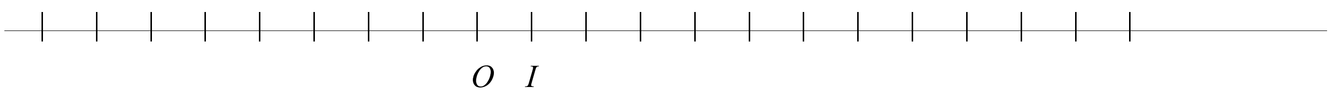
Index

I- Distance entre deux réels

I-1- Droite graduée

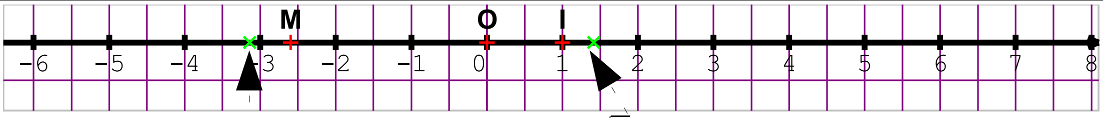
Une droite graduée est une droite orientée sur laquelle on a choisi un point origine *O* et un point *I* marquant l'unité.

(*O*; *I*) est un ***repère*** de la droite.



L'ensemble des réels est représenté par une droite graduée.

À tout point M de la droite graduée est associé un et un seul réel x appelé abscisse de M.
À tout réel est associé un et un seul point de la droite graduée.



Le nombre réel $-\pi$ le nombre réel $\sqrt{2}$

I-2- Définition

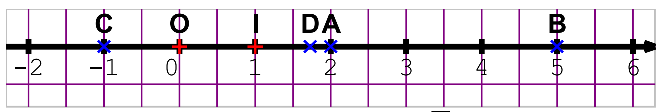
Soit deux points A et B sur une droite graduée d'abscisses respectives a et b. (a et b sont des nombres réels)

La distance entre les nombres a et b, notée $d(a;\, b)$, est égale à la distance AB. (L'unité est donnée par la longueur OI du repère).

$d(a;b) = AB$.

Pour calculer la distance de A à B, on retranche l'abscisse la plus petite à l'abscisse la plus grande.

Exemple:



A d'abscisse 2, B d'abscisse 5, C d'abscisse -1 et D d'abscisse $\sqrt{3}$

$AB = BA = 3$, $AD = DA = 2 - \sqrt{3}$, $OC = CO = 1$, $OD = DO = \sqrt{3}$, ...

A d'abscisse 2 et B d'abscisse 5, on a: $d(2;\, 5) = 3$ et aussi $d(5;\, 2) = 3$

A d'abscisse 2 et C d'abscisse -1, on a: $d(2;\, -1) = 3$ et aussi $d(-1;\, 2) = 3$

D d'abscisse $\sqrt{3}$ et B d'abscisse 5, on a: $d(\sqrt{3}\,;\, 5) = 5 - \sqrt{3}$ et aussi $d(5;\, \sqrt{3}) = 5 - \sqrt{3}$

O d'abscisse 0 et C d'abscisse -1, on a: $d(0;\, -1) = 1$ et aussi $d(-1;\, 0) = 1$

II- Valeur absolue d'un réel

II-1- Définition

Soit a et b deux réels, la valeur absolue du réel $b - a$, notée $|b-a|$ est la distance de a à b: $d(a;\, b)$

Exemple: (voir I-2)

$|5-2| = 3$ et $|2-5| = 3$

$|-1-2| = 3$ et $|2-(-1)| = 3$

$|5-\sqrt{3}| = 5 - \sqrt{3}$ et $|\sqrt{3}-5| = 5 - \sqrt{3}$

$|-1-0| = |-1| = 1$ et $|0-(-1)| = |1| = 1$

II-2- Conséquences

II-2-1

La valeur absolue est un réel positif ou nul (C'est une distance)

II-2-2

$|b-a| \; = \; |a-b|$ (En effet, $AB = BA$)

II-2-3

$|-a| \; = \; |a|$

Il suffit de faire $b = 0$ dans l'égalité précédente.

Ou encore, lorsqu'on a un réel a, $|a|$ est la distance de a à 0.

Par symétrie a et $-a$ sont à la même distance de 0.

II-2-4

Rappel: Pour calculer la distance de A à B, on retranche l'abscisse la plus petite à l'abscisse la plus grande.

On a alors: $|a-b| \; = \; \begin{cases} a-b \text{ si } a \geqslant b \\ b-a \text{ si } a \leqslant b \end{cases}$

et $|a| \; = \; \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } a \leqslant 0 \end{cases}$

Voir les exemples précédents

III- Applications

Pour ce qui concerne le programme de seconde, il suffit de retenir la méthode.

Méthode: Traduire la valeur absolue en termes de distance

Représenter graphiquement

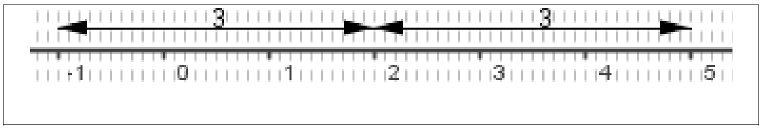
Conclure suivant la question

III-1- Résolutions d'équations de la forme |x – a| = r

III-1-1

Résoudre l'équation d'inconnue x: $|x-2| = 3$

On cherche les nombres à la distance 3 de 2.



On lit alors: –1 et 5.

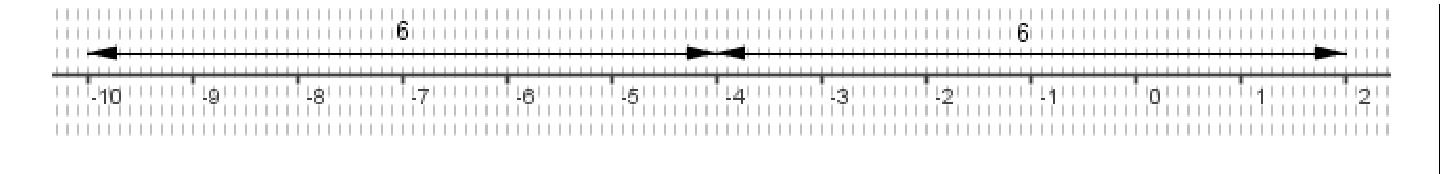
L'ensemble des solutions de $|x-2| = 3$ est: $S = \{-1; 5\}$

III-1-2

Résoudre l'équation d'inconnue x: $|x+4| = 6$

Comme $|x+4| = 6$ équivaut à $|x-(-4)| = 6$, on cherche les nombres à la distance 6 de –4.

On lit alors: –10 et 2.

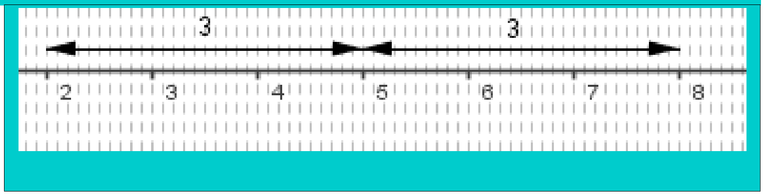


L'ensemble des solutions de $|x + 4| = 6$ est: $S = \{-10; 2\}$

III-1-3

Résoudre l'équation d'inconnue x: $|5 - x| = 3$

Comme $|5 - x| = 3$ équivaut à $|x - 5| = 3$, on cherche les nombres à la distance 3 de 5.



On lit alors: 2 et 8.

L'ensemble des solutions de $|5 - x| = 3$ est: $S = \{2; 8\}$

III-1-4

Résoudre l'équation d'inconnue x: $|x - 4| = -1$

Comme une valeur absolue est positive ou nulle, il n'y a aucune solution.

L'ensemble des solutions de $|x - 4| = -1$ est l'ensemble vide. $S = \varnothing$.

Synthèse

Pour résoudre les équations de la forme $|x - a| = r$,

attention: *Si on a:* $|x + b|$, *mettre sous la forme* $|x - (-b)|$

si $r < 0$, aucune solution.

si $r = 0$, une seule solution $x = a$

si $r > 0$, deux solutions. On place a sur la droite graduée et on se place de part et d'autre de a à la distance r;

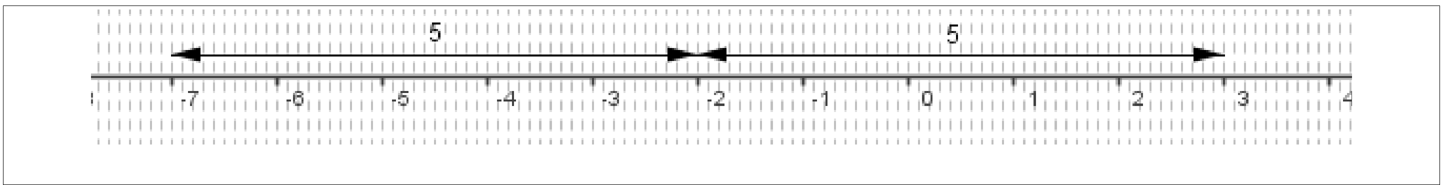
On lit les deux solutions $a - r$ et $a + r$.

III-2- Résolutions d'équations de la forme $|x - a| = |x - b|$

Résoudre l'équation d'inconnue x, $|x - 3| = |x + 7|$

$|x - 3| = |x + 7|$ équivaut à $|x - 3| = |x - (-7)|$

On cherche tous les nombres à égale distance de 3 et -7.



Il n'y a qu'un seul nombre qui est le centre (milieu) de l'intervalle $[-7; 3]$.

$$x = \frac{-7+3}{2} = -2$$

$|x - 3| = |x + 7|$ a pour unique solution le réel -2.

Synthèse

Pour résoudre les équations de la forme $|x - a| = |x - b|$, on cherche le nombre à égale distance de a et b, c'est-à-dire le c centre de l'intervalle $[a; b]$.

$c = \dfrac{a+b}{2}$

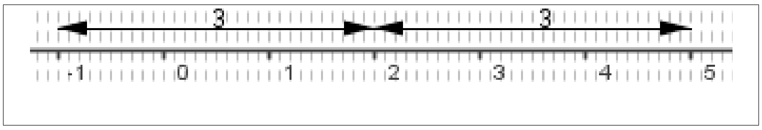
III-3- Résolutions d'inéquations de la forme $|x - a| \leqslant r$ ou $|x - a| \geqslant r$

III-3-1

III-3-1-1

Résoudre l'inéquation d'inconnue x: $|x - 2| \leqslant 3$

On cherche les nombres à une distance de 2 inférieure ou égale à 3.



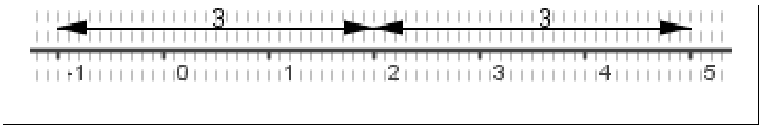
On lit alors: $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

L'ensemble des solutions de $|x - 2| \leqslant 3$ est: $S = [-1; 5]$

III-3-1-2

Résoudre l'inéquation d'inconnue x: $|x - 2| \geqslant 3$

On cherche les nombres à une distance de 2 supérieure ou égale à 3.



On lit alors: $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 5$.

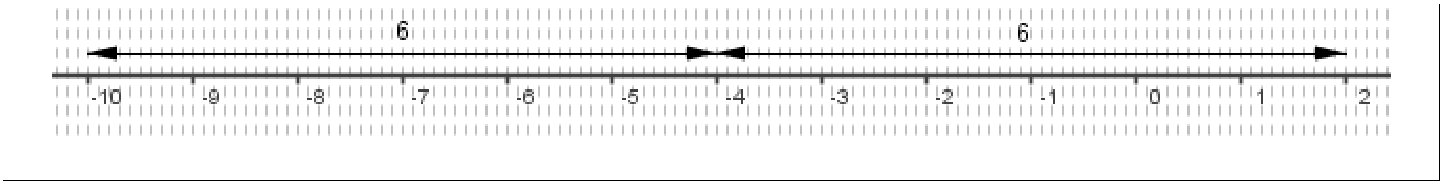
L'ensemble des solutions de $|x - 2| \geqslant 3$ est: $S =]-\infty; -1] \cup [5;+\infty[$.

III-3-2

III-3-2-1

Résoudre l'inéquation d'inconnue x: $|x + 4| \leqslant 6$

Comme $|x + 4| \leqslant 6$ équivaut à $|x -(- 4)| \leqslant 6$, on cherche les nombres à une distance de -4 inférieure ou égale à 6.



On lit alors: $-10 \leqslant x \leqslant 2$.

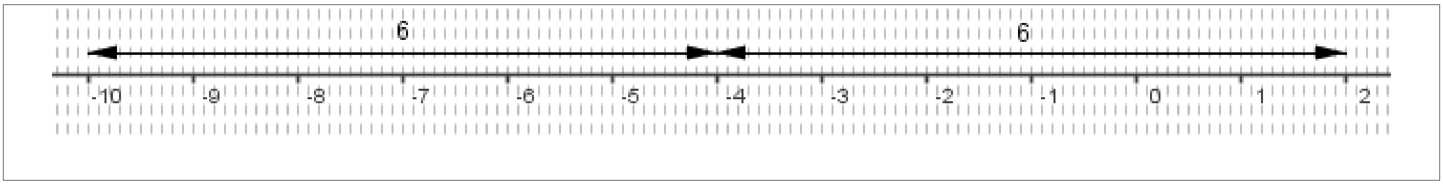
L'ensemble des solutions de $|x + 4| \leqslant 6$ est: $S = [-10; 2]$

III-3-2-2

Résoudre l'inéquation d'inconnue x: $|x + 4| \geqslant 6$

On cherche les nombres à une distance de –4 supérieure ou égale à 6.

On lit alors: $x \leqslant -10$ ou $x \geqslant 2$.



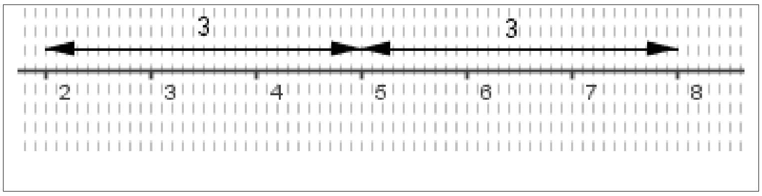
L'ensemble des solutions de $|x + 4| \leqslant 6$ est: $S =]-\infty; -10] \cup [2;+\infty[$

III-3-3

III-3-3-1

Résoudre l'inéquation d'inconnue x: $|5 - x| \leqslant 3$

Comme $|5 - x| \leqslant 3$ équivaut à $|x - 5| \leqslant 3$, on cherche les nombres à une distance de 5 inférieure ou égale à 3.



On lit alors: $2 \leqslant x \leqslant 8$.

L'ensemble des solutions de $|5 - x| \leqslant 3$ est: $S = [2; 8]$

III-3-3-2

Résoudre l'inéquation d'inconnue x: $|5 - x| \geqslant 3$

On cherche les nombres à une distance de 5 supérieure ou égale à 3.

On lit alors: $x \leqslant 2$ou $x \geqslant 8$.

L'ensemble des solutions de $|5 - x| \geqslant 3$ est: $S =]-\infty; 2] \cup [8; +\infty[$

III-3-4

III-3-4-1

Résoudre l'inéquation d'inconnue x: $|x - 4| \leqslant -1$

Comme une valeur absolue est positive ou nulle, il n'y a aucune solution.

L'ensemble des solutions de $|x - 4| \leqslant -1$ est l'ensemble vide. $S = \emptyset$.

III-3-4-2

Résoudre l'inéquation d'inconnue x: $|x - 4| \geqslant -1$

Comme une valeur absolue est positive ou nulle, l'inégalité est toujours vraie

L'ensemble des solutions de $|x - 4| \geqslant -1$ est l'ensemble des réels. $S = \mathbb{R}$.

III-4- Encadrements- Intervalles

Les inéquations précédentes montrent que l'ensemble des solutions des inéquations de la forme $|x - a| \leqslant r$ avec $r > 0$ est un intervalle.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

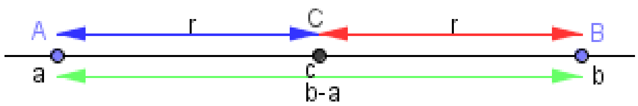
On appelle c le **centre** ou milieu de $[a; b]$.

On a alors: $c = \dfrac{a+b}{2}$

Le réel $b - a$ est l'**amplitude ou longueur** de l'intervalle.

On pose $r = \dfrac{b-a}{2}$ (rayon)

On a les équivalences suivantes:

Intervalle	Encadrement	Inéquation	Représentation graphique
$x \in [a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	$\lvert x - c\rvert \leqslant r$	

IV- Synthèse pour la résolution des équations et inéquations.

On traduit $|\text{expression}|$ par une distance.
Ne pas oublier qu'on doit mettre sous la forme d'une différence $x - y$ (où y peut être nul).
On place sur une droite graduée les éléments ....
On traduit les symboles $=, <, >, \leqslant, \geqslant$ par la position des points dur l'axe.
On écrit les solutions lues sur l'axe à l'aides des symboles d'ensemble {...; ...; ... } ou d'intervalles [...; ...] etc.

r est un réel **strictement positif**
$|x-a| = r$ a pour ensemble de solutions $S = \{a - r; a + r\}$
$|x-a| \leqslant r$ a pour ensemble de solutions $S = [a - r; a + r]$
$|x-a| \geqslant= r$ a pour ensemble de solutions $S =]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$.