Table des matières

I- Les transformations vues au collège....1
I-1- De quoi s'agit-il?....1
Avertissement: il existe d'autres transformations que celles vues en collège....1
I-2- La symétrie centrale....3
I-2- 1 Définition....3
I-2-2-Propriété 4
I-3- Symétrie axiale ou orthogonale (Réflexion)....4
I-3-1 Définition....4
I-3-2-Propriété 5
I-4- Translation....5
I-4-1 Définition....5
I-4-2-Propriété 6
I-5- Rotation....6
I-5-1 Définition....6
I-5-2-Propriété 7
I-6- Propriétés communes aux transformations vues au collège....8
I-6-1- Vocabulaire: "conserver"....8
I-6-2 Propriétés....8
Commentaires: 8
I-6-3 Image d'un cercle par une de ces transformations....9
II- Triangles isométriques....9
II- 1- Définition: isométrie....10
II- 2- Définition: triangles isométriques....10
II-2-1 Exemple: 10
II-2-2- Conséquences immédiates....11
II-3- Les trois cas d'isométrie....11
II-3-1- Trois côtés de même mesure....11
II-3-2- Deux côtés et un angle de même mesure 12
II-3-3- Un côté et deux angles de même mesure 13

I- Les transformations vues au collège

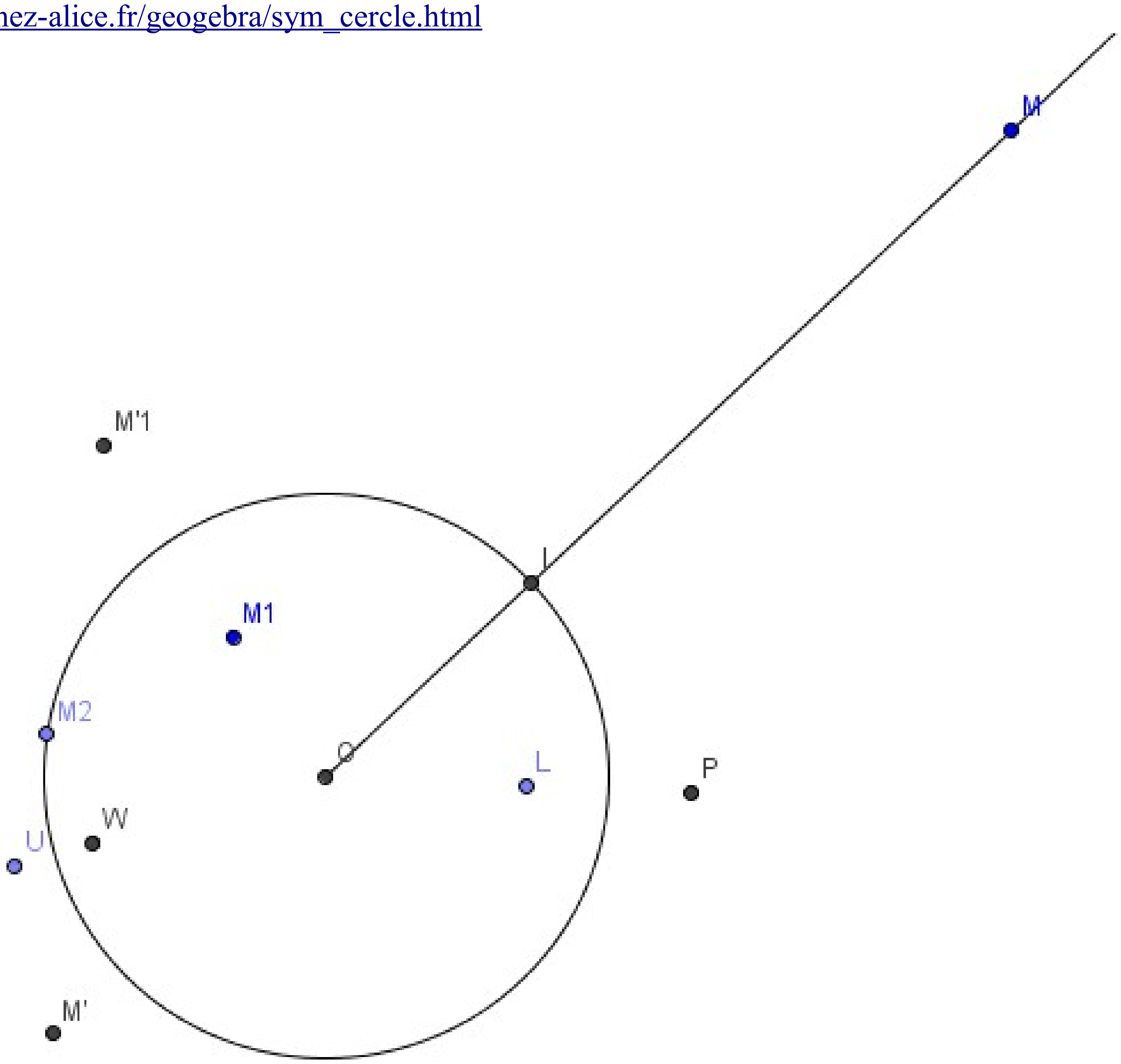
I-1- De quoi s'agit-il?

Avertissement: il existe d'autres transformations que celles vues en collège.

En géométrie, une transformation du plan est une fonction qui, à tout point du plan M (ou d'une partie du plan) associe un et un seul point M' du plan.
Le procédé de construction est la transformation.

Exemple: Sur la construction suivante, on connaît un cercle de centre O (ce cercle est fixe).
la transformation est définie par le procédé suivant:
- prendre un point M distinct de O. (Ce point est variable)
- construire la droite (OM).
- La demi-droite $[OM)$ coupe le cercle en un point I.
- On construit le point M' tel que I est le milieu de $[MM']$. (Le point M' est le point image qui se déplace avec M)

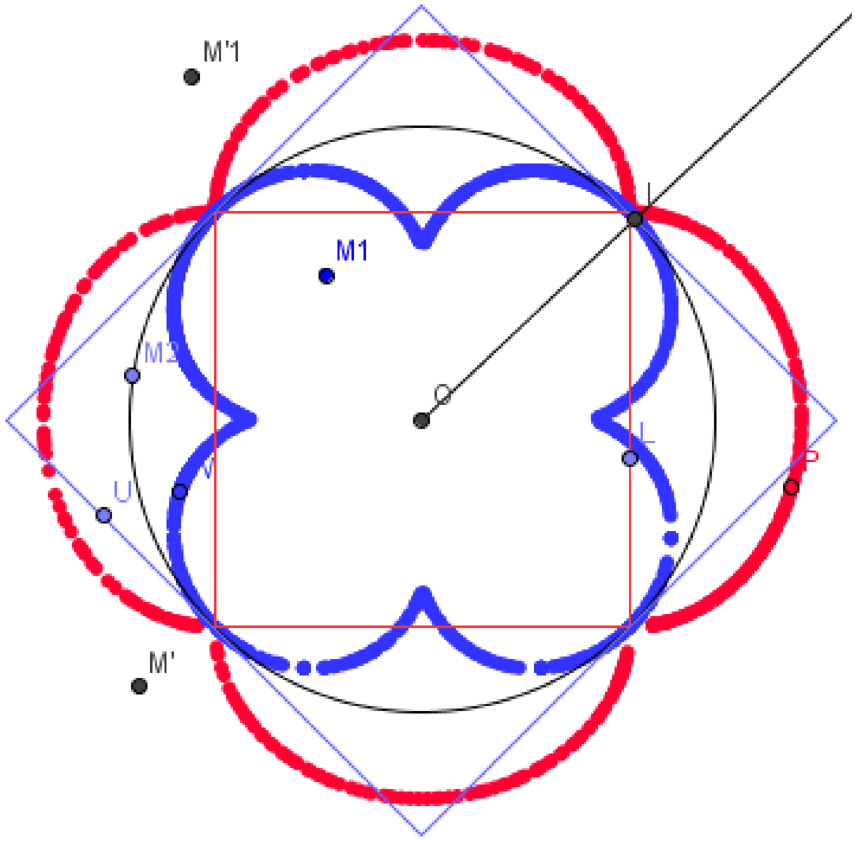
On a ainsi un procédé qui, à tout point *M* distinct de *O*, associe un point *M'*.
http://dossierslmm.chez-alice.fr/geogebra/sym_cercle.html



Sur cette construction, L'image de *M* est *M'*, celle de *U* est *W*, celle de M_2 est M_2 , ...

Lorsqu'un point se déplace sur une figure donnée, on dit qu'il décrit la figure. Sur la construction au-dessous, le point *L* décrit le carré inscrit dans le cercle et le point *U* le carré exinscrit au cercle. Lorsqu'on prend toutes les images des points décrivant cette figure, on obtient la figure image.
Sur la construction, le point *P* décrit l'image du carré inscrit et le point *W* celle du carré exinscrit.

On remarque sur cette construction que cette transformation **ne conserve pas** les longueurs, que l'image d'une figure n'est pas une figure semblable.



I-2- La symétrie centrale.

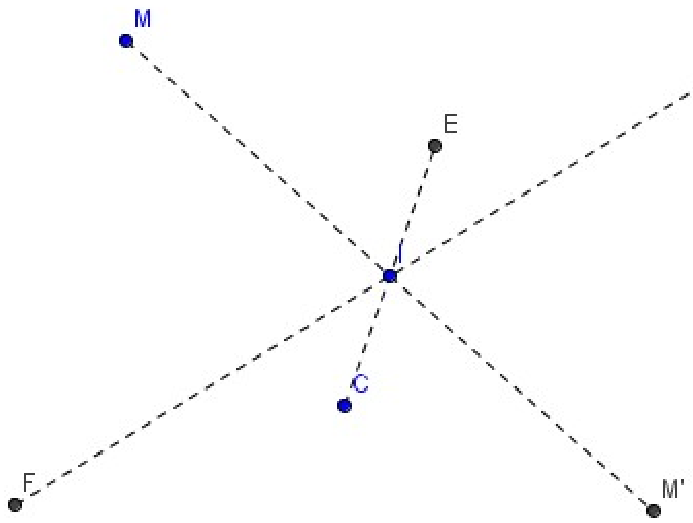
I-2- 1 Définition.

I est un point donné (fixe).
On dit que M' est l'image de M dans la symétrie centrale de centre I si et seulement si I est le milieu du segment $[MM']$.

La symétrie centrale de centre I est le procédé de construction déterminé par la définition

Le centre de la symétrie centrale est le seul point invariant.

Si on nomme s_I cette symétrie centrale, on peut noter: $s_I \ : \ M \ \mapsto \ M'$
M et N étant deux points distincts du plan, si $s_I \ : \ M \ \mapsto \ M'$ et $s_I \ : \ N \ \mapsto \ N'$ alors $MNM'N'$ est un parallélogramme de centre I;
En effet, les diagonales $[MM']$ et $[NN']$ se coupent en leur milieu I.
On en déduit: les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.



Dans la symétrie de centre I, le point M a pour image M', le point C a pour image E, le point D a pour image F.

I-2-2-Propriété

L'image d'une droite $\mathscr{D}$ par une symétrie centrale est une droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D}$.

ou encore

Par une symétrie centrale, une droite et son image sont des droites parallèles

Les autres propriétés qui sont communes aux autres transformations vues au collège seront données après tous les rappels

I-3- Symétrie axiale ou orthogonale (Réflexion)

I-3-1 Définition

Δ est une droite donnée (fixe)

On dit que M' est l'image de M dans la symétrie d'axe Δ si et seulement si Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.

La symétrie axiale d'axe Δ est le procédé de construction déterminé par la définition

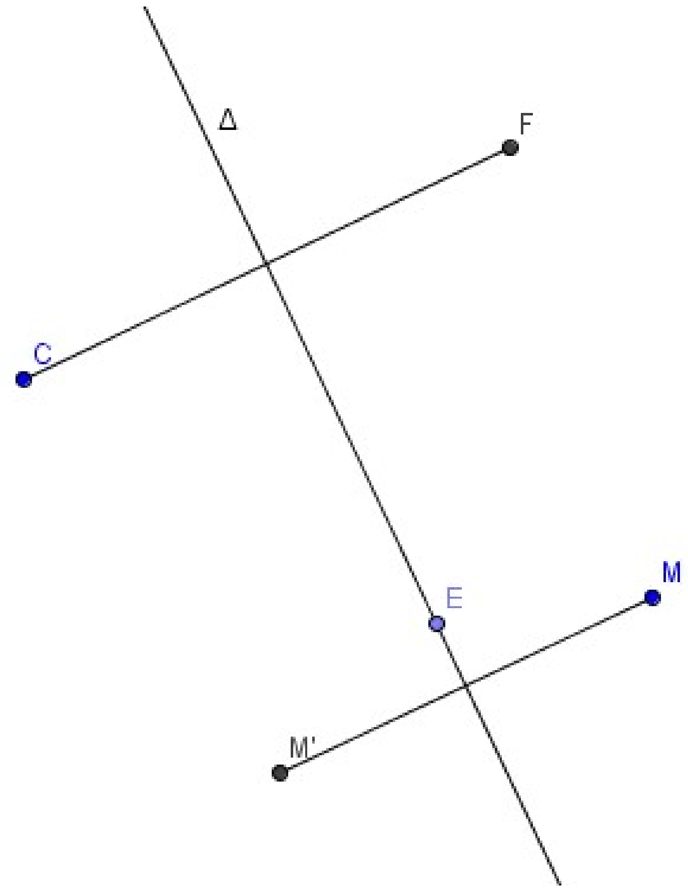
Tous les points de l'axe sont des points invariants.

Si on note S_Δ cette symétrie axiale, on a: $S_\Delta : M \mapsto M'$

M et N étant des points n'appartenant pas à l'axe Δ, si $S_\Delta : M \mapsto M'$ et $S_\Delta : N \mapsto N'$ alors $[MM']$ et $[NN']$ sont parallèles.

En effet, Δ est médiatrice de $[MM']$ et $[NN']$, et, par conséquent, $[MM']$ et $[NN']$ sont perpendiculaires à la même droite Δ.

Transformations et triangles isométriques



Dans la symétrie d'axe Δ, le point M a pour image M', le point C a pour image le point F, le point E sur Δ a pour image lui-même (il est invariant dans la symétrie d'axe Δ)

I-3-2-Propriété

L'image d'une droite $\mathscr{D}$ sécante à Δ en I par une symétrie d'axe Δ est une droite $\mathscr{D}'$ sécante à Δ en I

Les autres propriétés qui sont communes aux autres transformations vues au collège seront données après tous les rappels

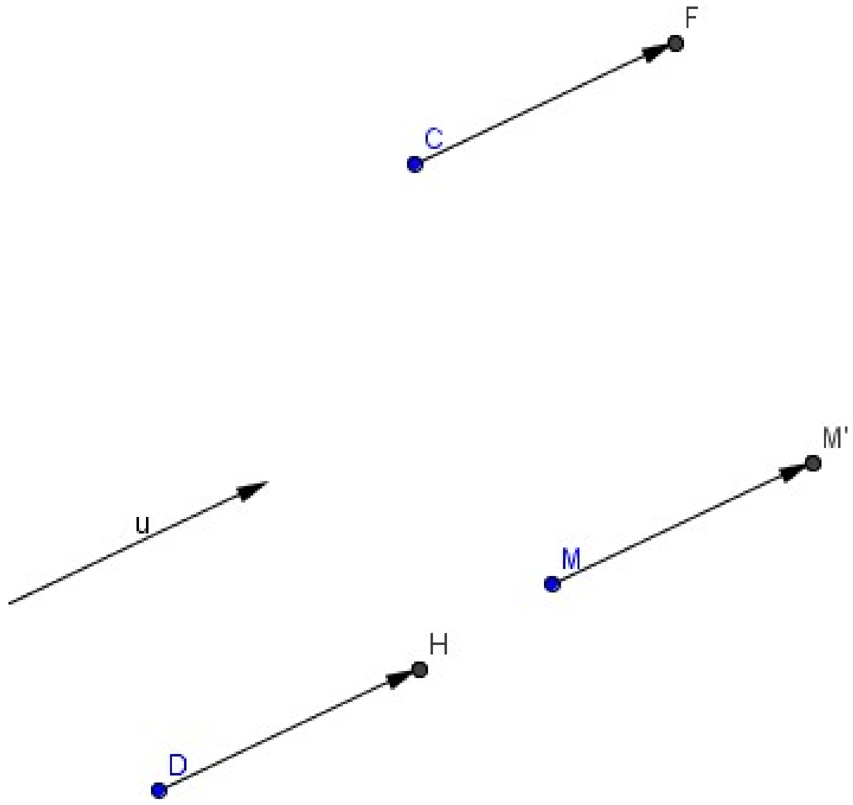
I-4- Translation

I-4-1 Définition

$\vec{u}$ est un vecteur donnée (fixe)
On dit que M' est l'image de M dans la translation de vecteur $\vec{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

La translation de vecteur $\vec{u}$ est le procédé de construction déterminé par la définition

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$, aucun point n'est invariant
Si on note $t_{\vec{u}}$ cette translation, on a: $t_{\vec{u}} : M \mapsto M'$
M et N étant deux points distincts du plan, si $t_{\vec{u}} : M \mapsto M'$ et $t_{\vec{u}} : N \mapsto N'$ alors $MNN'M'$ est un parallélogramme.
En effet, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$
On en déduit: les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.



Dans la translation de vecteur $\vec{u}$, le point M a pour image M', le point C a pour image le point F, le point D a pour image le point H.

I-4-2-Propriété

L'image d'une droite $\mathscr{D}$ dans la translation de vecteur $\vec{u}$ est une droite $\mathscr{D}'$ qui lui est parallèle

Les autres propriétés qui sont communes aux autres transformations vues au collège seront données après tous les rappels

I-5- Rotation

I-5-1 Définition

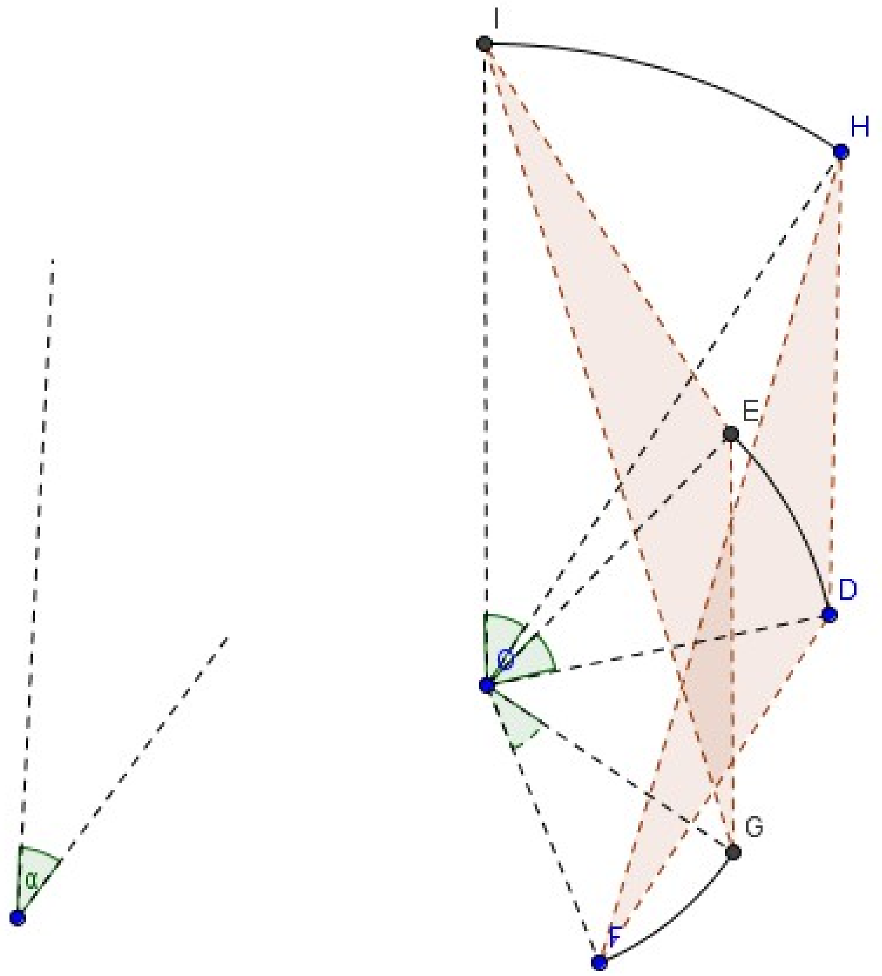
On oriente le plan en indiquant un sens de parcours autour d'un cercle.
Par convention, le sens positif est celui inverse de rotation des aiguilles d'une montre.
O est un point donné (fixe)
α est un angle donné (fixe). α est positif lorsqu'on tourne dans le sens positif (ou direct), et, négatif quand on tourne dans le sens négatif (ou indirect ou rétrograde)
On dit que M' est l'image de M dans la rotation de centre O et d'angle α si et seulement si

$$\begin{cases} OM = OM' \\ \widehat{MOM'} = \alpha \text{ angle orienté de } M \text{ vers } M' \end{cases}$$

La rotation de centre O et d'angle α est le procédé de construction déterminé par la définition

Le centre de la rotation est le seul point invariant.

Si on note $R_{(O,\alpha)}$ cette rotation, on a: $R_{(O,\alpha)}\ :\ M \mapsto M'$



Dans la rotation de centre *O* et d'angle *α*, le point *D* a pour image *E*, le point *F* a pour image le point *G*, le point *H* a pour image le point *I*. L'image du triangle *DFH* est le triangle *EGI.*

I-5-2-Propriété

Si *M* est l'image de *M* par la rotation de centre *O* et d'angle *α* alors le triangle *MOM'* est un triangle isocèle de sommet *O* (l'angle principal est *α*)

Les autres propriétés qui sont communes aux autres transformations vues au collège seront données après tous les rappels

I-6- Propriétés communes aux transformations vues au collège

I-6-1- Vocabulaire: "conserver"

Lorsqu'on fait agir une fonction, une transformation, il existe des propriétés, des opérations qui sont définies sur les éléments de départ (les antécédents) qui se retrouvent à l'arrivée (les images). On dit dans ce cas que ces propriétés, ces opérations sont conservées par la fonction ou la transformation.

I-6-2 Propriétés

Les symétries centrales, les symétries axiales, les translations et les rotations conservent:
- l'alignement,
- les longueurs,
- l'orthogonalité,
- le parallélisme,
- les angles géométriques.

Commentaires:

L'alignement est conservé:
au départ, on sait que 3 points sont alignés
on applique une de ces transformations (la même sur les trois points)
à l'arrivée, les 3 points images sont alignés.

la $\mapsto$ *représente une des transformations vues au collège*
$A \mapsto K$,
$B \mapsto T$,
$C \mapsto D$
Si A, B et C sont alignés alors K, T et D sont alignés

Les longueurs sont conservées:
au départ, on connaît un segment de longueur l
on applique une de ces transformations
à l'arrivée, le segment image a pour longueur l.

la $\mapsto$ *représente une des transformations vues au collège*
$A \mapsto K$,
$B \mapsto T$,
$KT = AB$

L'orthogonalité est conservée:
au départ, on sait que deux droites sont perpendiculaires
on applique une de ces transformations (la même sur les deux droites)
à l'arrivée, les droites images sont perpendiculaires.

la $\mapsto$ *représente une des transformations vues au collège*
$d_1 \mapsto d'_1$
$d_2 \mapsto d'_2$
Si $d_1 \perp d_2$ alors $d'_1 \perp d'_2$

Le parallélisme est conservé:
au départ, on sait que deux droites sont parallèles
on applique une de ces transformations (la même sur les deux droites)
à l'arrivée, les droites images sont parallèles.

la $\mapsto$ *représente une des transformations vues au collège*
$d_1 \mapsto d'_1$
$d_2 \mapsto d'_2$
Si $d_1 \parallel d_2$ alors $d'_1 \parallel d'_2$

Les angles géométriques sont conservés:
au départ, on connaît un angle de mesure α.
on applique une de ces transformations
à l'arrivée, l'angle image a pour mesure α.

la $\mapsto$ *représente une des transformations vues au collège*
$A \mapsto K$,
$B \mapsto T$,
$C \mapsto D$
$\widehat{ABC} = \widehat{KTD}$

I-6-3 Image d'un cercle par une de ces transformations.

Les symétries, les translations, les rotations transforment un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r en un cercle $\mathscr{C}'$ de centre O', image de O, et de même rayon r.

II- Triangles isométriques

ISO-, préfixe tiré du grec (ισο - ισος) « égal »; entre dans la construction de nombreux mots du langage scientifique, où il indique généralement une identité, une équivalence, une égalité entre des éléments: *.isothermie, isotopie, isotropie, isocèle ...*

-MÈTRE, Élément tiré du grec (μέτρης, μέτρος, μέτρον) "(celui) qui mesure , (ce) qui se mesure, instrument qui sert à mesurer" *économètre*, *photogrammètre, géomètre, paramètre, diamètre, périmètre, goniomètre, pantomètre, tachéomètre, ...*

Littéralement: des triangles isométriques: des triangles qui ont des mesures égales

Transformations et triangles isométriques

II- 1- Définition: isométrie

Une isométrie est une transformation géométrique qui conserve les distances
Les symétries centrales, les symétries orthogonales, les translations et les rotations sont des isométries.

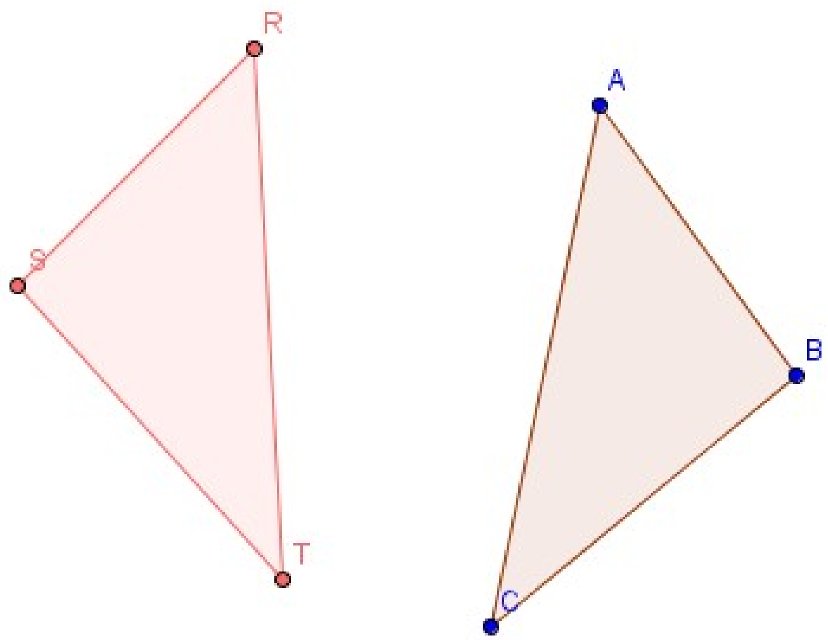
II- 2- Définition: triangles isométriques

Deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une isométrie.

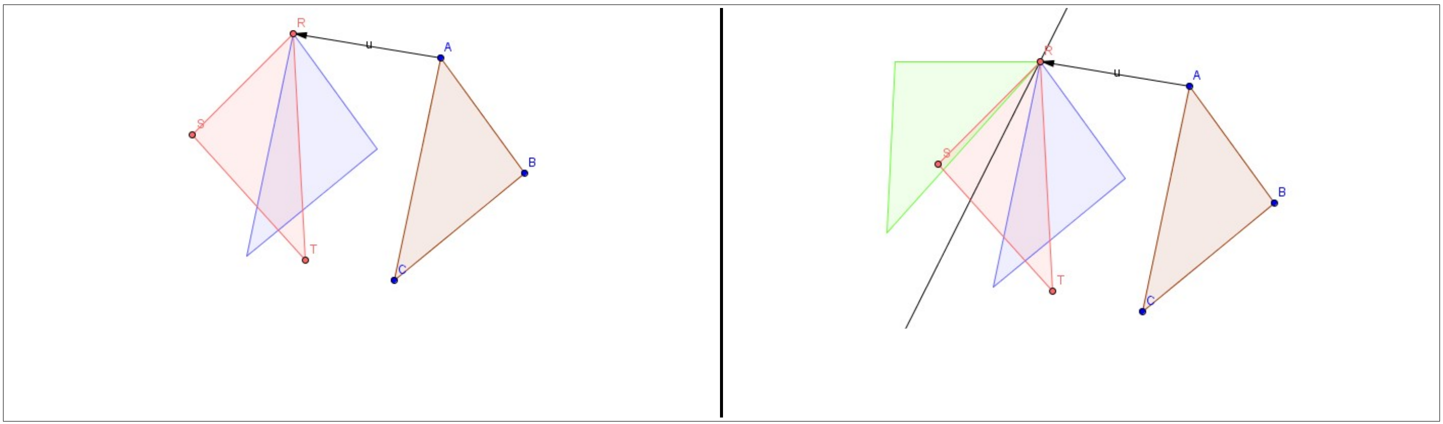
On peut passer de l'un à l'autre par une isométrie.
On peut envoyer un triangle sur l'autre en effectuant une translation et/ou une rotation et/ou une symétrie.

II-2-1 Exemple:

sur la construction suivante les triangles sont isométriques.



On effectue par exemple une translation de vecteur $\overrightarrow{AR}$ (on passe ainsi du triangle ABC au triangle en bleu, puis une symétrie orthogonale (on passe ainsi du triangle bleu au vert), et enfin une rotation (on passe du triangle vert au triangle rouge RST)



II-2-2- Conséquences immédiates

Deux triangles isométriques sont superposables.

Lorsque deux triangles sont isométriques, les côtés correspondants ont même longueur.

Sur l'exemple II-2-1, on a: $AB = RS$, $AC = RT$ et $BC = ST$

Lorsque deux triangles sont isométriques, les angles correspondants ont même mesure.

Sur l'exemple II-2-1, on a: $\widehat{BAC} = \widehat{SRT}$, $\widehat{ABC} = \widehat{RST}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{STR}$

II-3- Les trois cas d'isométrie

On dit aussi les critères d'isométrie

II-3-1- Trois côtés de même mesure

Théorème:
Si les côtés d'un triangle sont de même longueur que les côtés d'un autre triangle alors ces deux triangles sont isométriques.

On sait:

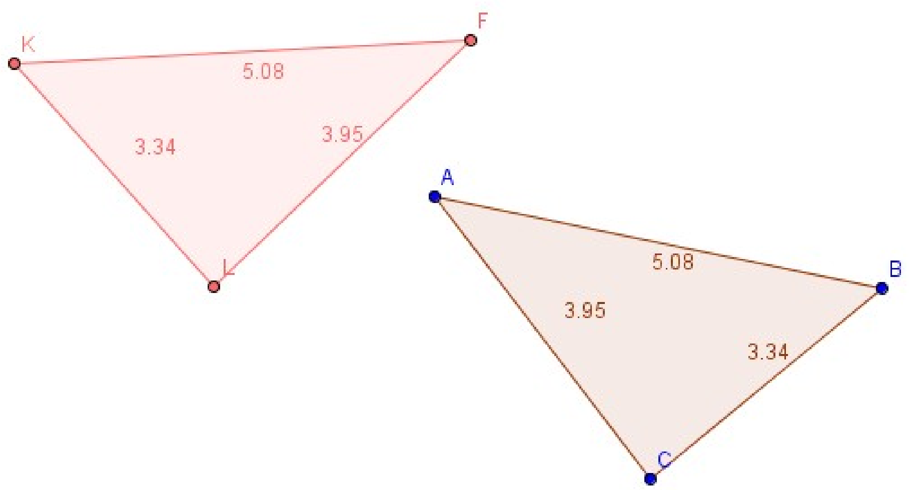
$AB = KF$

$AC = FL$

$KL = BC$

On en déduit:

Les triangles ABC et FKL sont isométriques



On en déduit l'égalité des angles

II-3-2- Deux côtés et un angle de même mesure

Théorème:
Si deux triangles ont un angle de même mesure **compris** entre deux côtés de même longueur alors ils sont isométriques.

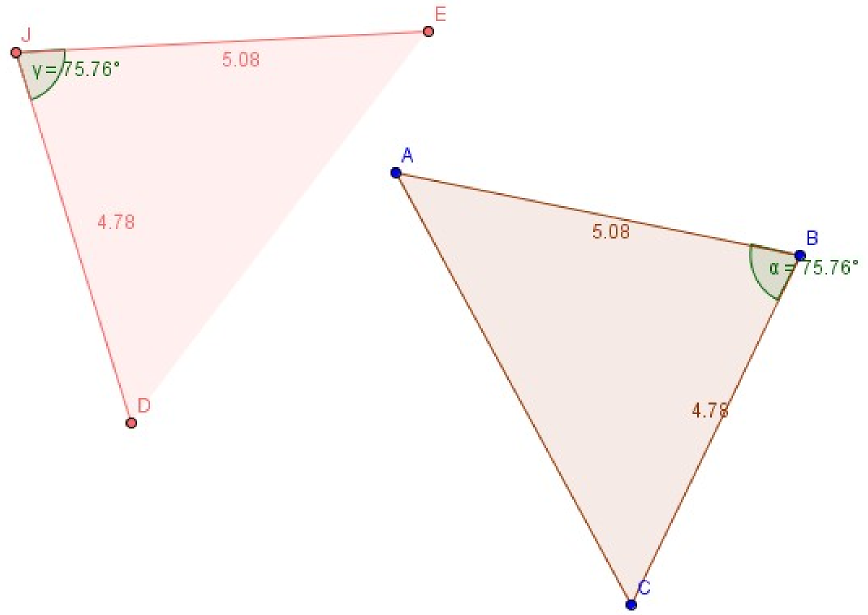
On sait:

$AB = EJ$

$BC = JD$

L'angle formé par [AB] et [BC] est $\widehat{ABC}$ *et celui formé par [EJ] et [JD] est* $\widehat{DJE}$

$\widehat{ABC} = \widehat{DJE}$



On en déduit:

Les triangles *ABC* et *EJD* sont isométriques

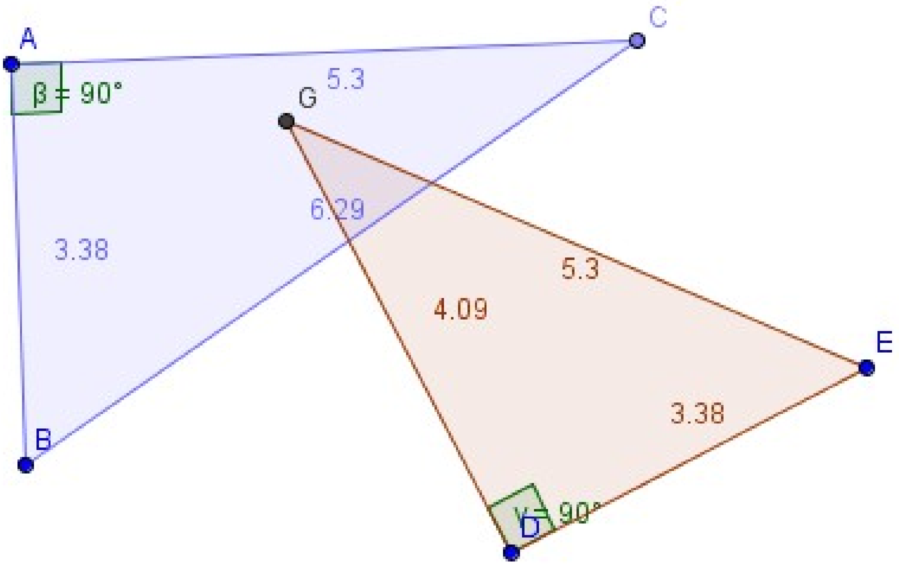
On en déduit l'égalité de longueurs:

$AC = FD$ et l'égalité des angles $\widehat{BCA} = \widehat{JDF}$ et $\widehat{CAB} = \widehat{DFJ}$

Attention: Deux côtés de même longueur et un angle de même mesure ne suffisent pas à prouver que deux triangles sont isométriques.
Contre-exemple:

Vérifier que ces deux triangles ont deux côtés de même longueur et un angle de m^me mesure.

Ils ne sont pas isométriques



II-3-3- Un côté et deux angles de même mesure

Théorème:
Si deux triangles ont deux angles de même mesure et le côté adjacent à ces deux angles de même longueur alors ils sont isométriques.

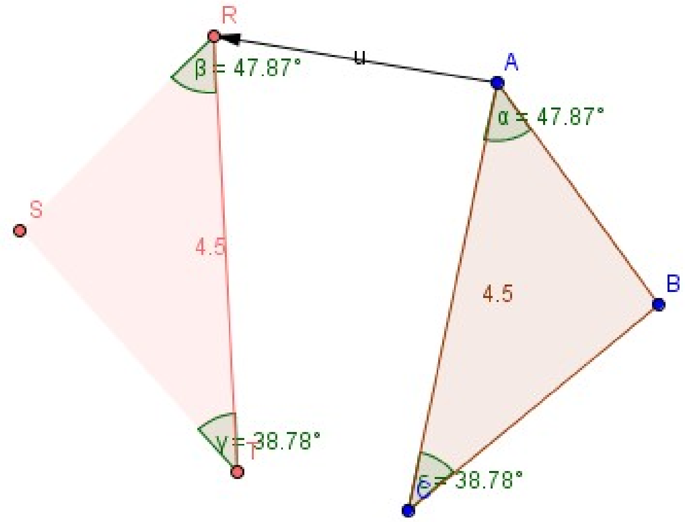
On sait: $AC = RT$

$\widehat{BAC} = \widehat{SRT}$

$\widehat{STR} = \widehat{ACB}$

On en déduit:

les triangles ABC et RST sont isométriques



On en déduit deux égalités de longueurs: $RS = AB$, $ST = BC$ et une égalité d'angle: $\widehat{RST} = \widehat{ABC}$