Systèmes linéaires

Index

I- Prérequis- Vocabulaire

I-1- Systèmes linéaires

I-1-1- Définition et écriture d'un système

On appelle système un ensemble de plusieurs propositions (équations, inéquations) devant être satisfaites simultanément. On écrit avec une **accolade** qui signifie "ET".

Dans les exemples suivants, x et y sont deux réels.

$\Sigma_1 \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+5=3-y \end{cases}$ est un système de deux équations. L'ensemble des solutions de ce système est l'ensemble des solutions **communes** à ces deux équations.

$\Sigma_2 \begin{cases} x\leqslant 1 \\ y\geqslant 0 \\ x+y\geqslant 4 \\ 2x\leqslant y-1 \end{cases}$ est un système de 4 inéquations. L'ensemble des solutions de ce système est l'ensemble des solutions **communes** à ces quatre inéquations.

La résolution de ces systèmes sera traitée dans les prochains paragraphes.

(Voir solutions dernière page)

I-1-2- Linéaires: de quoi s'agit-il?

On emploie le qualitatif "linéaire" pour des expressions algébriques lorsqu'on qu'on n'a ni produit, ni quotient entre les variables. (Rappel: une puissance est un produit.)

1) $2x^2 = x + 4$ n'est pas une équation linéaire. (Comment la résoudre?)

2) $\begin{cases} xy = x+1 \\ y^2 - \dfrac{y}{x} = 2 \end{cases}$ est un système d'équations non linéaires. (Comment le résoudre?)

3) $\sqrt{x+1} = x$ n'est pas une équation linéaire. (Comment la résoudre?)

Solutions du §I-1-2-

1) $2x^2 = x + 4$ est une équation du second degré.

$2x^2 = x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 4 = 0$. Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 33$ et l'ensemble des solutions

$$S_1 = \left\{\frac{1-\sqrt{33}}{4} ; \frac{1+\sqrt{33}}{4}\right\}$$

2) Pour $x \neq 0$, on peut remplacer la deuxième équation par $xy^2 - y = 2x$.

Comme $xy = x + 1$, on a: $(x + 1)y - y = 2x$. En développant: $xy + y - y = 2x$, puis, $x + 1 = 2x$.

On trouve alors $x = 1$ et $y = 2$.

On vérifie: $1 + 1 = 2$ et $2^2 - \dfrac{2}{1} = 4 - 2 = 2$ $\qquad S_2 = \{(1; 2)\}$

3) $\sqrt{x+1} = x$ n'est pas une équation linéaire.
Pour $x \geqslant -1$, on compare les carrés.
$x + 1 = x^2$ (second de gré). $\Delta = b^2 - 4ac = 5$ Une des solutions est strictement inférieure à -1, l'autre est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $S_3 = \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

I-2- Équations de droites

On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(x; y)$ est le couple de coordonnées d'un point de ce repère.

Voir aussi une illustration en partie de ce paragraphe

I-2-1- Équation réduite

Une fonction affine $x \mapsto mx + p$ est représentée dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par une droite d'équation $y = mx + p$.

Écrite sous cette forme, on dit qu'on a une équation réduite de la droite.

Droite parallèle à l'axe des abscisses

Une droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation réduite de la forme $y = p$. (Autrement dit: tous les points de cette droite ont une ordonnée égale à p)

Systèmes linéaires

Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas représentative d'une fonction. Son équation réduite est de la forme $x = k$. (Autrement dit: tous les points de cette droite ont une abscisse égale à k)

Droite non parallèle aux axes.

Les autres droites non parallèles aux axes ont une équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec $m \neq 0$.

I-2-2- Équation de la forme $ax + by + c = 0$

Dans tous les cas précédents, on peut écrire sous la forme: $ax + by + c = 0$ où l'un au moins des deux réels a et b est non nul.

$$\begin{cases} \text{Droite parallèle à l'axe des abscisses : } \ y-p=0\,(a=0, b=1, c=-p) \\ \text{Droite parallèle à l'axe des ordonnées : } \ x-k=0\,(a=1, b=0, c=-k) \\ \text{Droite non parallèle aux axes : } \ mx-y+p=0\,(a=m, b=-1, c=p) \end{cases}$$

Réciproquement:

Si un point $M(x; y)$ a ses coordonnées liées par l'égalité $ax + by + c = 0$ où l'un au moins des deux réels a et b est non nul,

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $y = -\dfrac{c}{b}$ (droite parallèle à l'axe des abscisses)

Si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors $x = -\dfrac{c}{a}$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées)

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ (droite non parallèle aux axes)

I-2-3- Construction d'une droite et vocabulaire.

Dans tous les cas, il suffit de déterminer deux points de la droite (c'est-à-dire de trouver deux couples de coordonnées vérifiant l'équation) pour construire la droite.

m est le coefficient directeur de la droite.

p est l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire: l'ordonnée du point lorsqu'on se place à l'origine des axes).

Exemple: Soit la droite Δ d'équation $2x - 3y + 4 = 0$

Choix de points: N'importe quelle valeur de x ou de y peut convenir en théorie. En pratique, on cherche des valeurs qui permettent des calculs simples.

On peut faire: $x = 1$, on aura donc $2 - 3y + 4 = 0$, ce qui mène à $y = 2$. $A(1; 2)$ est un point de Δ.

$x = -2$, on aura donc $2\times(-2) - 3y + 4 = 0$, ce qui mène à $y = 0$. $B(-2; 0)$ est un point de Δ.

On place A et B et on trace la droite $(AB) = \Delta$.

I-3- Position relative de deux droites dans le plan

Dans ce §, Δ_1 et Δ_2 sont deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$

Dans un plan, deux droites peuvent être soit parallèles, soit sécantes.

Définitions: 1) Deux droites sont ***sécantes*** si et seulement si elles ont un et un seul point commun.

2) Dans le plan, des droites non sécantes sont parallèles.

Systèmes linéaires

La négation de non sécantes mène à deux cas:

- soit les droites n'ont aucun point commun: elles sont strictement parallèles
- soit les droites ont plus d'un point commun, elles sont confondues.

I-3-1- Droites parallèles

Propriété: 1) Deux droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur

2) Deux droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles si et seulement si $a\,b' - a'b = 0$ (ou $ab' = a'b$)

Preuve: On se place dans le cas où $b \neq 0$ et $b' \neq 0$ (la démonstration avec $a \neq 0$) est analogue)

D'après le $I-2-2, le coefficient directeur m_1 de Δ_1 est $-\dfrac{a}{b}$ et celui m_2 de Δ_2 est $-\dfrac{a'}{b'}$.

On a donc: Δ_1 et Δ_2 sont parallèles si et seulement si $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$ (proportionnalité)

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b$ *(cf: proportionnalité)*

I-3-2- Droites sécantes

Il en résulte:

Deux droites Δ_1 et Δ_2 sont sécantes si et seulement si $a\,b' - a'b \neq 0$ (ou $ab' \neq a'b$)

I-4- Régionnement du plan

Il est évident qu'une droite Δ divise un plan en deux demi-plans.

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on trace la droite Δ d'équation $y = mx + p$.

Un des demi-plans P_1 est au-dessus de la droite, l'autre P_2 est en-dessous.

Un point de P_1 d'abscisse x et d'ordonnée y a donc son ordonnées supérieure à celle du point de Δ d'abscisse x. Or, l'ordonnée du point de Δ est $mx + p$.

Les points de P_1 sont les points $M(x; y)$ tels que $y \geqslant mx + p$. (ou encore: $mx - y + p \leqslant 0$)

La même démarche mène à :

Les points de P_2 sont les points $M(x; y)$ tels que $y \leqslant mx + p$. (ou encore: $mx - y + p \geqslant 0$)

Lorsque une équation de Δ est de la forme $ax + by + c = 0$,

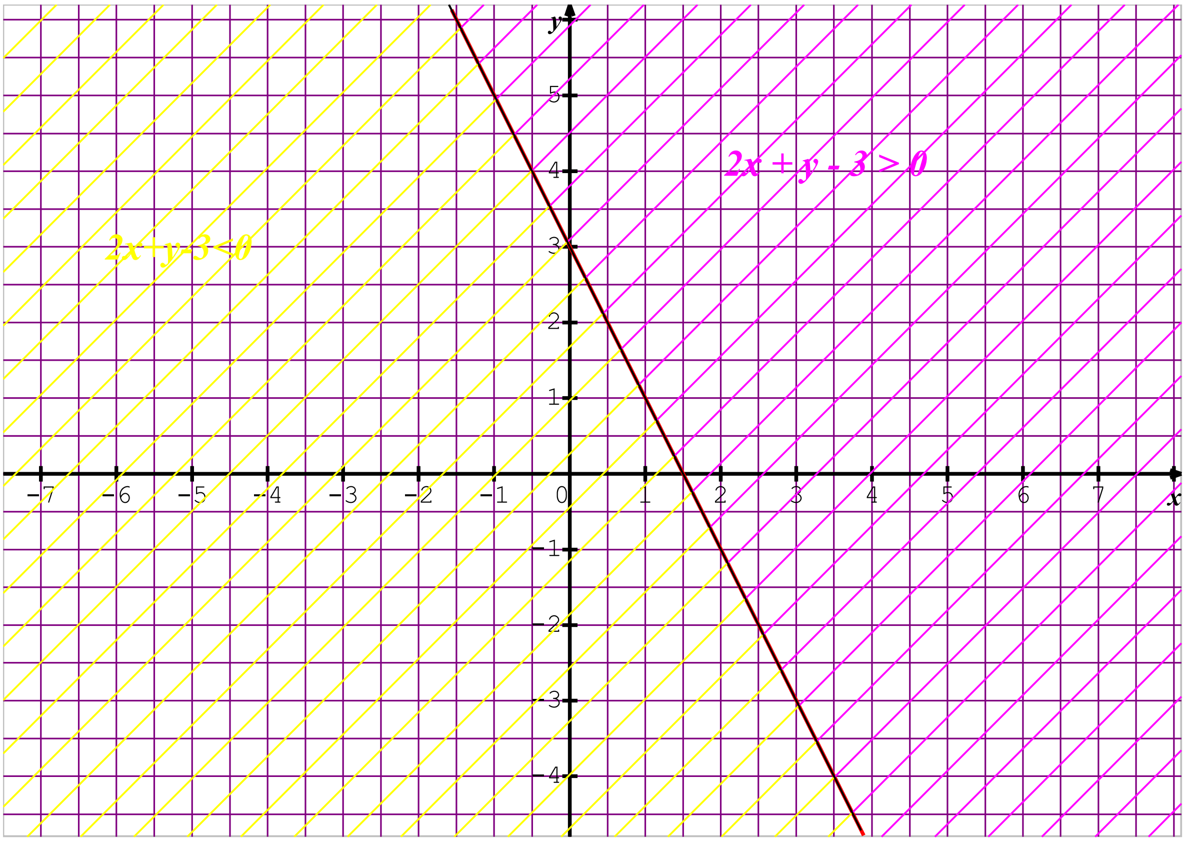
il découle de ce qui précède que l'expression $ax + by + c$ garde le même signe pour tous les points d'un demi-plan.

Il suffit donc de connaître le signe de l'expression pour un point hors de la droite.

Sur le graphique ci-dessous, la droite a pour équation $2x + y - 3 = 0$ (ou $y = -2x + 3$)

Le point $O(0;0)$ est tel que l'expression $2\times0 + 0 - 3$ est strictement négative.

D'où la caractérisation de chaque demi-plan.



II- Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Propriété: Soit l'équation $ax + by + c = 0$ d'inconnues x et y. ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$).

L'ensemble des couples $(x; y)$ solutions de cette équation est représenté dans un repère par la droite d'équation $ax + by + c = 0$

II-1- Des exemples

On considère les trois systèmes:

(I) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-2y=-8 \end{cases}$,

Observation:

Les solutions de l'équation $x + 2y = 4$ sont représentées par la droite passant par les points $A(0; 2)$ et $B(4; 0)$

Les solutions de l'équation $3x - 2y = -8$ sont représentées par la droite passant par les points $A'(0; 4)$ et $B'(-2; 1)$

Il semble que les droites soient sécantes.

Preuve:

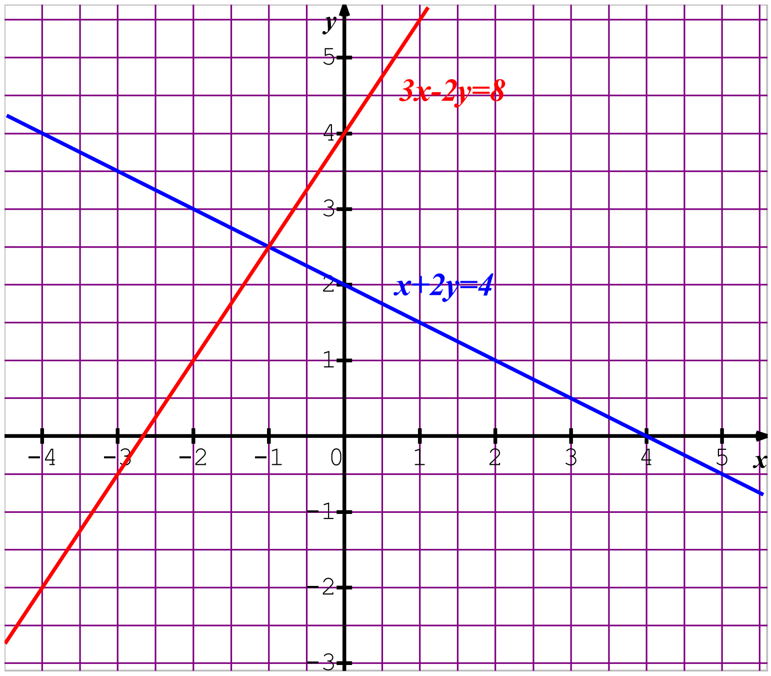
Les coefficients a et b de la première équation sont $a = 1$ et $b = 2$

Ceux de la deuxième équation sont $a' = 3$ et $b' = -2$.

Le produit $ab' = -2$ et le produit $a'b = 6$

Les deux produits sont différents. Les droites sont donc sécantes.

Systèmes linéaires



(II) $\begin{cases} x+2y=4 \\ \frac{3}{2}x+3y=5 \end{cases}$,

Observation:

Les solutions de l'équation $x + 2y = 4$ sont représentées par la droite passant par les points $A(0; 2)$ et $B(4; 0)$

Les solutions de l'équation $\frac{3}{2}$ $x + 2y = 5$ sont représentées par la droite passant par les points $A''(0; \frac{5}{3})$ et

$B'''(\frac{10}{3}; 0)$

Il semble que les droites soient strictement parallèles.

Preuve:

Les coefficients a et b de la première équation sont $a = 1$ et $b = 2$

Ceux de la deuxième équation sont $a'' = \frac{3}{2}$ et $b'' = 3$.

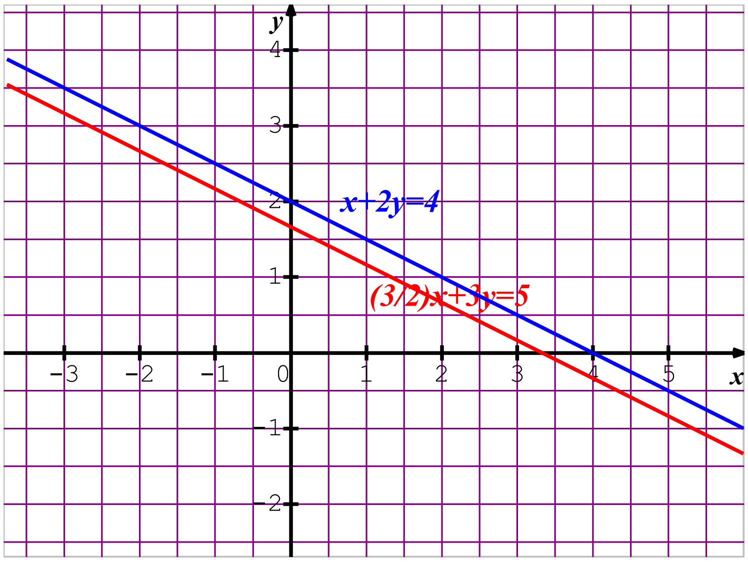
Le produit $ab'' = 3$ et le produit $a''b = 3$

Les deux produits sont égaux. Les droites sont donc parallèles

Il existe un réel k tel que $ka'' = a$ et $kb'' = b$ (Proportionnalité). Ici: $k = \frac{2}{3}$.

Comme $\frac{2}{3} \times 5 \neq 4$ alors les droites sont strictement parallèles.

Systèmes linéaires



(III) $\begin{cases} x+2y=4 \\ -\frac{1}{2}x-y=-2 \end{cases}$

Observation:

Les solutions de l'équation $x + 2y = 4$ sont représentées par la droite passant par les points $A(0; 2)$ et $B(4; 0)$

Les solutions de l'équation $-\frac{1}{2}x - y = -2$ sont représentées par la droite passant par

les points $A(0; 2)$ et $B(4; 0)$

Les droites sont donc confondues.

Preuve:

Les coefficients a et b de la première équation sont $a = 1$ et $b = 2$

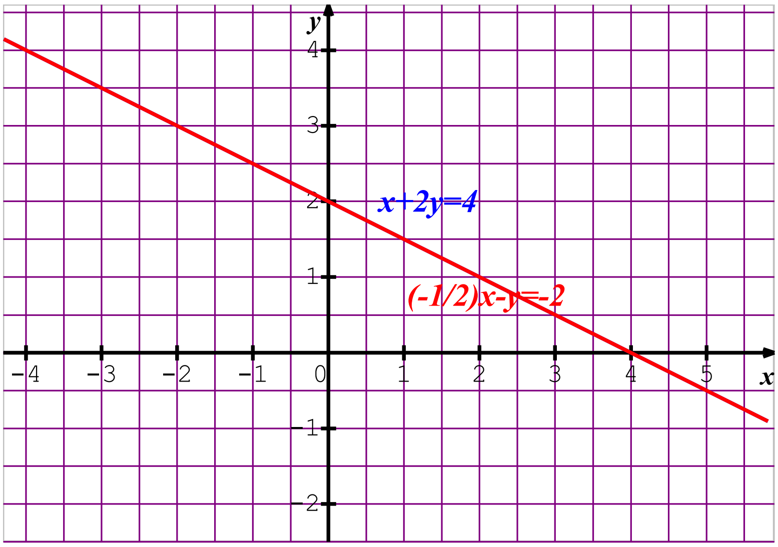
Ceux de la deuxième équation sont $a''' = \frac{-1}{2}$ et $b''' = -1$

Le produit $ab''' = -1$ et le produit $a'''b = -1$

Les deux produits sont égaux. Les droites sont donc parallèles

Il existe un réel k tel que $ka''' = a$ et $kb''' = b$ (Proportionnalité). Ici: $k = -2$.

Comme $-2\times(-2) = 4$ alors les droites sont confondues.



II-2- Résolution

II-2-1- Par combinaison linéaire

Reprenons les systèmes du § précédent:

(I) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-2y=-8 \end{cases}$

On sait qu'il existe une solution unique d'après l'étude des droites.

En remarquant que les coefficients de y sont opposés, on a:

Si $(x; y)$ est une solution du système alors $x + 2y = 4$ et $3x - 2y = -8$.

En faisant la somme membre-à-membre, il vient: $4x = -4$, puis $x = -1$.

En multipliant la première équation par (-3) (Pourquoi ce nombre?), on a:

Si $(x; y)$ est une solution du système alors $-3x - 6y = -12$ et $3x - 2y = -8$.

En faisant la somme membre-à-membre, il vient: $-8y = -20$, puis $y = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Conclusion: $S = \{(-1; 2{,}5)\}$

Remarque: Si l'étude des droites n'est pas faite, il est nécessaire de vérifier que ce couple est solution du système

(II) $\begin{cases} x+2y=4 \\ \frac{3}{2}x+3y=5 \end{cases}$,

On sait qu'il n'existe aucune solution d'après l'étude des droites.

On peut par exemple multiplier par (-3) la première équation et par 2 la deuxième équation. (Pourquoi ces choix?)

Si $(x; y)$ est une solution du système alors $-3x - 6y = -12$ et $3x + 6y = 10$.

En faisant la somme membre-à-membre, il vient: $0 = -2$. Ce qui prouve qu'il n'y a pas de solution.

(III) $\begin{cases} x+2y=4 \\ -\frac{1}{2}x-y=-2 \end{cases}$

On sait qu'il existe une infinité de solutions d'après l'étude des droites.

On peut par exemple multiplier par 2 la deuxième équation. (Pourquoi ce choix?)

Si $(x; y)$ est une solution du système alors $x + 2y = 4$ et $-x - 2 = -4$

En faisant la somme membre-à-membre, il vient: $0 = 0$. Ce qui est toujours vrai.

Les solutions sont les couples $(x; y)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Ces solutions sont représentées par la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

II-2-2- Par substitution

Reprenons le système (I) du § précédent:

(I) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-2y=-8 \end{cases}$

Par exemple, on tire x en fonction de y dans la première équation: $x = 4 - 2y$

et on remplace x par $4 - 2y$ dans la seconde équation: $3(4 - 2y) - 2y = -8$.

En résolvant cette dernière équation d'inconnue y, on retrouve: $y = 2{,}5$;

Puis en revenant à $x = 4 - 2y$, on a: $x = -1$

III- Systèmes de 3 équations linéaires à 3 inconnues

III-1- Un exemple

30 personnes ont travaillé sur un chantier.

Trois équipes ont été formées:

Chaque personne de la première équipe a travaillé 30 h par semaine et reçu un salaire de 2 000 €.

Chaque personne de la deuxième équipe a travaillé 50 h par semaine et reçu un salaire de 3 000 €.

Chaque personne de la troisième équipe a travaillé 20 h par semaine et reçu un salaire de 1 000 €.

La masse salariale est de 50 000 € pour un temps travail total sur le chantier de 850 h.

Déterminer le nombre de personnes dans chaque équipe.

Mise en équations:

x, y, z sont des entiers représentant le nombre de personnes respectif de chaque équipe.
On a donc:

Systèmes linéaires

Nombre de salariés: $x + y + z = 30$
Masse salariale (en milliers d'euros): $2x + 3y + z = 50$
Temps de travail: $30x + 50y + 20z = 850$, soit, en divisant par 10 chacun des membres: $3x + 5y + 2z = 85$

On obtient le système: $\begin{cases} x+y+z=30 \ (L_1) \\ 2x+3y+z=50 \ (L_2) \\ 3x+5y+2z=85 \ (L_3) \end{cases}$

III-2- Résolution

III-2-1- Par combinaison linéaire

Principe:

On garde une ligne par exemple (L_1) et par combinaisons linéaires de L_1 avec L_2 et de L_1 avec L_3, on réduit le système de façon à éliminer la même inconnue. Ainsi, les deux nouvelles lignes forment un système à deux inconnues.

On peut faire $(L_2) - (2 \times L_1) = (L'_2)$ et $(L_3) - (3 \times L_1) = (L'_3)$

$$\begin{cases} x+y+z=30 \ (L_1) \\ y-z=-10 \ (L'_2) \\ 2y-z=-5 \ (L'_3) \end{cases}$$

En faisant une combinaison linéaire des deux dernières lignes, (par exemple: $(L'_3) - (L'_2) = (L''_3)$, on obtient: $\begin{cases} x+y+z=30 \ (L_1) \\ y-z=-10 \ (L'_2) \\ y=5 \ (L''_3) \end{cases}$

Il suffit de remonter pour trouver les trois valeurs:

$y = 5$, puis $z = 15$ et enfin $x = 10$
La première équipe compte 10 personnes, la deuxième 5 personnes et la troisième 15 personnes.

III-2-2- Par substitution

$$\begin{cases} x+y+z=30 \ (L_1) \\ 2x+3y+z=50 \ (L_2) \\ 3x+5y+2z=85 \ (L_3) \end{cases}$$

On isole x dans (L_1) et on remplace dans (L_2) et (L_3)

$$\begin{cases} x+y+z=30 \ (L_1) \\ 2x+3y+z=50 \ (L_2) \\ 3x+5y+2z=85 \ (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=30-y-z \\ 2(30-y-z)+3y+z=50 \\ 3(30-y-z)+5y+2z=85 \end{cases} \text{, soit, } \begin{cases} x=30-y-z \\ y-z=-10 \\ 2y-z=-5 \end{cases}$$

Dans la deuxième, on isole y et on remplace dans la troisième:

$$\begin{cases} x=30-y-z \\ y-z=-10 \\ 2y-z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=30-y-z \\ y=-10+z \\ 2(-10+z)-z=-5 \end{cases}.$$

En réduisant la dernière équation, il vient: $z = 15$, puis, $y = 5$ et enfin $x = 10$

IV- Résolution graphique de systèmes d'inéquations à deux inconnues

IV-1- Un exemple

On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On cherche tous les points *M*(*x*; *y*) tels que $\begin{cases} x \geqslant 0 & (1) \\ y-1 \leqslant 0 & (2) \\ x+y-2 \geqslant 0 & (3) \end{cases}$

Voir le !I-4- régionnement du plan si besoin

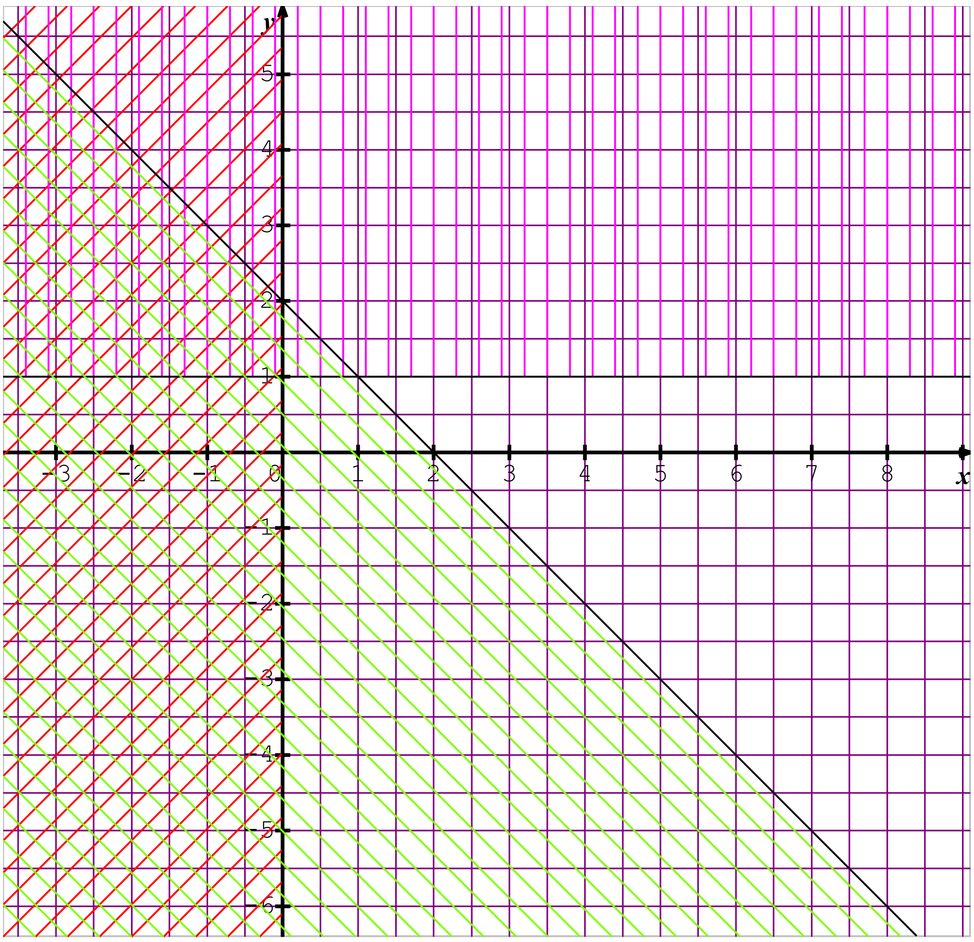
La première inéquation signifie que les abscisses de *M* sont positives ou nulles. On hachure la partie à exclure, c'est-à-dire le demi-plan d'abscisses négatives.

La deuxième inéquation équivaut à $y \leqslant 1$. l'ordonnée des points *M* est donc inférieure ou égale à 1. On hachure donc la partie à exclure, c'est-à-dire le demi-plan au-dessus de la droite d'équation $y = 1$.

Pour la troisième inéquation, on trace la droite Δ d'équation $x + y - 2 = 0$ (Par exemple, les points *A*(0; 2) et *B*(2: 0) sont des points de Δ). Le point *O*(0; 0) est tel que $0 + 0 - 2 \leqslant 0$. Le point *O* n'appartient donc pas au demi-plan représentant les solutions de l'inéquation (3)).

On hachure le demi-plan de frontière Δ contenant le point *O*.

L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x \geqslant 0 & (1) \\ y-1 \leqslant 0 & (2) \\ x+y-2 \geqslant 0 & (3) \end{cases}$ est représenté par la partie non hachurée.



IV-2- Programmation linéaire

Une coopérative vinicole dispose de 800 bouteilles de vin rouge et 500 bouteilles de vin blanc.

Elle propose à la vente deux assortiments:

- l'assortiment A comprenant trois bouteilles de vin rouge et une bouteille de vin blanc au prix de 60 €.

- l'assortiment B comprenant deux bouteilles de vin rouge et deux bouteilles de vin blanc au prix de 50 €.

Comment répartir les bouteilles pour un chiffre d'affaires maximal.

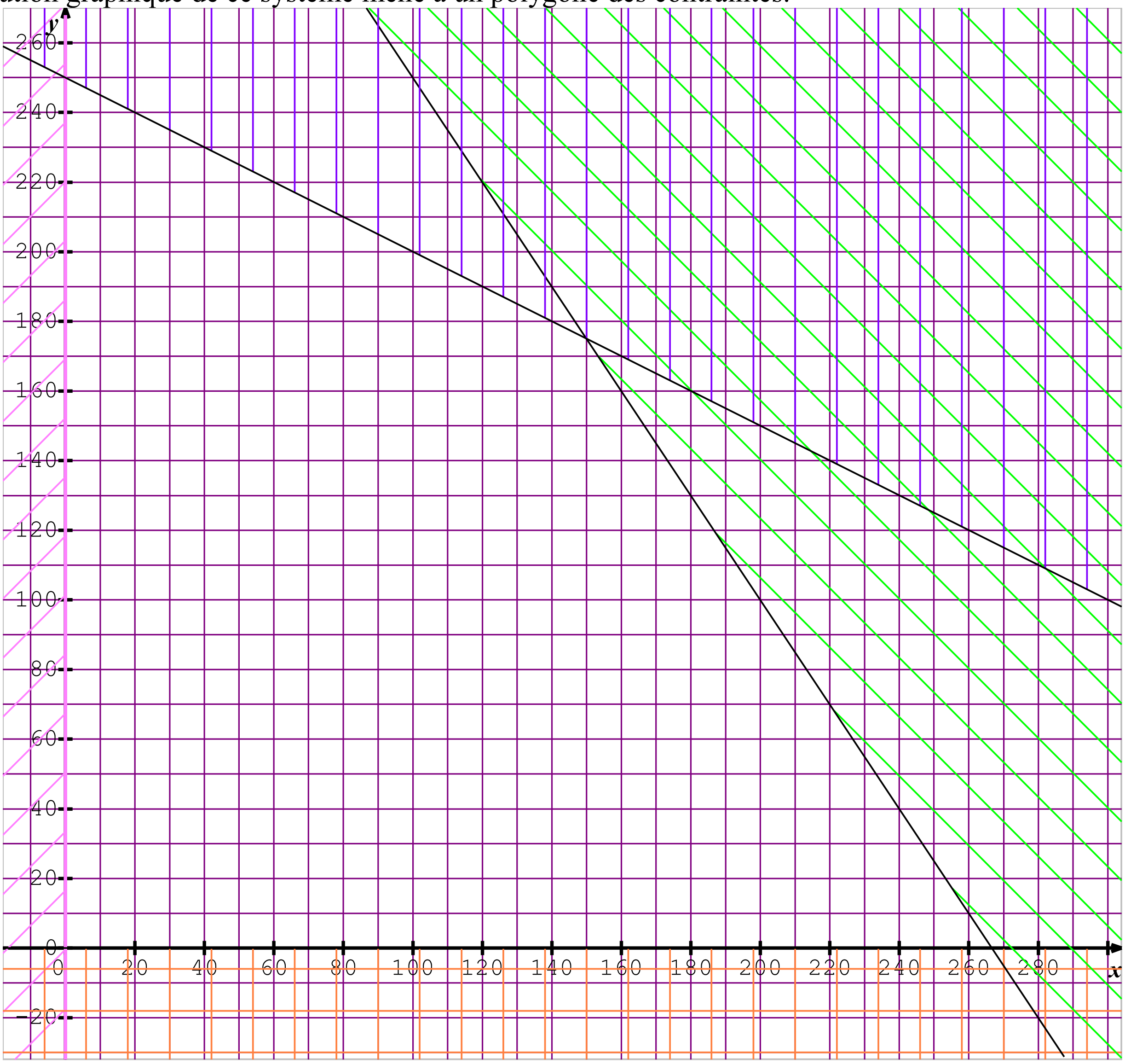
Méthode:

Soit x le nombre d'assortiments A et y celui d'assortiments B.

x et y sont des entiers naturels.
Le nombre de bouteilles de vin rouge est $3x + 2y$.
Le nombre de bouteilles de vin blanc est $x + 2y$.

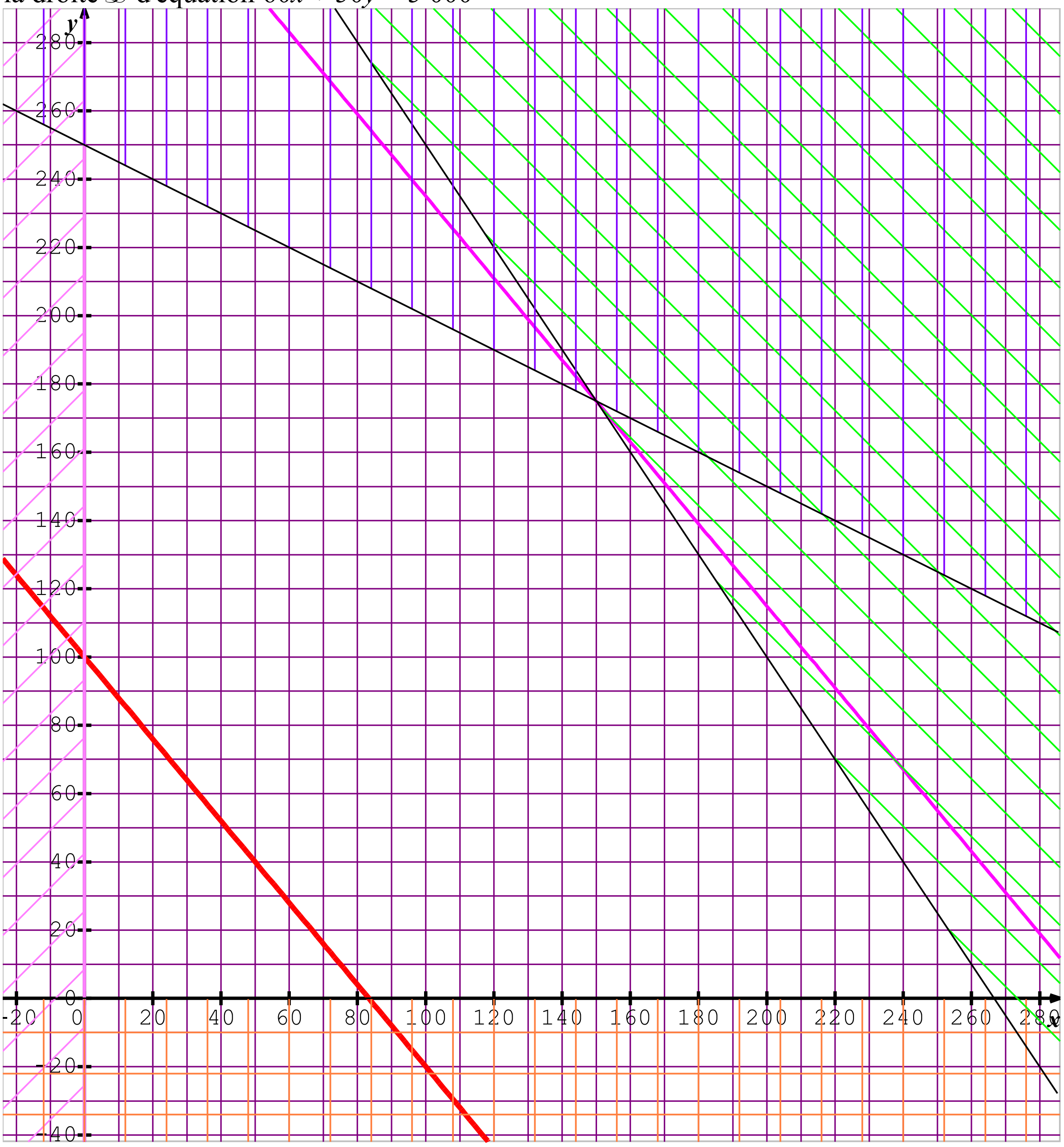
On a ainsi les contraintes: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 3x+2y \leqslant 800 \\ x+2y \leqslant 500 \end{cases}$

La résolution graphique de ce système mène à un polygone des contraintes.



Systèmes linéaires

Soit P le montant total des ventes.
On a donc: $60x + 50y = P$
Cette équation $60x + 50y = P$ est représentée par une droite.
Quand P varie, on obtient une famille de droites parallèles (Voir § I-3-1)
Par exemple, on construit la droite $\mathscr{D}$ d'équation $60x + 50y = 5\,000$ (N'importe quelle valeur peut convenir pourvu qu'elle soit visible sur le graphique).
On recherche parmi toutes les droites parallèles à $\mathscr{D}$, celle qui coupe le polygone en au moins un point et dont l'ordonnée à l'origine est maximale.
En effet, l'ordonnée à l'origine est $\frac{P}{50}$. P sera donc maximal lorsque $\frac{P}{50}$ sera maximal.
En rouge, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $60x + 50y = 5\,000$



Il semble que la droite passant par le point d'intersection des droites délimitant le polygone des contraintes convienne.
Détermination des coordonnées (et vérification ...)

Les coordonnées sont les solutions de $\begin{cases} 3x+2y=800 \\ x+2y=500 \end{cases}$.

Par différence, on obtient: $x = 150$, puis $y = 175$

Le chiffre d'affaires vaut: 60×150 + 50×175 = 17 750 €

Solutions des systèmes du paragraphe I-1-1

$$\Sigma_1 \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+5=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-8 \end{cases}$$

$$\Sigma_2 \begin{cases} x\leqslant 1 \\ y\geqslant 0 \\ x+y\geqslant 4 \\ 2x\leqslant y-1 \end{cases}$$ La zone non hachurée représente les solutions