index

I- Préliminaire:

Faire des maths:

ce n'est pas appliquer un livre de recettes.

Les techniques, les méthodes

Les techniques, les méthodes à utiliser s'appuient toujours sur des connaissances de bases ....

et s'appliquent **sous conditions** ...

c'est-à-dire:

avant d'appliquer une technique, une méthode, on doit s'assurer qu'on est bien dans le cadre où cette technique, cette méthode s'appliquent.

Les propriétés, les théorèmes

Les propriétés, les théorèmes s'énoncent sous la forme: Si (hypothèses) alors (conclusion)

On cherche à appliquer une propriété pour montrer la conclusion (la phrase qui suit "alors")

Pour cela, on est amené à prouver les hypothèses de la propriété.

Exemples:

Propriété: Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Pour appliquer ce théorème, on prouve qu'un certain triangle est un triangle rectangle et ensuite, on peut calculer la longueur d'un des côtés connaissant les deux autres.

II- Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Prérequis:

- Connaître le vocabulaire: condition suffisante, condition nécessaire

- Connaître la définition d'une bijection

II-1- Énoncé du théorème

Si f est une fonction définie sur un intervalle I,

si f est continue sur cet intervalle I,

si f est strictement croissante sur cet intervalle I,

alors

f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$

II-2- Conséquence du théorème

Dans les **conditions** du théorème, pour tout réel k de J, il existe une et une seule solution α dans I à l'équation $f(x) = k$.

III- Analyse de ce théorème

III- 1- À quoi sert-il? Pour quelle question l'appliquer? Que permet-il de montrer?

Ce théorème **sert à montrer <u>l'existence</u> d'une et une seule solution** à l'équation de la forme $f(x) = k$

III- 2- Quand peut-on l'appliquer?

Lorsque **les conditions suffisantes** du théorème sont vérifiées.

Pour ce théorème, on connaît une fonction f,

on sait prouver qu'elle est continue sur un intervalle I,

on sait prouver qu'elle est strictement monotone sur I,

on sait déterminer l'intervalle J image de I par f.

on vérifie que le réel k est dans J.

III- 3- Comment l'appliquer? Un exemple

Montrer que l'équation $\cos x = x$ a une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Donner un encadrement à (précision) de cette solution.

Commentaire:

L'énoncé n'est pas sous la forme $f(x) = k$.

On pose $f(x) = \cos x - x$.

L'énoncé s'écrit maintenant:

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f: x \mapsto \cos x - x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Continuité

La fonction f, étant la somme de fonctions continues, est continue (on sait que les fonctions trigonométriques ($x \mapsto \cos x$) et que les fonctions affines ($x \mapsto -x$) sont continues).

Stricte monotonie

La fonction f , étant la somme de fonctions dérivables, est dérivable et $f'(x) = -\sin x - 1$

Or, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, d'où, $-1 \leqslant -\sin x \leqslant 1$, puis, $-2 \leqslant -\sin x - 1 \leqslant 0$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $\sin x = -1$ si et seulement si $x = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

La dérivée est donc strictement négative pour $x \neq -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et ne s'annule que pour des valeurs ponctuelles de x.

f est par conséquent strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Intervalle image

Remarques:

Comme f est continue, on sait que l'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ est un intervalle.
Comme f est strictement décroissante, il suffit d'étudier f aux bornes de l'intervalle pour déterminer l'intervalle image.
La fonction cosinus n'a pas de limites à l'infini, on ne peut donc pas appliquer les théorèmes concernant limites et opérations.

On a: $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

d'où $-1 - x \leqslant \cos x - x \leqslant 1 - x$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} -1 - x = +\infty$ et $-1 - x \leqslant \cos x - x$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} (\cos x - x) = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\cos x - x \leqslant 1 - x$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (\cos x - x) = -\infty$.

Conclusion: l'intervalle image est $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

$k \in J = f(I)$?

$0 \in \mathbb{R}$ est évidemment vrai

Les conditions du théorème sont vérifiées, on peut donc conclure:

l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution α dans $\mathbb{R}$.

Complément:

Maintenant qu'on a montré l'existence et l'unicité de la solution, on peut réduire l'intervalle pour affiner l'encadrement de la solution α.

$f(0) = \cos 0 - 0 = 1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

L'image de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ est $\left[-\dfrac{\pi}{2};1\right]$ et $0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2};1\right]$, donc, $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

Une valeur approchée de $f(0,7)$ est 0,064 ... et celle de $f(0,8)$ est – 0,103...

Comme – 0,103... < 0 < 0,064 ..., on a: $0,7 < \alpha < 0,8$

En continuant la recherche, on peut montrer $0,73 < \alpha < 0,74$ et ainsi de suite...

Conclusion:

l'équation $\cos x = x$ a une et une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

avec $0,73 < \alpha < 0,74$ à 10^{-2} près.

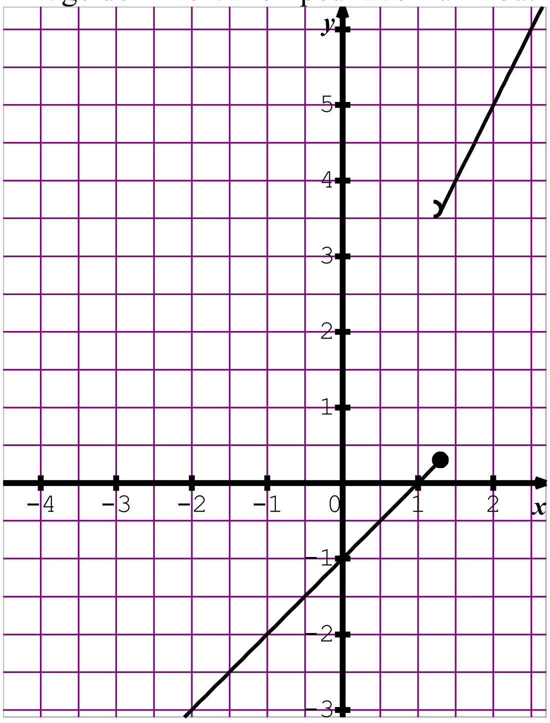
IV- Quand ne peut-on pas l'appliquer?

Dés qu'une des conditions suffisantes n'est pas prouvée, on ne peut pas appliquer le théorème.

*** f n'est pas définie sur un intervalle... la question ne se pose pas

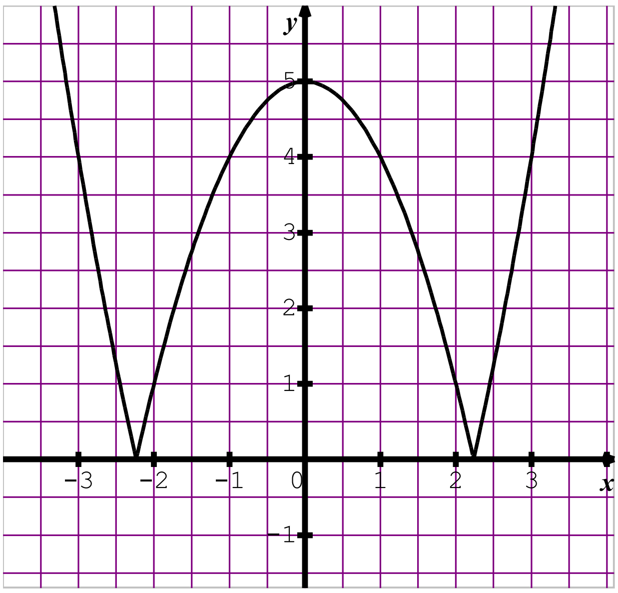
*** f est définie sur un intervalle, f est strictement monotone et f n'est pas continue sur cet intervalle I.

Le théorème ne s'applique pas car l'image de l'intervalle I peut avoir un trou. Ce n'est pas un intervalle.



Une telle fonction est définie sur [–2; 2], est strictement croissante sur [–2; 2],
$f(-2) = -3$; $f(2) = 5$
mais, l'équation $f(x) = k$ avec $k \in]0,3; 3,6]$ n'a aucune solution.

*** f est continue sur I et f n'est pas strictement monotone.
On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, mais, on ne peut pas appliquer son corollaire de la bijection.



Une telle fonction est définie sur [–3; 3], est continue mais elle n'est pas monotone sur [–3; 3].
Le minimum vaut 0, le maximum vaut 5.
Pour $k \in [0; 5]$, il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = k$.