Index

I- Qu'est-ce qu'une suite?

I-1- Numéroter, indice

Exemples:

1) On lance le dé indéfiniment, on relève le nombre sorti à chaque lancer dans l'ordre des lancers:

(2; 5; 5; 1; 3; 6; 4; 5; 1; 2; 6; 4; 1; 1; 2; 3; ....)

2) On prend la liste des élèves de 1ES/L dans l'ordre alphabétique

3) On prend la n-ième décimale du nombre π.

I-1-1- Vocabulaire- Définitions

Soit une **liste ordonnée** de nombres, d'objets, ...

On a alors un premier élément de la liste, puis un deuxième, puis un troisième, ...

On peut les noter successivement u_1, u_2, u_3, ... et on lit: u **indice** 1, u indice 2, u indice 3, ...

Dans l'exemple 1, on peut écrire: $u_1 = 2$; $u_2 = 5$, $u_3 = 5$, ...

Dans l'exemple 3, on peut écrire $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 1$, ...

On crée ainsi une fonction u où l'ensemble de départ est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et l'ensemble d'arrivée est la liste ordonnée. À un entier naturel (numéro), on associe l'élément de la liste ayant le "numéro", l'indice correspondant.

Lorsque l'ensemble d'arrivée est une liste de nombre réels, on dit que la suite est une **suite numérique réelle.**

u: $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$, à l'entier n, on associe un réel $u(n) = u_n$

u_n est appelé le **terme général** de la suite (u_n)
Attention à la signification des notations:
Les parenthèses ( ) sont là pour indiquer qu'on considère la liste ordonnée entière et pas seulement l'un des éléments.
Dans l'exemple 2, la notation u_n désigne le n-ième élève dans la liste de 1ES/L
(u_n) désigne la classe de 1ES/L

I-1-2- Manipuler les indices

On commence l'indexation à 0 dans beaucoup de cas.

Par exemple, le capital déposé au départ sera noté C_0 et le capital l'année suivante C_1 .

La population l'année de référence (année 0) sera notée P_0 et la population à l'année n (c-à-d: $0 + n$) sera notée P_n .

L'année 2000, la population P_0 d'une ville en expansion était de 1 500 habitants.

Chaque année, la population augmente de 100 habitants.

On note P_n la population en l'année $2000 + n$.

Calculer P_1 , P_2 , ...,

Exprimer P_n , P_{n+1} , P_{n+10} , P_{2n} en fonction de n.

Exprimer $P_n + 10$, $2\times P_n$ en fonction de n.

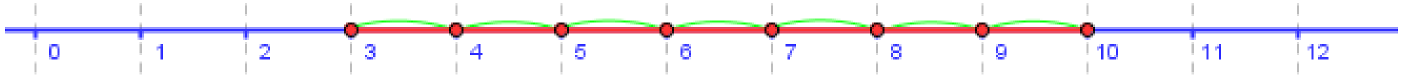
I-1-3- Compter le nombre de termes, compter le nombre d'étapes, piquets et intervalles

Exemple:

Placer les entiers 3 et 10 sur un axe.

En comptant 3 et 10, combien y a-t-il d'entiers de 3 à 10 (Notez bien que 3 et 10 sont inclus)?

Combien y a-t-il d'intervalles de bornes entières entre 3 et 10?



Cas général de *p* à *n*.

Soit deux entiers p et n tels que $p < n$.

De p à n inclus, on compte $n - p + 1$ entiers et $n - p$ intervalles.

Dans une suite (u_n), il y a $n - p + 1$ de u_p à u_n inclus

mais, il y a $n - p$ étapes

I-2-Créer ou générer une suite.

I-2-1- Suite explicite (en fonction de *n*)

Lorsque le terme général u_n de la suite (u_n) est exprimé en fonction de n et indépendamment des autres termes de la suite, on dit que la suite (u_n) est définie de manière explicite.

On peut écrire $u_n = f(n)$ où f désigne une fonction.

Exemple:

Soit (u_n) définie par le terme général $u_n = -n^2 + 2n + 1$.

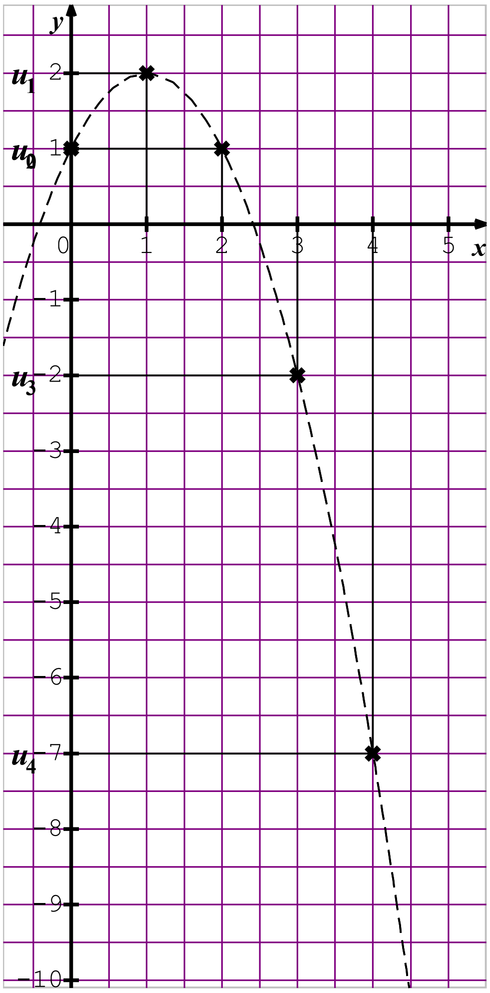
Calculer u_0, u_1, u_2

Exprimer u_{n+1}, u_{2n} en fonction de n.

Exprimer $u_n + 1$, $2u_n$ en fonction de n.

Représenter une suite explicite

Pour représenter une suite définie de façon explicite, on représente dans un repère du plan l'ensemble des points M de coordonnées (n, u_n) où $n \in \mathbb{N}$.



La suite (u_n) définie par le terme général $u_n = -n^2 + 2n + 1$ est représentée par

Il est parfois intéressant de ne considérer que les images représentées sur un axe (vertical ou horizontal).

I-2-2- Suite définie par récurrence

Lorsqu'une suite est définie par la donnée de ses premiers termes et par la relation exprimant un terme en fonction de termes qui le précèdent, on dit que la suite est définie par récurrence.

Exemples:

1) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1 \end{cases}$

$u_0 = 3$ (donnée du premier terme)

Dans l'égalité, en faisant $n = 0$, on a: $u_1 = -u_0^2 + 2u_0 + 1 = -9 + 2\times 3 + 1 = -2$,

puis en faisant $n = 1$, on a: $u_2 = -u_1^2 + 2u_1 + 1 = -4 + 2\times(-2) + 1 = -7$

puis en faisant $n = 2$, on a: $u_3 = -u_2^2 + 2u_2 + 1 = -49 + 2\times(-7) + 1 = -62$

2) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1 \end{cases}$

$u_0 = 0$ (donnée du premier terme)
Dans l'égalité, en faisant $n = 0$, on a: $u_1 = -\ u_0^2\ + 2u_0 + 1 = 1$,
puis en faisant $n = 1$, on a: $u_2 = -\ u_1^2\ + 2u_1 + 1 = -1 + 2\times1 + 1 = 2$
puis en faisant $n = 2$, on a: $u_3 = -\ u_2^2\ + 2u_2 + 1 = -4 + 2\times2 + 1 = 1$

3) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=1,\ u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \end{cases}$

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + 1 = 2$, $u_3 = 2 + 1 = 3$, $u_4 = 3 + 2 = 5$, $u_5 = 5 + 3 = 8$, $u_6 = 13$, $u_7 = 21$, $u_8 = 34$ ...

I-3- Variations d'une suite

I-3-1- Rappel et remarque concernant la variation de fonctions

Comme pour les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, on cherche à comparer les images connaissant l'ordre des antécédents.

Fonction croissante

On dit que f est une fonction strictement croissante sur I lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour **tout** a et **tout** b de I, $a < b$ implique $f(a) < f(b)$

Fonction décroissante

On dit que f est une fonction strictement décroissante sur I lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour **tout** a et **tout** b de I, $a < b$ implique $f(a) > f(b)$.

L'idée est la même pour les suites, mais, comme la structure des entiers naturels permet de passer de 1 en 1 d'un entier à son successeur, il suffit de comparer pour **tout** entier n, u_n et u_{n+1}

I-3-2- Définition d'une suite croissante

On dit que (u_n) est une suite croissante lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $u_n \leqslant u_{n+1}$

Ainsi, on a: $u_0 \leqslant u_1$, puis, $u_1 \leqslant u_2$, puis, $u_2 \leqslant u_3$, ...

soit: $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$

I-3-3- Définition d'une suite décroissante

On dit que (u_n) est une suite décroissante lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $u_n \geqslant u_{n+1}$

Ainsi, on a: $u_0 \geqslant u_1$, puis, $u_1 \geqslant u_2$, puis, $u_2 \geqslant u_3$, ...

soit: $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots$

I-3-4- Comment étudier la variation d'une suite

Lorsque l'ordre de u_n et u_{n+1} n'est pas immédiat, il suffit d'étudier, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors $u_n \leqslant u_{n+1}$ et par conséquent la suite (u_n) est croissante.

Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors $u_n \leqslant u_{n+1}$ et par conséquent la suite (u_n) est décroissante.

Exemples

1) On considère la suite définie sur ℕ par $u_n = 2^n - 5$.

On pose la différence $u_{n+1} - u_n$.

Or, $u_{n+1} = 2^{n+1} - 5 = 2\times 2^n - 5$.

$u_{n+1} - u_n = 2\times 2^n - 5 - (2^n - 5) = 2\times 2^n - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$ qui est un nombre strictement positif.

Conclusion: (u_n) est une suite croissante

2) On considère la suite définie sur ℕ par $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 25$

On pose la différence $u_{n+1} - u_n$.

Or, $u_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 25 = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 25$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 25 - (\left(\frac{1}{3}\right)^n + 25) = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n(\frac{1}{3} - 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n\times\left(-\frac{2}{3}\right)$ qui est un nombre strictement négatif.

Conclusion: (u_n) est une suite décroissante

II- Des suites particulières

Comme pour les fonctions, on peut définir des suites ou des familles de suites de référence

Dans le programme du lycée, il existe deux familles de suites liées à des opérations usuelles, l'addition et la multiplication.

Lorsqu'on crée une suite "étape" par "étape", c'est-à-dire: le passage d'un terme de la suite à son successeur, les opérations les plus simples consistent à "ajouter le même nombre réel" et "multiplier par le même nombre réel".

Chacune de ces opérations amène à caractériser une famille de suites.

Remarques: "retrancher le réel a" signifie "ajouter l'opposé $-a$"

"diviser par le réel a" signifie "multiplier par l'inverse $\frac{1}{a}$"

II-1- Suites arithmétiques

II-1-1-Exemples

II-1-1-1-Compter de un en un à partir de

Compter de 1 en 1 à partir de 5. On crée ainsi une suite (u_n).

Écrire les premiers termes de la suite.
On note $u_0 = 5$

On note u_n le terme général.

Écrire u_{n+1} en fonction de u_n.

Écrire u_n en fonction de n.

II-1-1-2- La suite des nombres pairs

Écrire la suite des entiers naturels pairs
On note (v_n) cette suite.
Écrire v_{n+1} en fonction de v_n.
Écrire v_n en fonction de n.

II-1-1-3- La suite des nombres impairs

Écrire la suite des entiers naturels impairs
On note (w_n) cette suite.
Écrire w_{n+1} en fonction de w_n.
Écrire w_n en fonction de n.

II-1-1-4- Compter de –5 en –5

Compter de –5 en –5 à partir de 32. On crée ainsi une suite (x_n).

Écrire les premiers termes de la suite.
On note $x_0 = 32$

Écrire x_{n+1} en fonction de x_n.
Écrire x_n en fonction de n.

II-1-1-5- Intérêts simples

Une personne place un capital de 20 000 € à intérêts simples (les intérêts ne sont pas capitalisés) au taux annuel de 6%.

De quelle somme (capital + intérêts) dispose-t-elle au bout d'un an, de deux ans, de trois ans, de n années?

II-1-2- Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Dire que la suite (u_n) est une **suite arithmétique** signifie qu'il existe un réel r tel que,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

r est appelé **raison** de la suite arithmétique.

Autrement dit: on passe d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre.

Reprendre le §II-1-1- en précisant à chaque fois la raison.

Conséquence: Pour démontrer qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique, on pose pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$, et, on montre que cette différence est une constante (indépendante de n)

II-1-3- Formules et théorèmes

Théorèmes:

1) Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 + n \times r$.

2) Réciproquement

Si (u_n) est une suite qui s'écrit sous la forme $u_n = a + b \times n$ alors cette suite est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

3) Une suite (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine

4) Si la raison est positive la suite arithmétique (u_n) est croissante,

si la raison est négative, la suite (u_n) est décroissante.

5) Si u_k et u_p sont deux termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r, on a: $u_p = u_k + (p - k)r$.

Preuves:

1) On a le premier terme u_0, $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2\times r$,

si on a a une étape $u_n = u_0 + n\times r$ alors le terme suivant est: $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + n\times r + r = u_n + (n + 1)r$, ...

2) On sait: $u_n = a + b\times n$

On a donc: $u_{n+1} = a + b\times(n + 1)$, d'où, $u_{n+1} - u_n = a + b\times(n + 1) - (a + b\times n) = ... = b$ ce qui prouve que (u_n) est une suite arithmétique de raison b.

Lorsque $n = 0$, il vient $u_0 = 0$

3) La fonction f: $x \mapsto a + bx$ est une fonction affine.

4) Évident d'après 2) et 3)

5) Voir le §I-1-3 piquets et intervalles.

De k à p, on a ajouté $(p - k)$ fois la raison (nombre d'étapes)

II-1-4- Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Formule

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à

$$S = \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$$

Une preuve:

Posons a le premier terme, le terme suivant est $a + r$, puis, $a + 2r$, ...

Posons b le dernier terme, le terme précédent est $b - r$, puis, $b - 2r$, ...

On cherche la somme $S = a + ... + b$ où les termes sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r.

On a donc: $S = a + (a + r) + (a + 2r) + ... + (a + nr)$ Le nombre de termes est alors $n + 1$

On peut aussi écrire: $S = b + ... + a$ en commutant les termes

On a alors: $S = b + (b - r) + (b - 2r) + ... + (b - nr)$

En faisant la somme termes à termes des deux lignes, on obtient:

$2S = (a + b) + (a + b) + ... + (a + b)$ Le nombre de termes est $n + 1$

Ce qui prouve la formule.

Exemples:

* La somme des 50 premiers entiers naturels est égale à $\frac{1+50}{2} \times 50 = 1\,275$

** La somme des 50 premiers entiers pairs est égale à:

le premier entier pair est 0, le 50ième entier pair est: 98 (de 0 à 49 inclus, on a 50 termes)

la somme vaut: $\frac{0+98}{2}\times 50 = 2\,450$

*** Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 25 - 3n$.

Calculer la somme S = $u_{10} + u_{11} + ... + u_{36}$

D'après le théorème précédent u_n est une suite arithmétique de raison –3.

On a donc: S = $\frac{u_{10}+u_{36}}{2} \times(36 - 10 + 1) = \frac{25-30+25-3\times 36}{2} \times 27 = -1\,188$

II-2- Suites géométriques

II-2-1- Exemples

II-2-1-1- Doubler tous les jours....

Un nénuphar double de surface chaque jour.

Le trentième jour du mois, il couvre la moitié du lac.

Quel jour couvrira-t-il le lac?

Si le premier jour, le nénuphar faisait 1 m², quelle est la surface du lac?

II-2-1-2- Prendre la moitié du reste ...

Lors de la désintégration nucléaire, un corps radioactif perd la moitié de son activité radioactive lors d'une période T appelée demi-vie de l'atome.

La demie-vie du plutonium 239 est de 25 000 ans.

On suppose qu'on possède 100 grammes de plutonium239.

Dans combien de temps possèdera t-on moins de 10 grammes de plutonium 239?

II-2-1-3- Intérêts composés

Une personne place un capital de 20 000 € à intérêts composés (les intérêts sont capitalisés) au taux annuel de 6%.

De quelle somme (capital + intérêts) dispose-t-elle au bout d'un an, de deux ans, de trois ans, de n années?

II-2-1-4 Puissances

Écrire sous forme de puissances:

$2^2 \times 2^3$; $\frac{2^{10}}{2^4}$; $(2^8)^3$; $3^5 \times 3$

Calculer 5^0 ; 100^0 ; ...

Factoriser le "plus grand" facteur commun: $7^9 - 7^3$; $7^{10} - 7^2$; $b^{n+1} - b^n$

Écrire les règles sur les puissances...

II-2-2- Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Dire que la suite (u_n) est une **suite géométrique** signifie qu'il existe un réel q tel que,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

q est appelé **raison** de la suite géométrique.

Autrement dit: on passe d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre.

Reprendre le §II-2-1- en précisant à chaque fois la raison.

Conséquence: Pour démontrer qu'une suite (u_n) est une suite géométrique, on pose pour tout entier n, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et, on montre que ce quotient est une constante (indépendante de n)

II-2-3- Formules et théorèmes

Théorèmes

1) Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 \times q^n$

2) Réciproquement

Si (u_n) est une suite qui s'écrit sous la forme $u_n = a \times b^n$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) alors cette suite est une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

3) Soit $(u_n) = (q^n)$ une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q > 0}$

* La suite (q^n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$

** La suite (q^n) est strictement décroissante si et seulement si $0 < q < 1$

*** La suite (q^n) est constante si et seulement si $q = 1$

4) Si u_k et u_p sont deux termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q, on a: $u_p = u_k \times q^{p-k}$

Preuves

1) On a le premier terme u_0, $u_1 = u_0 \times q$, $u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q^2$

si on a a une étape $u_n = u_0 \times q^n$ alors le terme suivant est: $u_{n+1} = u_n \times q = u_0 \times q^n \times q = u_n \times q^{n+1}$, ...

2) On sait: $u_n = a \times b^n$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$)

On a donc: $u_{n+1} = a \times b^{n+1}$, d'où, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a \times b^{n+1}}{a \times b^n} = ... = b$ ce qui prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison b.

Lorsque $n = 0$, il vient $u_0 = a$

3) On étudie le signe de $q^{n+1} - q^n$

$q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$

Comme $q > 0$, on cherche le signe de $q - 1$.

D'où, les trois cas:

* $q - 1 > 0$, soit $q > 1$

** $q - 1 < 0$, soit $0 < q < 1$

$q - 1 = 0$, soit $q = 1$

4) Voir le §I-1-3 piquets et intervalles.

De k à p, on a multiplié par $(p - k)$ fois la raison (nombre d'étapes)

II-2-4- Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Formule

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) est égale à

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Preuve

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

On cherche la somme $S = a + aq + aq^2 + ... + aq^n$ Le nombre de termes est alors $n + 1$

En factorisant a, on a: $S = a(1 + q + q^2 + ... + q^n)$.

Il reste à évaluer: $S_1 = 1 + q + q^2 + ... + q^n$

En multipliant chaque terme par la raison q, il vient:

$$q\,S_1 = q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$$

En soustrayant terme à terme les deux lignes précédentes:

$S_1 - q\,S_1 = 1 - q^{n+1}$

En factorisant S_1, on obtient: $(1 - q)\,S_1 = 1 - q^{n+1}$

Lorsque $q \neq 1$, on peut diviser par $1 - q$, ce qui prouve le résultat.

Exemples:

1) Calculer la somme

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 512 + 1024 + 2048 + 4096$

On reconnaît les puissances de 2.

$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{12}$

S est donc la somme de 13 termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2, on a donc:

$$S = \frac{1-2^{13}}{1-2} = 2^{13} - 1$$

2) On propose à un salarié les contrats suivants:

Contrat 1: la première année le salaire annuel est de 24 000 €

Chaque année son salaire est revalorisé d'un fixe valant 380 €

Contrat 2: la première année le salaire annuel est de 24 000 €

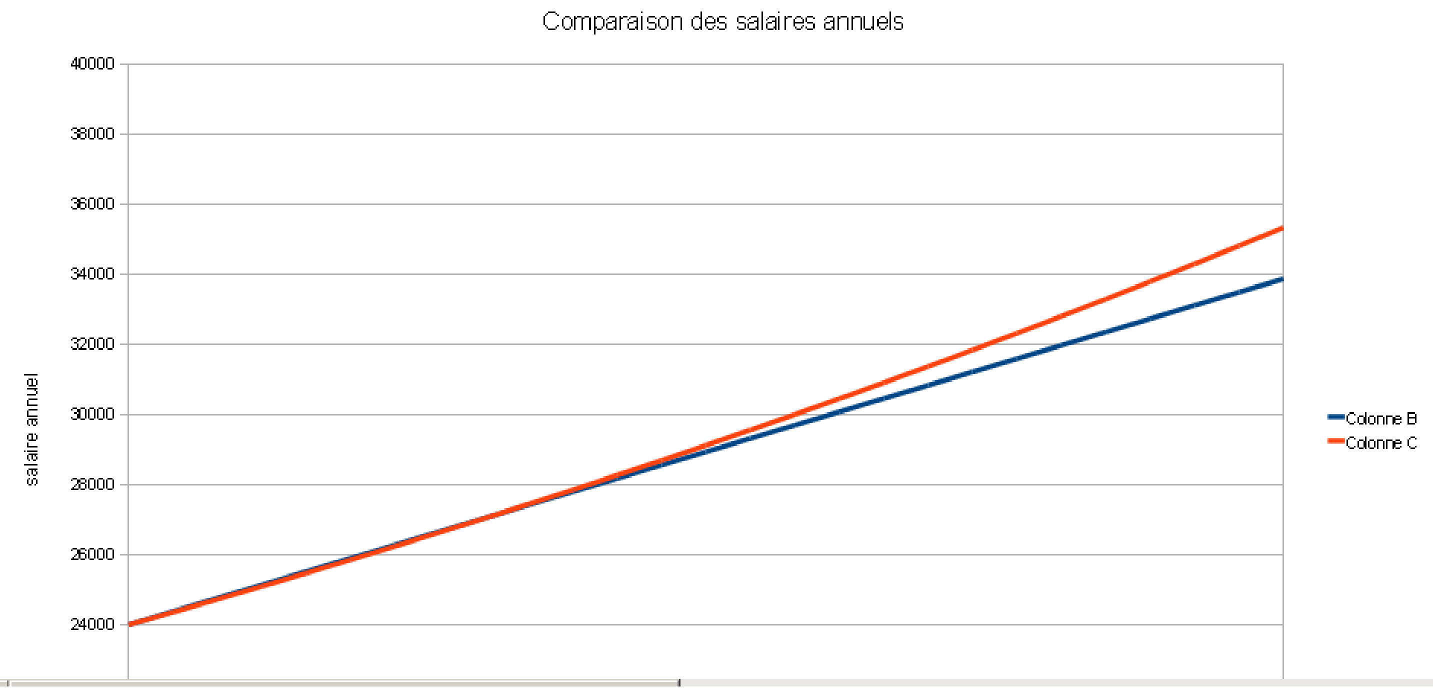
Chaque année son salaire est revalorisé de 1,5 %.

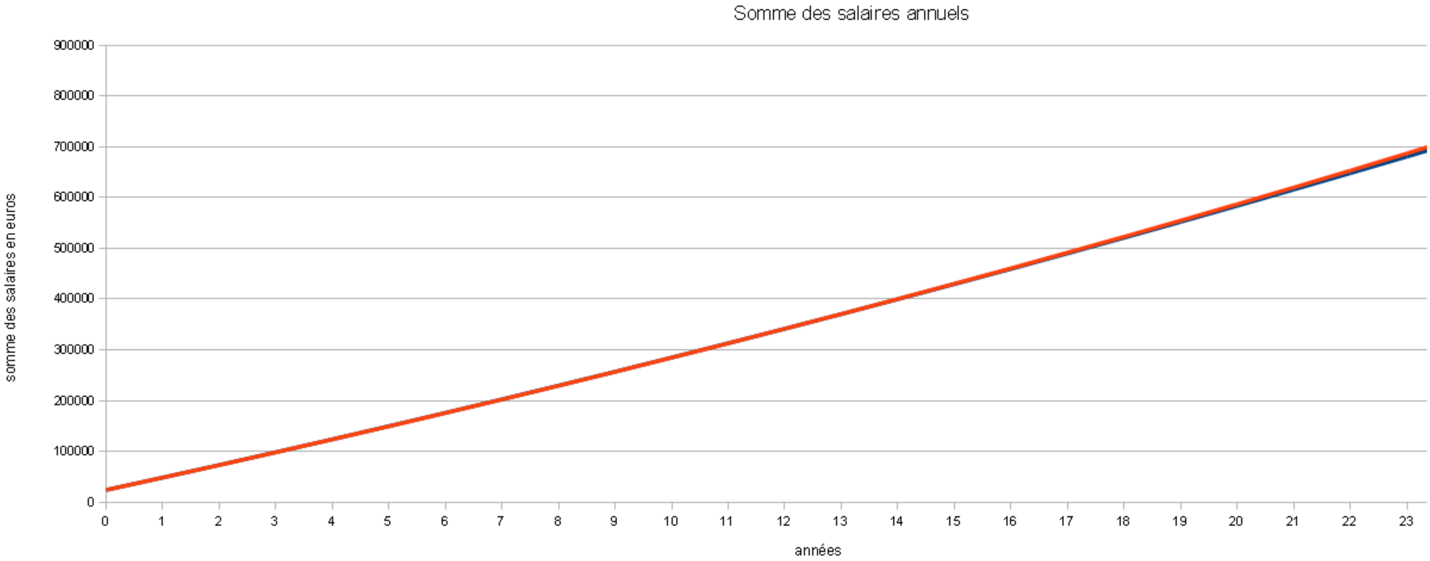
a) Comparer les salaires annuels au bout de 5 ans, au bout de 10 ans, au bout de 20 ans... de n ans

b) Comparer la somme totale des salaires au bout de 5 ans, au bout de 10 ans, au bout de 20 ans... de *n* ans.

Présenter les résultats sous forme de tableaux, sous forme de graphiques.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	année	Contrat1	contrat2	somme contrat1	Somme contrat2			Fixe=	380
2								Taux =	1,5
3	0	24000	24000	24000	24000				
4	1	24380	24360	48380	48360				
5	2	24760	24725,4	73140	73085,4				
6	3	25140	25096,28	98280	98181,68				
7	4	25520	25472,73	123800	123654,41				
8	5	25900	25854,82	149700	149509,22				
9	6	26280	26242,64	175980	175751,86				
10	7	26660	26636,28	202640	202388,14				
11	8	27040	27035,82	229680	229423,96				
12	9	27420	27441,36	257100	256865,32				
13	10	27800	27852,98	284900	284718,3				
14	11	28180	28270,77	313080	312989,07				
15	12	28560	28694,84	341640	341683,91				
16	13	28940	29125,26	370580	370809,17				
17	14	29320	29562,14	399900	400371,31				
18	15	29700	30005,57	429600	430376,88				
19	16	30080	30455,65	459680	460832,53				
20	17	30460	30912,49	490140	491745,02				
21	18	30840	31376,18	520980	523121,19				
22	19	31220	31846,82	552200	554968,01				
23	20	31600	32324,52	583800	587292,53				
24	21	31980	32809,39	615780	620101,92				
25	22	32360	33301,53	648140	653403,45				
26	23	32740	33801,05	680880	687204,5				
27	24	33120	34308,07	714000	721512,57				
28	25	33500	34822,69	747500	756335,26				
29	26	33880	35345,03	781380	791680,28				
30									




Somme des salaires annuels
somme des salaires en euros
900000
800000
700000
600000
500000
400000
300000
200000
100000
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
années