porte des lunettes"

On sait: $P(F) = 0,6$ et donc $P(H) = 0,4$

$P_F(L) = 0,15$

On cherche: $P_L(H)$

F et H forment une partition de l'univers et $P(L) = P(L \cap H) + P(L \cap F)$

$P(L \cap F) = P_F(L) \times P(F) = 0,15 \times 0,6 = 0,09$ et $P(L \cap H) = 0,15 - 0,09 = 0,06$

$$P_L(H) = \frac{P(L \cap H)}{P(L)} = \frac{0,06}{0,15} = 0,4$$

Résumé sous forme de tableau

Sexe\caractéristiques	L	$\overline{L}$	Total
F	$L \cap F$ 9		60
H			40
Total	15		100

2) Dans un lycée, on considère l'ensemble T de tous les élèves de terminales.

Ces élèves sont répartis en huit classes: $T\text{-}L_1$, $T\text{-}L_2$, $T\text{-}ES_1$, $T\text{-}ES_2$, $T\text{-}S_1$, $T\text{-}S_2$, $T\text{-}STg_1$, $T\text{-}STg_2$

Soit B l'ensemble des élèves faisant allemand (LV1 ou LV2 ou LV3)

On a les renseignements suivants:

Les résultats sont tronqués au centième dans le deuxième tableau.

Classes	$T\text{-}L_1$	$T\text{-}L_2$	$T\text{-}ES_1$	$T\text{-}ES_2$	$T\text{-}S_1$	$T\text{-}S_2$	$T\text{-}STg_1$	$T\text{-}STg_2$	T
Effectifs	28	22	19	20	31	23	28	29	200

Classes	$T\text{-}L_1$	$T\text{-}L_2$	$T\text{-}ES_1$	$T\text{-}ES_2$	$T\text{-}S_1$	$T\text{-}S_2$	$T\text{-}STg_1$	$T\text{-}STg_2$
% de l'effectif de la classe faisant allemand	28,57	27,27	21	15	6,45	30,43	0	31

On prend un élève de Terminale au hasard.
Quelle est la probabilité $P(B)$ pour que cet élève fasse de l'allemand?

Les huit classes forment une partition de T.

Le deuxième tableau nous donne les probabilités conditionnelles.
On a: $P(B) = P_{T-L_1}(B)\times P(T-L_1) + P_{T-L_2}(B)\times P(T-L_2) + P_{T-ES_1}(B)\times P(T-ES_1) + P_{T-ES_2}(B)\times P(T-ES_2) + P_{T-S_1}(B)\times P(T-S_1) + P_{T-S_2}(B)\times P(T-S_2) + P_{T-STg_1}(B)\times P(T-STg_1) + P_{T-STg_2}(B)\times P(T-STg_2)$

$$P(B) = 0{,}2857\times\frac{28}{200} + 0{,}2727\times\frac{22}{200} + 0{,}21\times\frac{19}{200} + 0{,}15\times\frac{20}{200} + 0{,}0645\times\frac{31}{200} + 0{,}3043\times\frac{23}{200} + 0\times\frac{28}{200} + 0{,}31\times\frac{29}{200} = \frac{8+6+4+3+2+7+9}{200} = 0{,}195$$

(Dans un autre chapitre, on étudiera **les lois de probabilités**)