Table des matières

I- Quelques rappels et compléments

I-1- Définition: Suite numérique Dans ℝ ou dans ℂ

Une suite numérique réelle est une fonction u définie sur l'ensemble (ou une partie) des entiers naturels ℕ à

valeurs réelles.
On note u_n l'image de l'entier n par u $\quad$ *($u(n) = u_n$)*

On définit aussi de la même façon, des suites de nombres complexes: par exemple la suite (z_n) définie par $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = (1+\mathrm{i}) z_n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite numérique complexe.

(Remarque: De même, on peut définir des suites de points $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$)

I-1-1- Comment définir les suites

1-1-1-1- É*numération de termes;*

Une suite est une fonction... alors, pourquoi noter autrement.
Dès qu'on a une liste d'éléments ordonnés, il est possible de les énumérer et de leur attribuer un numéro. En ce cas, la suite est définie par l'énumération des images, ce qui n'est pas possible à faire dans l'ensemble des réels.
Un ensemble est dit discret lorsqu'on peut isoler les éléments.
Discret s'oppose à continu

I-1-1-2 Suite définie par $u_n = f(n)$ (formule explicite en fonction de n)

f étant définie sur les réels positifs, la suite (u_n) est la restriction de f à $\mathbb{N}$.
Exemple: f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$

$u_n = n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La représentation graphique est l'ensemble des points de coordonnées entières positives de la courbe d'équation $y = f(x)$.

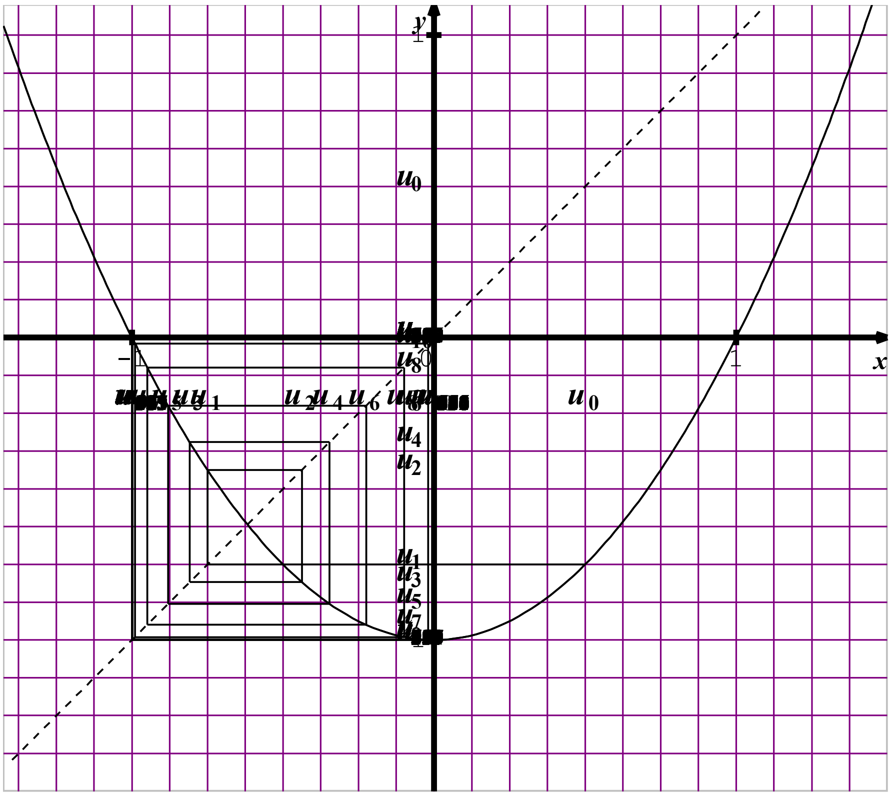
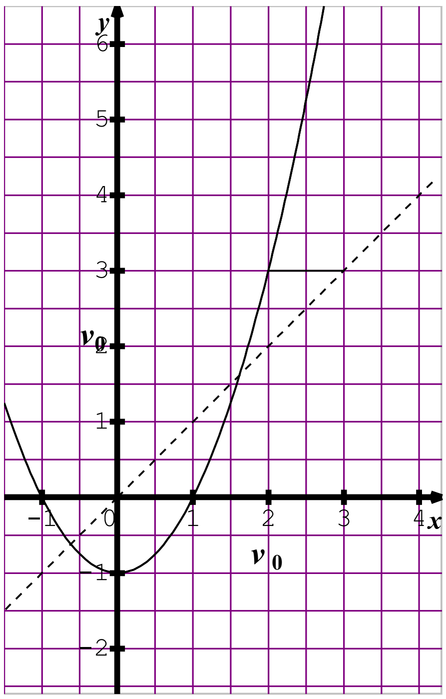
I-1-1-3- Suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

f est définie sur un ensemble E et **tous les termes u_n appartiennent à E.** (Voir aussi §I-3-2-4)
La suite est définie par son premier terme $u_0 = a$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

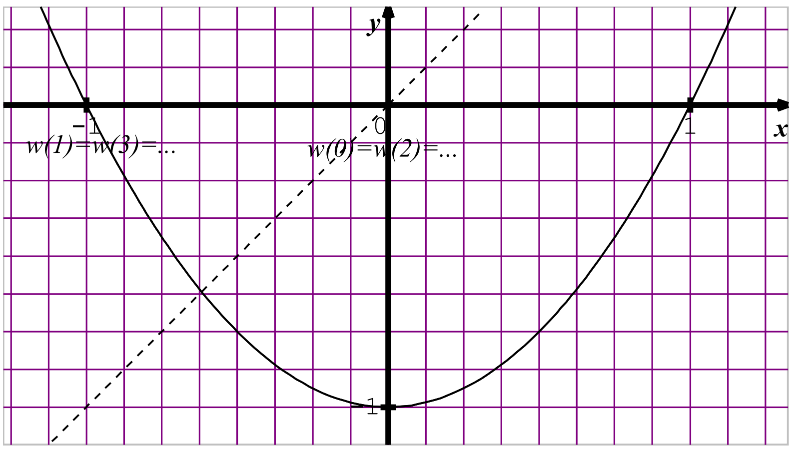
En construisant l'ensemble des points de coordonnées (u_n; $f(u_n)$) de la courbe d'équation $y = f(x)$, on obtient sur les axes les valeurs prises par u_n. Dans un repère orthonormal, on construit la droite d'équation $y = x$ et on reporte les valeurs par symétrie sur l'un des axes.

Le premier terme est important.

Exemple: f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$

(u_n): $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=u_n^2-1 \end{cases}$	
(v_n): $\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=v_n^2-1 \end{cases}$	

(w_n): $\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = w_n^2 - 1 \end{cases}$



I-1-2- Manipulation d'indices

Un indice permet de donner la position d'un terme dans une liste. Il n'indique pas une opération sur les termes eux-mêmes.

Quelques exemples: (u_n) est la suite définie par $u_n = n^2 - 1$

$u_{n^2} = (n^2)^2 - 1 = n^4 - 1$ $\qquad$ $(u_n)^2 = (n^2 - 1)^2 = n^4 - 2n^2 + 1$

$u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$ $\qquad$ $u_n + 1 = n^2$

$u_{2n} = (2n)^2 - 1 = 4n^2 - 1$ $\qquad$ $2u_n = 2(n^2 - 1) = 2n^2 - 2$

I-1-3- Décompte des termes

k et n deux entiers naturels avec $k \leqslant n$.

De l'entier k à l'entier n, il y a $n - k + 1$ termes et $n - k$ intervalles
Par exemple: dans une suite géométrique de raison q, de u_k à u_n, on a multiplié $n - k$ fois u_k par la raison q, d'où, $u_n = u_k \times q^{n-k}$

Pour faire la somme $S = u_k + \ldots + u_n$, on compte $n - k + 1$ termes, d'où, $S = u_k \times \dfrac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q}$

I-2- Démonstration par récurrence

voir: activité suites et récurrence

I-3- Monotonie

I-3-1- Définition

* Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a: $u_{n+1} \geqslant u_n$

** Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a: $u_{n+1} \leqslant u_n$

*** Une suite (u_n) est **stationnaire** à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a: $u_{n+1} = u_n$

**** Une suite (u_n) est **monotone** lorsqu'elle ne change pas de variations. elle est soit croissante, soit décroissante

Comme pour les fonctions, on parlera de suites strictement monotones lorsque les inégalités sont strictes.

I-3-2- Méthodes

I-3-2-1- En général

Pour déterminer le sens de variations d'une suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Exemple: Soit $n \geqslant 1$. (u_n) est la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-2}{n(n+2)}.$$

Puisque n est un entier naturel, on obtient: $u_{n+1} - u_n < 0$ et par conséquent (u_n) est strictement décroissante.

I-3-2-2- Le cas particulier des suites à termes strictement positifs.

Lorsque la suite (u_n) est définie à partir de puissances, il est souvent plus facile de faire intervenir le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et de le comparer avec 1 à condition d'avoir les termes de la suite (u_n) **strictement positifs**.

Exemple: Soit $n \in \mathbb{N}$. (u_n) est la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

On a $u_0 = 0$ et $u_n > 0$ lorsque $n \geqslant 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

Comparaison de $\dfrac{n+1}{2n}$ et 1.

$$\frac{n+1}{2n} - 1 = \frac{n+1-2n}{n} = \frac{1-n}{2n}$$

Si $n > 1$, on obtient: $\dfrac{n+1}{2n} < 1$, soit: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

La suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

I-3-2-3- Le cas particulier où $u_n = f(n)$

Si f est une fonction monotone sur l'intervalle $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ à la même monotonie

Exemple: Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n-4}{n+3}$.

(u_n) est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-4}{x+3}$.

Sur $\mathbb{R}^+$, f est définie et dérivable et $f'(x) = \dfrac{7}{(x+3)^2}$

f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.

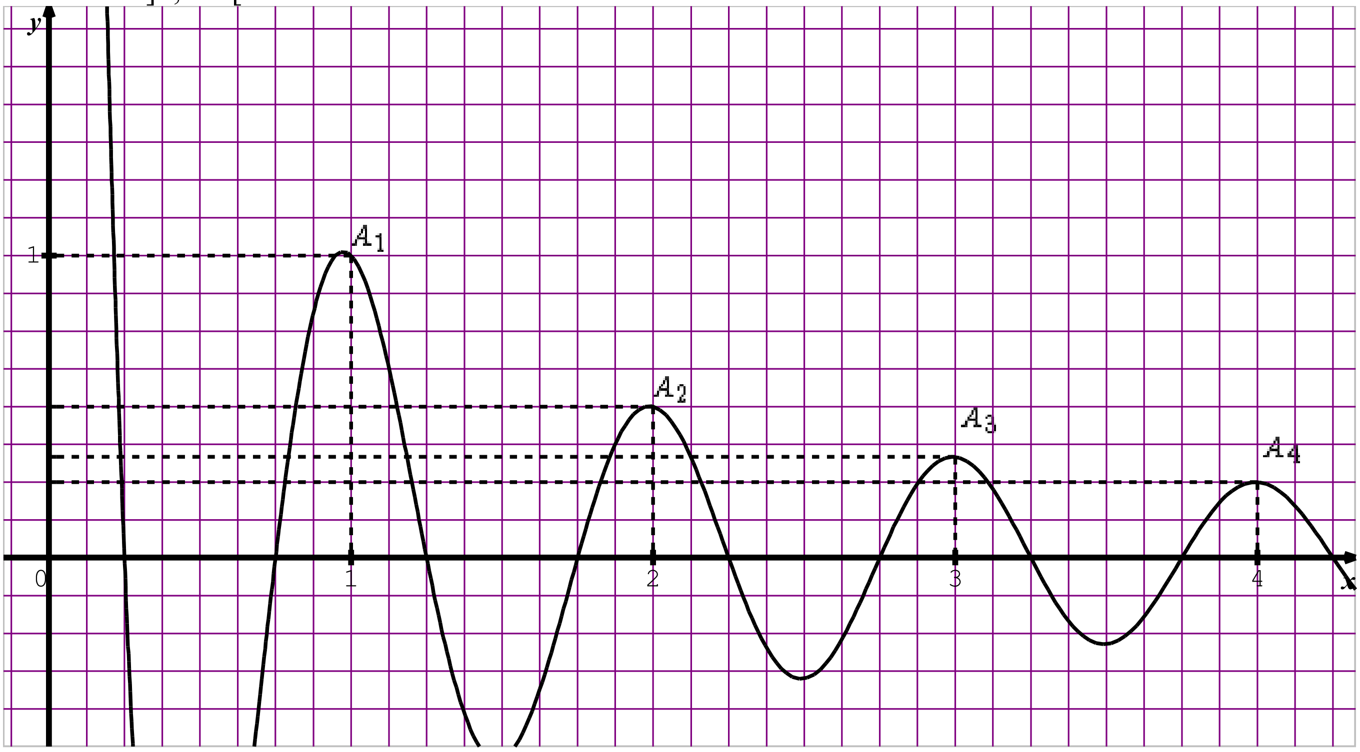
La réciproque est fausse.

***Un contre-exemple "classique"*:**

La fonction f représentée sur le graphique ci-dessous est définie par $f(x) = \dfrac{\cos(2\pi \times x)}{x}$

Les points A_1, A_2, A_3, A_4 ..., A_n ont pour coordonnées $(n; f(n)) = (n; \frac{1}{n})$.

La suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = f(n)$ est strictement décroissante alors que la fonction f n'est pas monotone sur $]0; +\infty[$.



I-3-2-4- $u_{n+1} = f(u_n)$. Danger!

Se rappeler d'abord qu'on doit pouvoir calculer tous les termes, c'est-à-dire, f étant définie sur une partie E de $\mathbb{R}$, on doit avoir $u_0 \in E$, ce qui permet de calculer $u_1 = f(u_0)$, puis, on doit avoir u_1 dans E pour pouvoir calculer $f(u_1)$ et ainsi de suite.

Une définition hors programme mais facile à comprendre:

Pour que la suite soit définie, on doit avoir $f(E) \subset E$. On dit que E est stable par f.

Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$

On pose $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \ln(u_n)$

Vérifier qu'on ne peut pas définir u_4.

Ne pas confondre la variation de f et celle de la suite (u_n).

On peut remarquer:

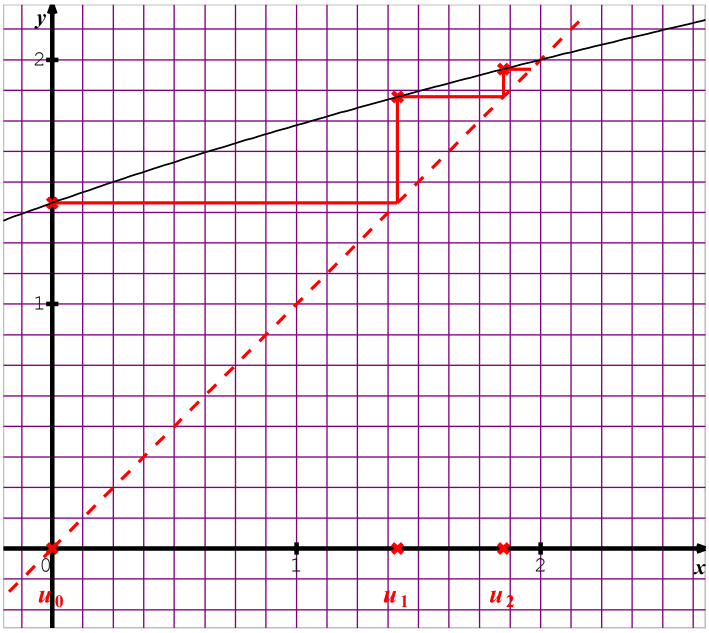
Si f est strictement croissante et si $u_0 < u_1$ alors $u_1 < u_2$, puis $u_2 < u_3$ ... (Voir le second exemple du 1-1-1-3 suite (v_n))

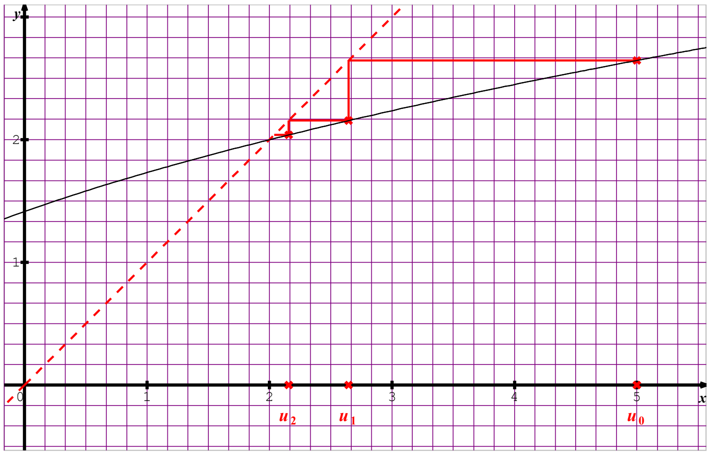
Si f est strictement croissante et si $u_0 > u_1$ alors $u_1 > u_2$, puis $u_2 > u_3$ ...

L'ordre des deux premiers termes est conservé...

Observer les deux graphiques suivants: f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$

suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$	suite (v_n) par $\begin{cases} v_0=5 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$





Si f est strictement décroissante et si $u_0 < u_1$ alors $u_1 > u_2$, puis $u_2 < u_3$ ...

La suite (u_n) n'est pas monotone (Voir le premier exemple du 1-1-1-3 suite (u_n))

Si f n'est pas monotone, le comportement peut être très chaotique.

I-4- Majorant, minorant. suite bornée

* Une suite (u_n) est **majorée** par un réel M si pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.

** Une suite (u_n) est **minorée** par un réel m si pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.

*** Une suite (u_n) est **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée.

Remarque: Si une suite est majorée par un réel M tout réel supérieur à M est un majorant.

Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(n) + 1$ est majorée par 2. Mais dire qu'elle est majorée par 10^9 est vrai.

II- Limites

Ce paragraphe peut être l'occasion de réviser et de comprendre les limites de fonctions...

II-1- Suite convergente, suite divergente

II-1-1- Suite convergente

Définition:

La suite (u_n) converge vers le réel L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

ou encore

(u_n) converge vers le réel L si pour tout intervalle ouvert I contenant L, il existe un entier N tel que $n \geqslant N$ implique $u_n \in I$

On écrit: $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$ ou bien $\lim u_n = L$ puisque nécessairement n tend vers $+\infty$.

II-1-2- Suite divergente

Définition:

Une suite (u_n) est divergente si elle n'est pas convergente

Il y a donc deux cas pour ***la négation de la définition***

Soit la suite diverge vers l'infini $(\pm\infty)$

Soit la suite n'a aucune limite ni finie, ni infinie.

II-2- Propriétés

II-2-1- Limites et opérations

Les théorèmes concernant la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions numériques s'appliquent aux suites.

Rappel: Il n'y a pas de théorèmes sur les opérations de limites, mais, des théorèmes sur les opérations de fonctions et leurs limites.

La phrase: "Faire la somme des limites" n'a pas de sens a priori. En revanche, l'étude de "la limite de la somme de deux suites" a du sens et quand les théorèmes le permettent, il arrive que la conclusion est "la somme de limites"

II-2-2- Théorèmes de comparaison

II-2-2-1- Théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite L alors (v_n) converge vers L.

Preuve:

Soit un intervalle I contenant L.

On sait:

(u_n) converge vers L, donc, il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0$ implique $u_n \in I$ (i)

(w_n) converge vers L, donc, il existe n_1 tel que $n \geqslant n_1$ implique $w_n \in I$ (ii)

à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ donc, il existe n_2 tel que $n \geqslant n_2$ implique $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ (iii)

Soit $N = \max\{n_0; n_1, n_2\}$

Si $n \geqslant N$ alors (i), (ii), (iii) sont vérifiées et par conséquent $v_n \in I$.

On a montré: Pour tout I intervalle ouvert contenant L, il existe un entier N tel que $n \geqslant N$ implique $v_n \in I$.

Ce qui prouve que (v_n) converge vers L.

II-2-2-2- Théorème de comparaison

* Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) diverge vers $+\infty$.

** Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$ et si (u_n) diverge vers $-\infty$ alors (v_n) diverge vers $-\infty$.

Preuve:

Soit un intervalle $I =]A; +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

On sait:

(u_n) diverge vers $+\infty$, donc, il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0$ implique $u_n \in I$ (i) (ou : $u_n \geqslant A$)

à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$, donc, il existe n_1 tel que $n \geqslant n_1$ implique $u_n \leqslant v_n$ (ii)

Soit $N = \max\{n_0; n_1\}$

Si $n \geqslant N$ alors (i), (ii) sont vérifiées et par conséquent $v_n \in I$.

II-2-3- Image d'une suite par une fonction (cf. fonction composée)

On considère une suite (u_n) et une fonction numérique f telles que la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ est définie.

* Si (u_n) converge vers L et si f est **continue** en L alors (v_n) converge vers $f(L)$.

** Si (u_n) converge vers L et si $\lim\limits_{x \to L} f(x) = +\infty$ alors (v_n) diverge vers $+\infty$.

*** Si (u_n) diverge vers $+\infty$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ alors (v_n) converge vers L.

Des exemples:

* $v_n = \sqrt{\dfrac{5+8n}{1+2n}}$. La suite (u_n) est définie par: $u_n = \dfrac{5+8n}{1+2n}$ et $f = \sqrt{\ }$.

La suite (u_n) converge vers 4 car, pour $n > 0$, $\dfrac{5+8n}{1+2n} = \dfrac{\frac{5}{n}+8}{\frac{1}{n}+2}$ et f est continue en 4. Comme $\sqrt{4} = 2$, on a:

(v_n) converge vers 2.

** $w_n = \ln\left(\dfrac{2n+1}{n^2+1}\right)$. La suite (u_n) est définie par: $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1}$ et $f = \ln$.

La suite (u_n) converge vers 0 et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, d'où, la suite (v_n) diverge vers $-\infty$.

*** $x_n = (1-2n)\ e^{1-2n}$. La suite (u_n) est définie par: $u_n = 1 - 2n$ et f est la fonction définie par $f(x) = x\ e^x$.

La suite (u_n) diverge vers $-\infty$ et, on sait: $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, donc, la suite (x_n) converge vers 0.

II-2-4- Convergence d'une suite monotone

Propriétés

* Une suite croissante et majorée est convergente.

** Une suite décroissante et minorée est convergente.

*** Une suite croissante et non majorée est divergente vers $+\infty$.

**** Une suite décroissante et non minorée est divergente vers $-\infty$.

Remarque:

Les deux premières propriétés permettent de dire l'existence d'une limite finie mais ne permettent pas de déterminer cette limite.

Un exemple illustrant ces propriétés et le point fixe.

On reprend la suite suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2} \end{cases}$ déjà illustrée au §I-3-2-4.

* Cette suite est croissante. (Preuve par récurrence)

En effet, $u_1 = \sqrt{2}$, donc $u_0 < u_1$ (Initialisation)

Supposons **un** entier n tel que $u_n < u_{n+1}$ (Hypothèse de récurrence)

alors en ajoutant 2 et en prenant la $\sqrt{\ }$, il vient: $u_{n+1} < u_{n+2}$ (propriété au rang suivant).

On a montré: Si la proposition est vraie à un certain rang alors elle est vraie au rang suivant. (Hérédité)

Le principe de récurrence prouve que pour **tout** n, $u_n < u_{n+1}$ donc, la suite (u_n) est croissante.

* Cette suite est majorée. (Il suffit de trouver un réel M tel que pour tout n, $u_n < M$)

Là aussi, une preuve par récurrence est efficace.

Prenons $M = 10$ (tout réel supérieur ou égal à 2 convient ...)

Il est évident que $u_0 < 10$ (Initialisation)

Supposons **un** entier n tel que $u_n < 10$ (Hypothèse de récurrence)

alors en ajoutant 2 et en prenant la $\sqrt{\ }$, il vient: $u_{n+1} < \sqrt{12} < 10$ (propriété au rang suivant).

On a montré: Si la proposition est vrai à un certain rang alors elle est vraie au rang suivant. (Hérédité)

Le principe de récurrence prouve que pour **tout** n, $u_n < 10$ donc, la suite (u_n) est majorée.

* D'après la propriété "Une suite croissante et majorée est convergente" la suite (u_n) converge.

Par conséquent, il existe un réel L tel que (u_n) converge vers L.

Or, la suite $(v_n) = (u_{n+1}) = (f(u_n))$ converge aussi vers L, d'où, d'après la propriété: "Si (u_n) converge vers L et si f est **continue** en L alors (v_n) converge vers $f(L)$" le réel L est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Graphiquement, on obtient le point d'intersection de C_f et Δ d'équation $y = x$.

Résolution de $f(x) = x$.

$\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x+2>0 \\ x+2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-x-2=0 \ (\mathrm{i}) \end{cases}$ L'équation (i) a pour solution les réels 2 et –1.

$L = 2$.

III- Des suites particulières

III-1- Les suites arithmétiques:

III-1-1- Définition

Dans $\mathbb{R}$: r est un réel constant (indépendant de l'entier n), u_0 est un réel donné.
Pour tout entier n, on a: $u_{n+1} = u_n + r$ (définition par récurrence)
On a alors:
(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r équivaut à

$u_n = u_0 + nr$ (restriction de la fonction affine $f: x \mapsto rx + u_0$ à $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$)

Preuve:

Sens direct: $u_{n+1} - u_n = (u_0 + (n+1)r) - (u_0 + nr) = r$.

Sens réciproque: $\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$ En faisant la somme membre à membre des n lignes, il vient: $u_n = u_0 + nr$.

Dans $\mathbb{C}$: α est un complexe constant (indépendant de l'entier n), z_0 est un complexe donné.
Pour tout entier n, on a: $z_{n+1} = z_n + \alpha$
On a alors: $z_n = z_0 + n\alpha$

III-1-2- Somme de termes consécutifs *d'une suite arithmétique*:

$$S_n = \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$$

Preuve: On pose $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
$S = u_n + \dots + u_1 + u_0$
Or, $u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$
En ajoutant membre à membre, il vient donc: $2S = (u_0 + u_n) \times (n+1)$

III-2- Les suites géométriques:

III-2-1- Définition

Dans $\mathbb{R}$: q est un réel constant (indépendant de l'entier n), u_0 est un réel donné.
Pour tout entier n, on a: $u_{n+1} = u_n \times q$. (Définition par récurrence)

On a alors:

(u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q équivaut à
$u_n = u_0 \times q^n$ (restriction de la fonction exponentielle $f: x \mapsto u_0 \times q^x$ à $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$)

Preuve:

Sens direct: $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times q^n \times q = u_n \times q$.

Sens réciproque: $\begin{cases} u_1 = u_0 \times q \\ u_2 = u_1 \times q \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} \times q \end{cases}$ En faisant le produit membre à membre des n lignes, il vient: $u_n = u_0 \times q^n$

Dans $\mathbb{C}$: α est un complexe constant (indépendant de l'entier n), z_0 est un complexe donné.
Pour tout entier n, on a: $z_{n+1} = z_n \times \alpha$
On a alors: $z_n = z_0 \times \alpha^n$

III-2-2- convergence (suite réelle)

si $-1 < q < 1$ (ou $|q| < 1$) alors la suite (u_n) converge vers 0

III-2-3- Somme de termes consécutifs *d'une suite géométrique*:

$$S_n = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \quad q \neq 1$$

Preuve: On pose $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

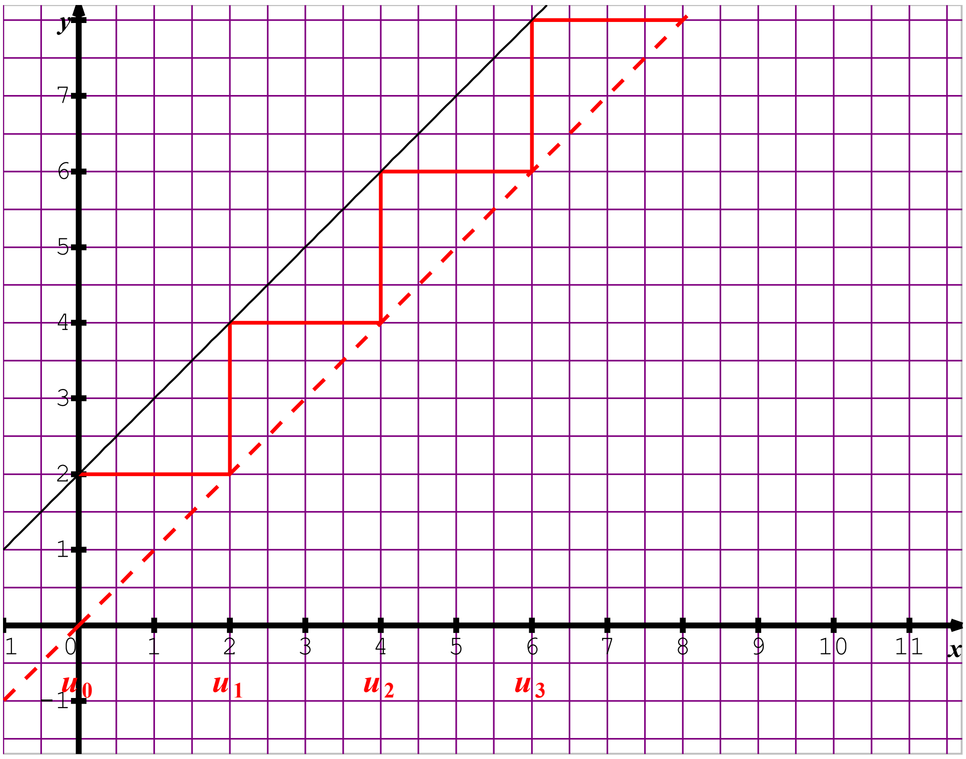
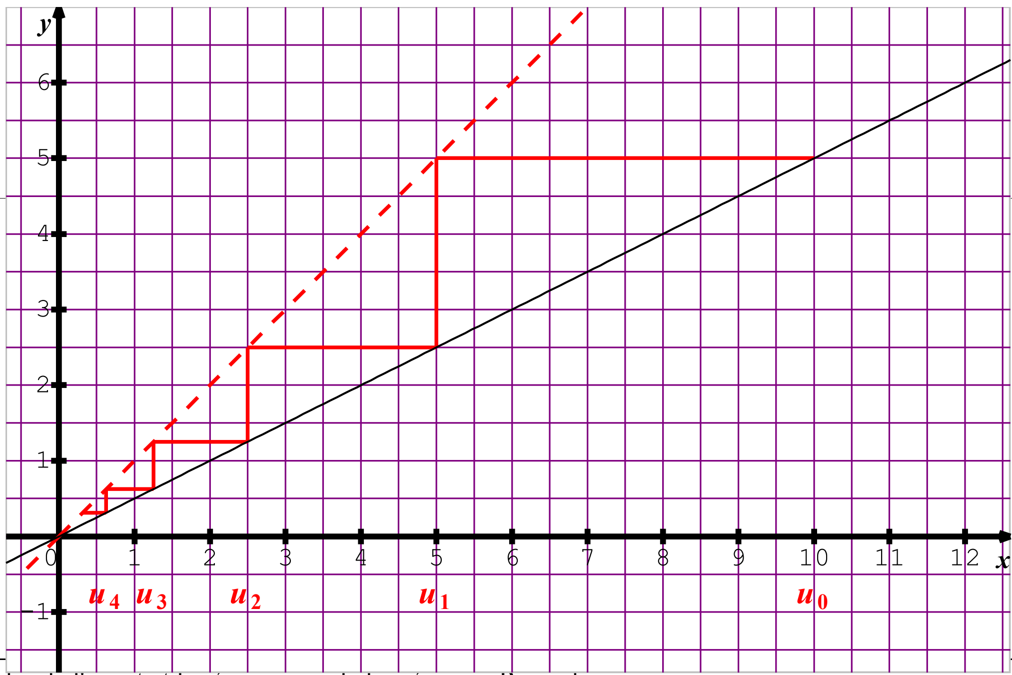
En calculant $qS = u_1 + ... + u_{n+1}$
Et en faisant $S - qS$, on trouve la relation

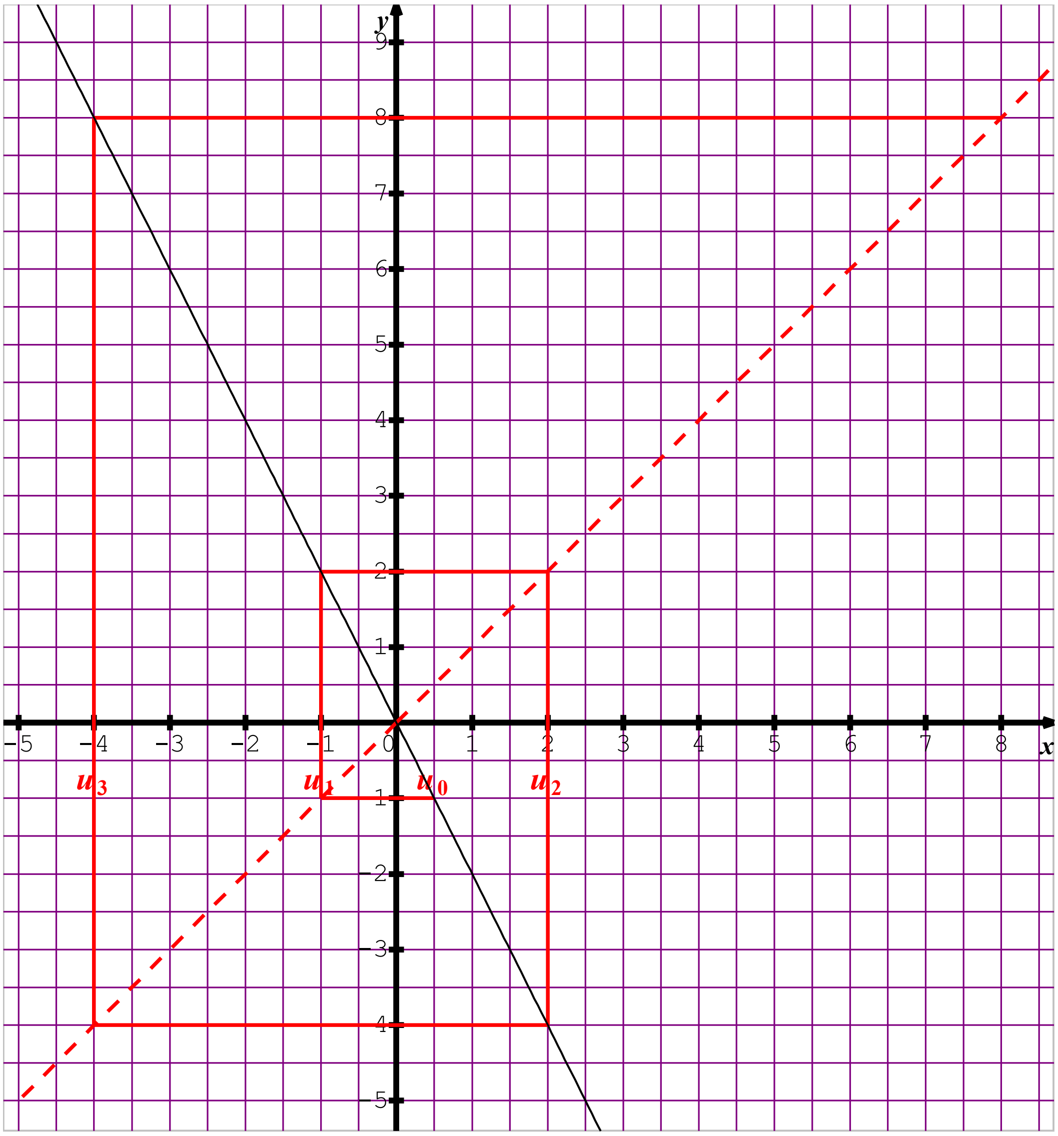
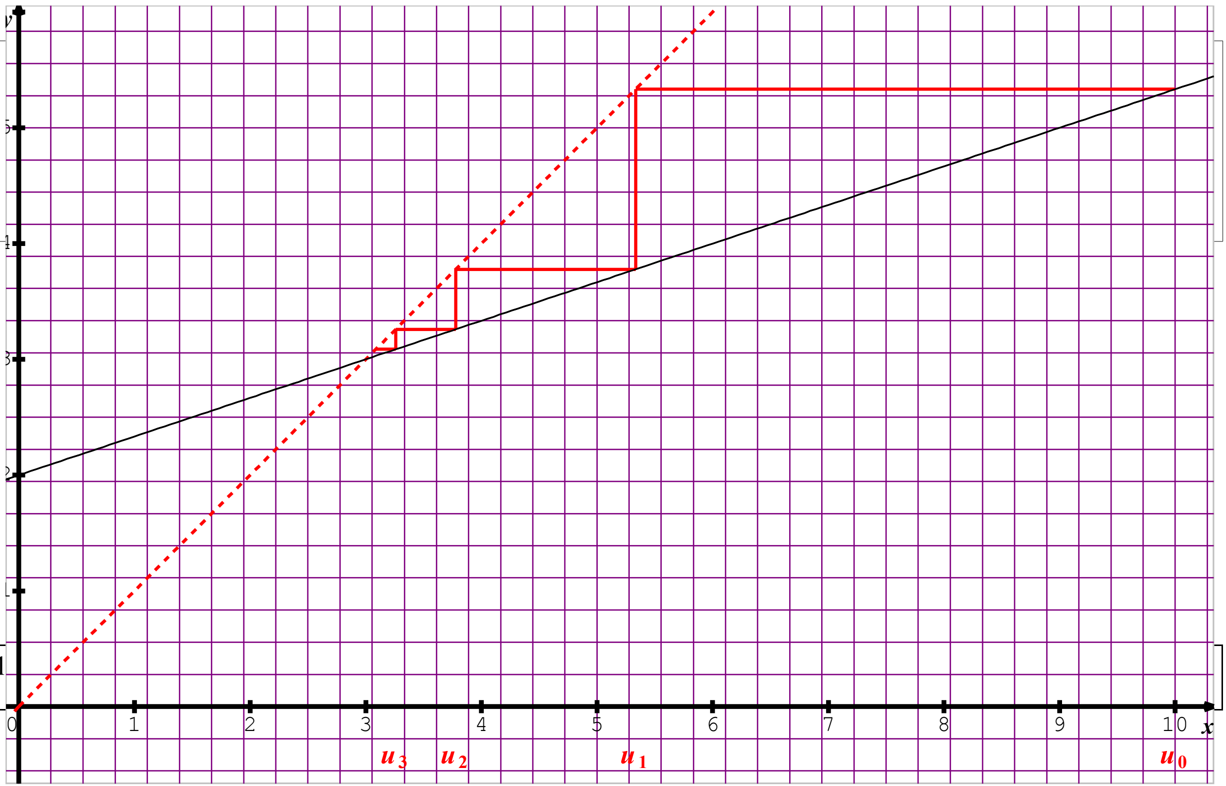
III-3- Les suites arithmético-géométriques

Ce sont les suites de la forme $u_{n+1} = a.u_n + b$
Ces suites sont l'objet de nombreux exercices mais il n'y a aucune théorie à connaître en terminale.
Se reporter aux exercices traités tout au long de l'année

Un résumé graphique

Dans ces trois cas, on a une fonction affine qui apparaît.
On pose $f(x) = ax + b$

$a = 1$ Suite arithmétique de raison b	 la suite des entiers pairs
$-1 < a < 1$ $b = 0$ Suite géométrique de raison a	

	Premier terme 10, raison: 0,5 la suite converge vers 0
$a < -1$ $b = 0$ Suite géométrique de raison a	 suite géométrique alternée divergente
$a = \frac{1}{3}$, $b = 2$ Suite aritmético-géométrique	

Les méthodes sont l

	La suite converge vers le point fixe solution de l'équation $\frac{1}{3}x+2=x$.

N'hésitez pas à construire d'autres exemples ...

IV- Suites adjacentes

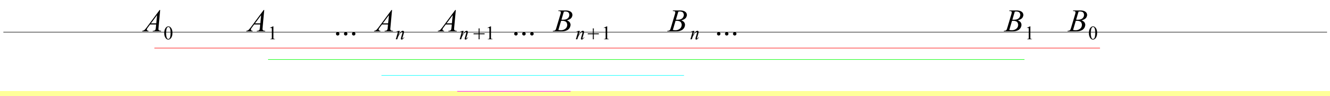
IV-1- Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si

- l'une est croissante
- l'autre décroissante
- $\lim(u_n - v_n) = 0$

IV-2- Illustration

Lorsqu'on représente ces suites sur un axe, on obtient des segments [$A_n B_n$] emboîtés de longueur l_n tendant vers 0.



IV-3- Propriété

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes et convergent vers la même limite.

Preuve:

Supposons (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

* Montrons que pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$.

Posons $w_n = v_n - u_n$

On a: $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$.

Comme (v_n) est décroissante, on a: $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$, et, comme (u_n) est croissante, on a: $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

par conséquent: $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$.

La suite (w_n) est décroissante.

Or, elle converge vers 0, donc, $w_n \geqslant 0$.

Finalement: $v_n - u_n \geqslant 0$.

** Montrons que chacune des suites est convergente.

Comme (v_n) est décroissante, on a: $v_n \leqslant v_0$.

Comme $u_n \leqslant v_n$, on a: $u_n \leqslant v_0$.

La suite (u_n) est donc une suite croissante majorée par v_0.

Or, toute suite croissante et majorée est convergente, donc, (u_n) converge vers un réel L.

De même, on a: $u_0 \leqslant u_n$ et $u_n \leqslant v_n$.

La suite (v_n) est donc une suite décroissante, minorée par u_0, elle est donc convergente vers un réel L'.

*** Montrons que $L = L'$

Comme (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers L et L' alors leur différence $(u_n - (v_n)$ converge vers $L - L'$;
Or, $\lim (u_n - v_n) = 0$, d'où, $L - L' = 0$