Table des matières

Quand a-t-on du second degré?

On parle de "second degré" lorsque l'expression algébrique développée est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Le terme de plus haut degré (c'est l'exposant de la variable ou de l'inconnue) est 2.

On dit souvent: $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est un ***trinôme du second degré***

On aura notamment une équation ou une inéquation du second degré en transposant tous les termes du même côté du signe = ou < ou >.

Exemple:

$(x+1)^2 = 3x - 3x^2$ peut s'écrire: $x^2 + 2x + 1 = 3x - 3x^2$, soit: $4x^2 - x + 1 = 0$

C'est donc une équation du second degré avec $a = 4$, $b = -1$, $c = 1$

Exercices:

Les expressions ou équations ou inéquations suivantes sont-elles du second degré? Si oui, écrire les coefficients a, b et c.

$A(x) = (3x - 5)(x + 2) - (x - 2)^2$

$B(x) = (3x - 5)(x + 2) - 3x^2 + 4x$

(E_1) : $(x + 2)(x - 1) = 2x^2$

(E_2) : $(x + 2)(x - 1) = (2x + 1)(x + 3) - x^2$

(I_1) : $(2x + 1)^2 \leqslant x - 4$

(I_2) : $(2x + 1)^2 \geqslant (x + 1)(3 + 2x)$

I- Pour la mise en route ...

I-1- Équations

I-1-1- avec la forme factorisée

Résoudre l'équation (E): $(x - 1)(x + 3) = 0$

I-1-2- avec la forme développée

Développer, réduire et ordonner: $(x - 1)(x + 3)$

On note $f(x)$ le résultat: $f(x) = ...$

D'après le I-1-1: compléter sans aucun calcul:

$f(1) = ...$ $f(-3) = ...$

I-1-3- avec la forme canonique

Vérifier que $f(x) = (x + 1)^2 - 4$
Retrouver les solutions de l'équation (E) du I-1-1- à partir de ce résultat.

I-1-4- Sur un graphique.

On note (P) la représentation graphique de f dans un repère. (Utiliser la calculatrice graphique).
Placer sur (P) les points d'abscisses 1 et d'abscisse -3.

I-2- Inéquations

I-2-1- Tableau de signes

Dresser le tableau de signes du produit $(x - 1)(x + 3)$

En déduire les solutions des deux inéquations: $(I_1) : f(x) \geqslant 0$

$(I_2) : f(x) < 0$

I-2-2- Sur un graphique

En utilisant la courbe (P) du I-1-4, retrouver les solutions des inéquations (I_1) et (I_2).

I-3- Bilan à l'aide de graphiques

On montrera plus tard que la représentation graphique des fonctions du second degré sont des paraboles.
Les paraboles peuvent être "tournées vers le haut", "tournées vers le bas",

elles peuvent couper ou non l'axe des abscisses.
On a donc quatre cas à analyser.
Pour cette partie, utiliser votre calculatrice graphique.

I-3-1- La parabole est tournée vers le haut et coupe l'axe des abscisses.

Représenter graphiquement: $f_1 : x \mapsto 2x^2 - 2x - 4$

Lire sur le graphique la ou les solutions de l'équation $f_1(x) = 0$

En déduire la factorisation de $f_1(x)$:

$$f_1(x) = 2(x - ...)(x - ...)$$

I-3-2- La parabole est tournée vers le haut et ne coupe pas l'axe des abscisses.

Représenter graphiquement: $f_2 : x \mapsto 2x^2 - 2x + 4$

D'après le graphique, que peut-on dire de l'équation $f_2(x) = 0$?

Pourquoi en ce cas, est-on sûr de ne pas pouvoir factoriser $f_2(x)$?

I-3-3- La parabole est tournée vers le bas et coupe l'axe des abscisses.

Représenter graphiquement: $f_3 : x \mapsto -2x^2 - 5x + 3$

Lire sur le graphique la ou les solutions de l'équation $f_3(x) = 0$

En déduire la factorisation de $f_3(x)$:

$$f_3(x) = -2(x - ...)(x - ...)$$

I-3-4- La parabole est tournée vers le bas et ne coupe pas l'axe des abscisses.

Représenter graphiquement: $f_4 : x \mapsto -2x^2 - 5x - 4$

D'après le graphique, que peut-on dire de l'équation $f_4(x) = 0$?

Pourquoi en ce cas, est-on sûr de ne pas pouvoir factoriser $f_4(x)$?

II- Formes canoniques

II-1- Qu'est-ce?

Dans la forme canonique du second degré, la variable n'apparaît qu'une seule fois.

Dans l'exemple du I-1-, on a trois écritures de la même expression $f(x)$.

Forme factorisée: $f(x) = (x - 1)(x + 3)$

Forme développée, réduite: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Forme canonique: $f(x) = (x + 1)^2 - 4$

II-2- Quel intérêt?

Dans les formes factorisées et développées, la variable x apparaît plusieurs fois.

Dans la forme canonique, comme la variable n'apparaît qu'une seule fois, cela permet de réaliser un enchaînement de fonctions de référence pour passer de la variable x à l'image $f(x)$.

$x \mapsto x+1 \mapsto (x+1)^2 \mapsto (x+1)^2-4$, ce qui peut se décrire ainsi:

prendre un réel, lui ajouter 1, élever au carré , puis retrancher 4.
Dans les formes factorisées et développées, il n'est pas possible de faire de tels enchaînements.
La forme canonique permet d'étudier rapidement la fonction f.

Dans l'exemple: $f(x) = (x+1)^2 - 4$, on voit instantanément que le minimum -4 est atteint pour $x = -1$.

la parabole est "tournée vers le haut"

la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de cette parabole.

Quand c'est possible, la forme canonique permet de factoriser en utilisant l'identité remarquable:

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$f(x) = (x+1)^2 - 4 = [(x+1)-2][(x+1)+2] = (x-1)(x+3)$

et, évidemment, en développant, réduisant, il vient aussitôt: $f(x) = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3$

II-3- La méthode

La méthode s'appuie sur l'utilisation de l'identité remarquable:

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ écrite de la façon suivante: $A^2 + 2AB = (A+B)^2 - B^2$

Trois exemples:

1) Dans $x^2 + 2x - 3$, on considère que $x^2 + 2x$ est le ***début du développement*** du carré de la somme, soit:

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, ce qui mène à : $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$

En substituant dans la forme initiale, il vient: $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 1 - 3$

Après réduction: $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

2) Cas où le coefficient de x^2 est différent de 1

$g(x) = 3x^2 + 12x + 9$
On commence par factoriser le coefficient 3. ***Chaque coefficient est divisé par 3 que l'on met en facteur.***
$g(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 6x + 3)$
et, on reprend la méthode du 1) pour faire apparaître une somme au carré:
$x^2 + 6x + 3 = (x+3)^2 - 9 + 3$
Après réduction, (sans oublier le coefficient 3)
$g(x) = 3[(x+3)^2 - 6]$

3) Il n'y a pas que des entiers ... dans la vie!
$h(x) = -2x^2 + 5x - 7$
On commence par factoriser le coefficient (-2). ***Chaque coefficient est divisé par (–2) que l'on met en facteur.***
ATTENTION aux signes
$h(x) = -2(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2})$, or,

$x^2 - \frac{5}{2}x = (x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16}$, d'où,

$h(x) = -2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{7}{2}\right]$, puis, en mettant au même dénominateur et en réduisant:

$h(x) = -2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{-25+56}{16}\right] = -2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right]$

III- Les formules et théorèmes à connaître.

La méthode utilisée dans les exemples précédents se généralisent pour toutes les expressions du second degré:

$a \neq 0$, on a: $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

À titre d'exercice, développez le second membre de l'égalité, et, vous retrouverez le premier membre.

On pose: $\Delta = b^2 - 4ac$ **Δ s'appelle le discriminant de l'expression du second degré.**

On a alors l'écriture suivante: $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (1)

III-1- Trois cas

III-1-1- Le discriminant Δ est nul

Dans le cas où $\Delta = 0$, l'égalité (1) s'écrit: $ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

On reconnaît la factorisation d'une somme au carré.

Or, un carré est toujours positif ou nul.

Conclusion: Lorsque $\Delta = 0$, le trinôme s'annule pour la valeur $-\frac{b}{2a}$ et

est du signe de a.

Exemples:

a) $2x^2 + 12x + 18 = 2(x^2 + 6x + 9) = 2(x + 3)^2$

Cette expression s'annule lorsque $x = -3$

Cette expression est positive ou nulle.

b) $-3x^2 + 6x - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x - 1)^2$

Cette expression s'annule lorsque $x = 1$

Cette expression est négative ou nulle.

III-1-2- Le discriminant Δ est strictement positif

Dans le cas où $\Delta > 0$, l'égalité (1) s'écrit: $ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ en remarquant la différence de deux carrés.

On pose $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et l'égalité (1) s'écrit:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

On dit que x_1 et x_2 sont les racines du trinôme du second degré.

En appliquant alors les propriétés des produits, on sait résoudre les équations et inéquations du second degré.

Exemples:

a) Factoriser l'expression $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

Résoudre alors $f(x) = 0$, puis $f(x) \geqslant 0$

On reconnaît un trinôme du second degré avec $a = 2$, $b = 5$ et $c = -3$

$\Delta = 5^2 - 4\times2\times(-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$

Les racines sont: $x_1 = \dfrac{-5-7}{2\times2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{2\times2} = \dfrac{1}{2}$

D'où la factorisation suivante: $f(x) = 2(x + 3)(x - \dfrac{1}{2})$

On peut vérifier le résultat en développant ...

Les solutions de $f(x) = 0$ sont -3 et $\dfrac{1}{2}$

Tableau de signes pour résoudre $f(x) \geqslant 0$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion: $f(x) \geqslant 0$ a pour ensemble solution l'ensemble $E =]-\infty; -3] \cup [\dfrac{1}{2}; +\infty]$

b) Factoriser l'expression $g(x) = -3x^2 + 5x - 2$

Résoudre alors $g(x) = 0$, puis $g(x) \geqslant 0$

On reconnaît un trinôme du second degré avec $a = -3$, $b = 5$ et $c = -2$

$\Delta = 5^2 - 4\times(-2)\times(-3) = 25 - 24 = 1 = 1^2$

Les racines sont: $x_1 = \dfrac{-5-1}{2\times(-3)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-5+1}{2\times(-3)} = \dfrac{2}{3}$

D'où la factorisation suivante: $g(x) = -3(x - 1)(x - \dfrac{2}{3})$

On peut vérifier le résultat en développant ...

Les solutions de $g(x) = 0$ sont 1 et $\dfrac{2}{3}$

Tableau de signes pour résoudre $g(x) \geqslant 0$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-\frac{2}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion: $g(x) \geqslant 0$ a pour ensemble solution l'ensemble $F = \left[\frac{2}{3} ; 1\right]$

III-1-3- Le discriminant Δ est strictement négatif

Dans le cas où $\Delta < 0$, le nombre $-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif, et il n'est pas possible de factoriser $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

En effet, la somme de deux nombres strictement positifs est strictement positive et ne pourra jamais s'annuler.

Le signe de cette expression est donc toujours du signe de a.

Exemples:

a) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$

On reconnaît un trinôme du second degré avec $a = 3$, $b = 4$ et $c = 2$

$\Delta = 4^2 - 4\times3\times2 = 16 - 24 = -8$ $\qquad\Delta < 0$
L'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution.
L'expression $f(x)$ est strictement positive (signe de 3 qui est le coefficient de x^2)

b) $g(x) = -2x^2 + 3x - 5$
On reconnaît un trinôme du second degré avec $a = -2$, $b = 3$ et $c = -5$

$\Delta = 3^2 - 4\times(-2)\times(-5) = 9 - 40 = -31$ $\qquad\Delta < 0$
L'équation $g(x) = 0$ n'a aucune solution.
L'expression $g(x)$ est strictement négative (signe de -2 qui est le coefficient de x^2)

III-2- Les formules et théorèmes

Quand on reconnaît une expression du second degré, on l'écrit sous la forme développée, réduite et ordonnée selon les puissances décroissantes.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

On relève les coefficients a, b et c, et, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

Suivant le signe de Δ, on a les conclusions suivantes:

III-2-1- Résoudre une équation du second degré

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a des solutions si et seulement si le discriminant Δ est positif ou nul.

1) Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$, et on peut écrire l'équation sous la forme $a(x - \alpha)^2 = 0$.

2) Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$,et

on peut écrire l'équation sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Vocabulaire: on dit que x_1 et x_2 sont les ***racines*** du trinôme.

3) Si $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution et l'expression n'est pas factorisable

III-2-2- Signe d'une expression du second degré. Résoudre une inéquation du second degré

L'expression $ax^2 + bx + c$ est du signe du coefficient a sauf pour les valeurs de x prises entre les racines lorsqu'elles existent.

Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe du coefficient a

Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe du coefficient a et s'annule pour la seule valeur $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$

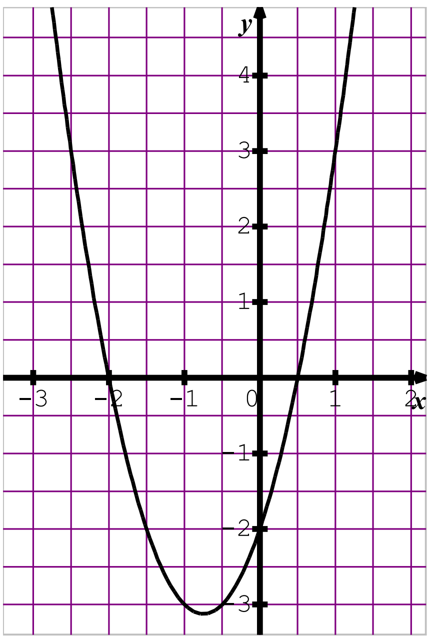
Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe du coefficient a pour les valeurs de x à l'extérieur des racines, et, du signe opposé à celui de a pour les valeurs de x prises entre les racines.

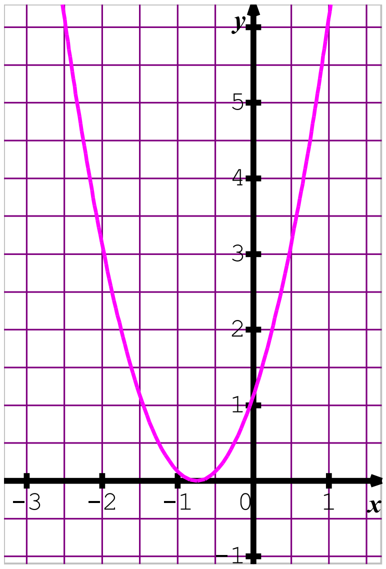
IV- Pour préparer le chapitre sur l'étude de la fonction du second degré.

On fera dans un prochain chapitre l'étude de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Pour ce chapitre, retenir que cette fonction est représentée par une parabole et avoir en mémoire les différents cas étudiés au § I..

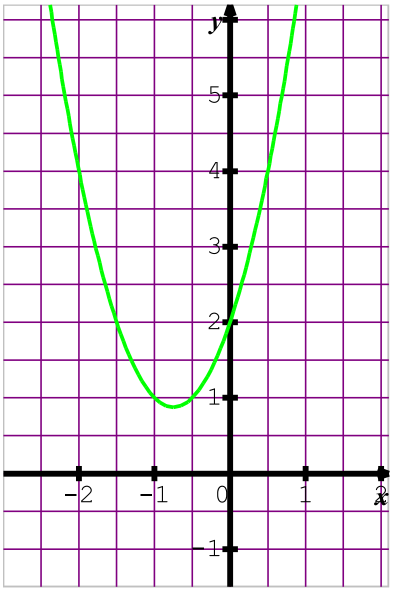
$\Delta > 0$ et $a > 0$



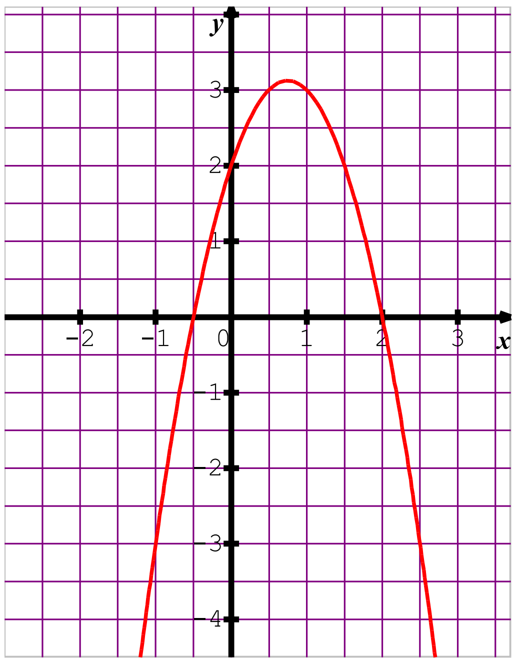


$\Delta = 0$ et $a > 0$

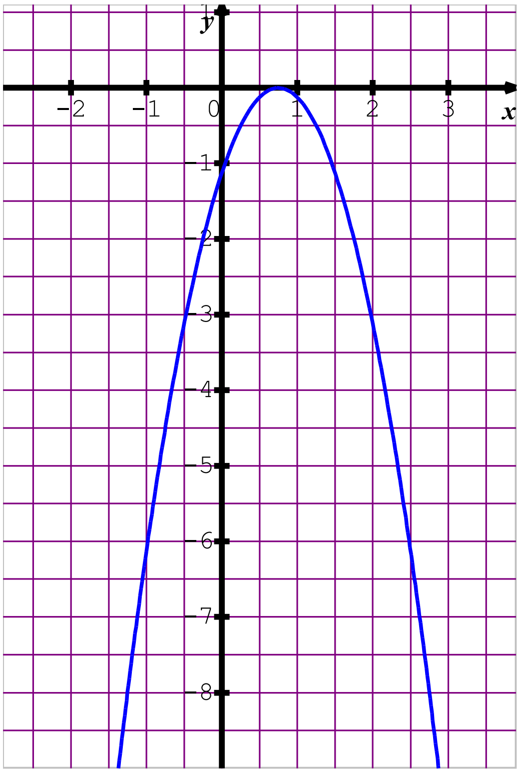
$\Delta < 0$ et $a > 0$



$\Delta > 0$ et $a < 0$



$\Delta = 0$ et $a < 0$



$\Delta < 0$ et $a < 0$