TRIGONOMÉTRIE

Index

I- Rappels du collège et compléments

I-1 Les angles particuliers et leurs lignes trigonométriques.

I-1-1 Triangle équilatéral

Construire un triangle équilatéral ABC
Donner les mesures des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$
Calculer cos 60° et sin 60°
Calculer cos 30° et sin 30°

I-1-2 Triangle rectangle isocèle (ou un demi-carré)

Construire un triangle rectangle isocèle (ou un demi-carré)
Donner les mesures des angles de ce triangle.
Calculer cos 45° et sin 45°

I-2 Des points particuliers sur un cercle.

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, (unité: 5 cm) on trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
I est défini par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et J par $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$
On appelle I' et J' les points diamétralement opposés respectivement à I et J.
(Les points A_1, B_1 et C_1 suivants sont sur le quart de cercle de coordonnées positives)

a) Tracer la médiatrice de $[OI]$. Elle coupe le cercle $\mathscr{C}$ en A_1 et A_2.
Donner les coordonnées de A_1 et A_2

b) Tracer la médiatrice de $[OJ]$. Elle coupe le cercle $\mathscr{C}$ en B_1 et B_2
Donner les coordonnées de B_1 et B_2

c) Tracer la bissectrice de $\widehat{IOJ}$. Elle coupe le cercle $\mathscr{C}$ en C_1 et C_2
Donner les coordonnées de C_1 et C_2.

II- Parcourir le cercle...

Les points sont ceux du paragraphe précédent. L'unité est l'unité du repère, c'est-à-dire $OI = OJ = 1$
On parcourt le cercle en tournant de I vers J.

II-1 Longueur d'un arc

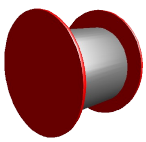
a) Quelle longueur parcourt-on de I à I lorsqu'on fait un tour? deux tours? trois tours? ....
b) Quelle longueur parcourt-on de I à J?
c) Quelle longueur parcourt-on de I à I'? à J'?
d) Quelle longueur parcourt-on de I à A_1 ? à A_2 ?
d) Quelle longueur parcourt-on de I à B_1 ? à B_2 ?
e) Quelle longueur parcourt-on de I à C_1 ? à C_2 ?
Faire le résumé dans un tableau

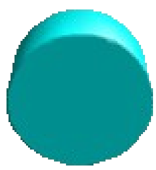
II-2 Des tours de piste

Un cycliste tourne sur une piste de rayon 1 (en hm).
Il a parcouru exactement $\frac{33\pi}{4}$.
En quel point est-il arrivé sur la piste?

III- Le cercle trigonométrique.

Objectifs:
Se repérer sur le cercle (trigonométrique) ou graduer un cercle.
Définitions de cosinus et sinus.
Méthode:
Prendre une ficelle, une boîte ronde (par exemple une boîte de camembert). Le rayon de la boîte vaut 1.
Enrouler la ficelle à partir d'un point





TRIGONOMÉTRIE

Enroulement sur le cercle (animation)

III-1 Définition du cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique un cercle de rayon 1,
muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le centre du cercle,
orienté de la façon suivante:
- le sens positif ou sens direct est le sens contraire de rotation des aiguilles d'une montre.

III-2 Associer un nombre à un point du cercle.

III-2-1- Propriété: à un nombre, on associe un point

À tout nombre réel x correspond un point M du cercle trigonométrique.
Ce nombre x est une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM}$
Imaginer un fil gradué qu'on enroule autour du cercle. Les graduations du fil se retrouvent sur le cercle.

III-2-2- Cas particuliers (à connaître par cœur)

Nombres	2π	-2π	π	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
Points	I	I	I'						
Remarques Figures	un tour direct	un tour indirect							

III-2-3 Propriété: Un point est associé à une infinité de nombres.

Exemple:

à quel(s) point(s) du cercle est (sont) associé(s) les réels suivants. (Notation du §II)
$\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$; $\frac{-5\pi}{3}$; $\frac{-11\pi}{3}$

En général, le point A_1 est associé à x tel que $x=\frac{\pi}{3}+k.2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

propriété:

si deux nombres réels x et y sont associés à un même point M alors on a : $y=x+k.2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
(Ou encore: la différence des deux nombres x et y est un multiple de 2π)

III-3 Les nombres cosinus et sinus

III-3-1 Une nouvelle unité d'angle: *le radian*

Un radian est la mesure d'un angle au centre $\widehat{xOy}$ interceptant un arc $\overset{\frown}{AB}$ de longueur égale au rayon.
(Lorsqu'on enroule la ficelle autour du cercle trigonométrique, le point repéré par 1 sur le cercle donne l'unité de l'angle en radian).
Par conséquent: l'angle plat mesure π radians
L'angle droit mesure $\frac{\pi}{2}$ radians
L'angle plein mesure 2π radians.

III-3-2- Définitions des cosinus ou sinus.

Soit un nombre réel x.
On considère le point M associé à x sur le cercle trigonométrique.
Le ***cosinus*** de x, noté $\cos(x)$, est l'abscisse du point M.
Le ***sinus*** de x, noté $\sin(x)$, est l'ordonnée de M.
Autrement dit:
Un point M du cercle trigonométrique associé à un réel x a pour coordonnées $(\cos(x);\sin(x))$
Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ associé au cercle trigonométrique, on a: $\overrightarrow{OM} = \cos(x)\ \vec{i} + \sin(x)\ \vec{j}$

III-3-3- Les valeurs particulières (à connaître par cœur)

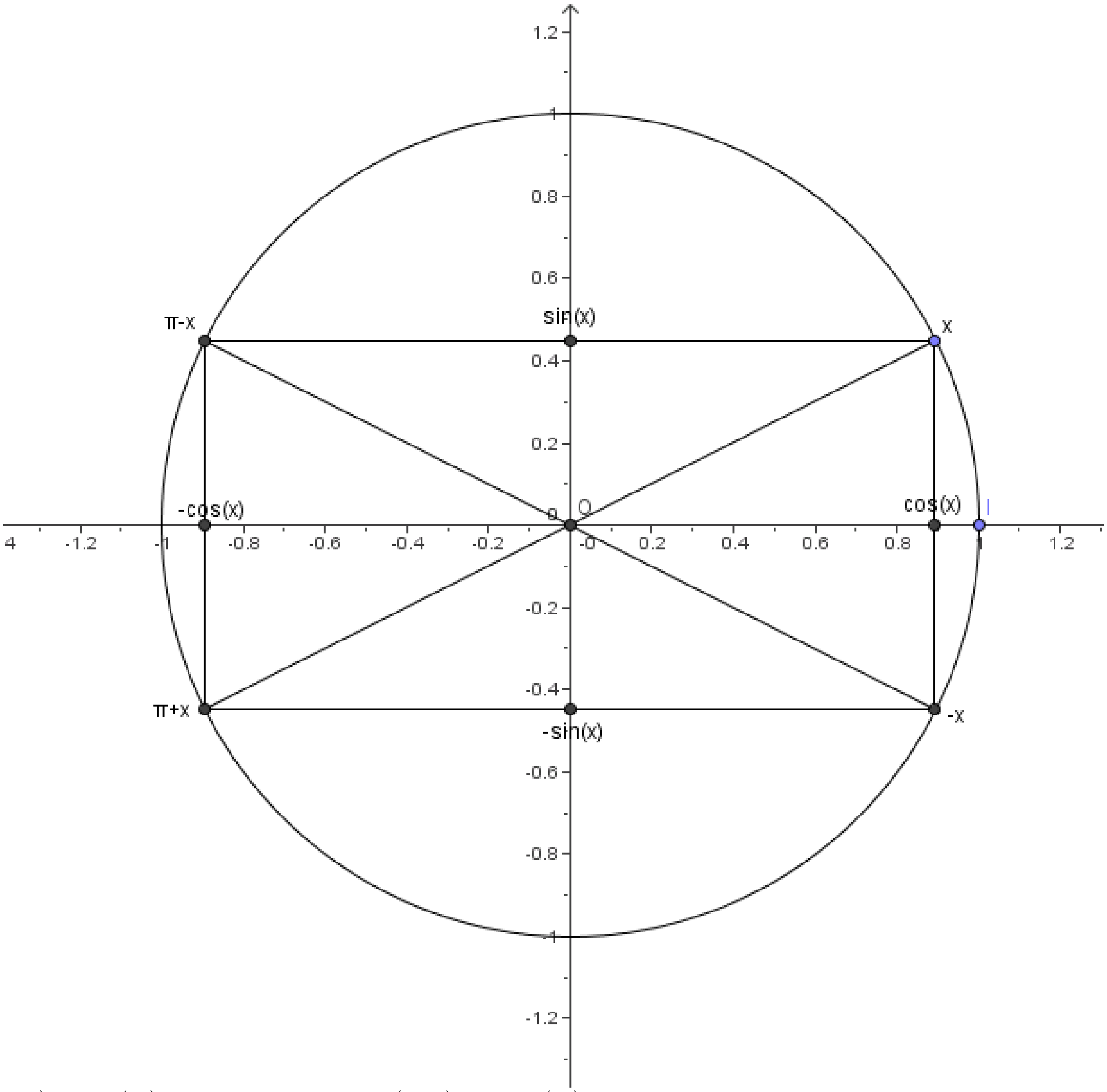
x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
Points du cercle trigo	I	B_1	C_1	A_1	J	I'	I

III-3-4 Propriétés

Propriété fondamentale:

Pour tout x réel, $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1$ (Pythagore)

Les symétries dans le cercle.



On a: $\cos(-x)=\cos(x)$ $\quad$ $\sin(-x)=-\sin(x)$

$\cos(\pi-x)=-\cos(x)$ $\quad$ $\sin(\pi-x)=\sin(x)$

$\cos(\pi+x)=-\cos(x)$ $\quad$ $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$

$\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ $\quad$ $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$

IV- Étude des fonctions cosinus et sinus

IV-1 Définition des fonctions cosinus et sinus

Au paragraphe précédent, on a créé deux fonctions définies sur ℝ.
La fonction cosinus, qui, à tout réel x, fait correspondre le nombre $\cos(x)$
et, la fonction sinus, qui, à tout réel x, fait correspondre le nombre $\sin(x)$

IV-2- Étude de La fonction cosinus

IV-2-1 Périodicité:

On appelle fonction périodique de période T, une fonction définie sur ℝ telle que, pour tout x réel, $f(x+T)=f(x)$.
Graphiquement: Soit un point $M(x\,;f(x))$ un point de C_f alors le point $M'(x+T\,;f(x))$ est un point de C_f.

Le point M' est l'image de M dans la translation de vecteur $T\vec{i}$.
On reproduit la courbe par translation de vecteur $T\vec{i}$.

La fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π. Il suffit donc d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur 2π.

IV-2-2 Parité:

Puisque $\cos(-x)=\cos(x)$, la fonction cosinus est paire.
L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative du cosinus.
On peut donc étudier la fonction cosinus sur un intervalle de longueur π.

IV-2-3 Variations

Par observation du mouvement de l'abscisse d'un point sur le demi-cercle trigonométrique, on a:

x	0	$\pi/2$	π
cos(x)	1	0	-1

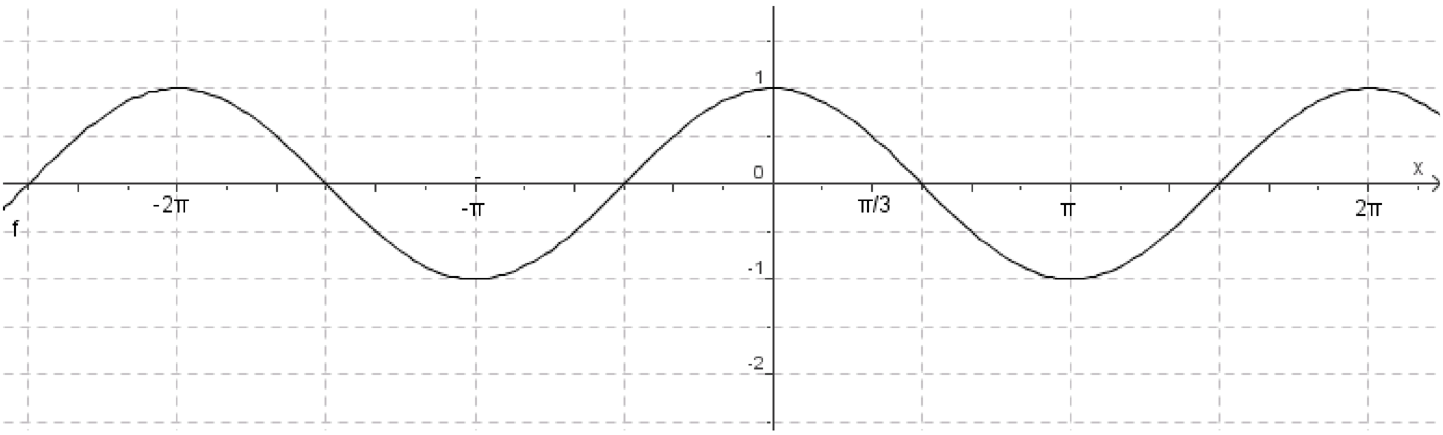
En complétant par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées:

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
cos(x)	-1	0	1	0	-1

Et par translation

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
cos(x)	-1	0	1	0	-1	0	1

IV-2-4- Représentation graphique (sur deux périodes)



La courbe s'appelle une sinusoïde

IV-3 La fonction sinus

IV-3-1 Périodicité:

La fonction sinus est une fonction périodique de période 2π. Il suffit donc d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur 2π.

IV-3-2 Parité:

Puisque $\sin(-x) = -\sin(x)$, la fonction sinus est impaire.
Le centre du repère est un centre de symétrie de la courbe représentative du sinus.
On peut donc étudier la fonction sinus sur un intervalle de longueur π.

IV-3-3 Variations

Par observation du mouvement de l'ordonnée d'un point sur le demi-cercle trigonométrique, on a:

x	0		$\pi/2$		π
sin(x)	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

En complétant par une symétrie par rapport au centre du repère

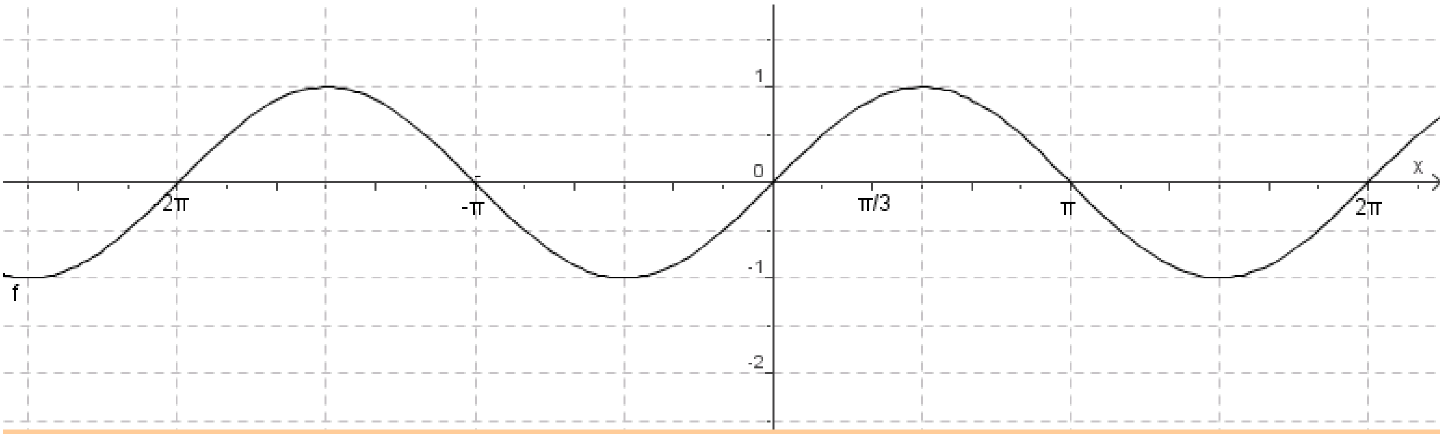
x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
sin(x)	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Et par translation

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
sin(x)	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

IV-3-4 Représentation graphique (sur deux périodes)

La courbe s'appelle une sinusoïde



Les deux courbes ensemble