index

I- Préliminaire:

Faire des maths:

ce n'est pas appliquer un livre de recettes.

Les techniques, les méthodes

Les techniques, les méthodes à utiliser s'appuient toujours sur des connaissances de bases ....

et s'appliquent **sous conditions** ...

c'est-à-dire:

avant d'appliquer une technique, une méthode, on doit s'assurer qu'on est bien dans le cadre où cette technique, cette méthode s'appliquent.

Les propriétés, les théorèmes

Les propriétés, les théorèmes s'énoncent sous la forme: Si (hypothèses) alors (conclusion)

On cherche à appliquer une propriété pour montrer la conclusion (la phrase qui suit "alors")

Pour cela, on est amené à prouver les hypothèses de la propriété.

Exemples:

Propriété: Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Pour appliquer ce théorème, on prouve qu'un certain triangle est un triangle rectangle et ensuite, on peut calculer la longueur d'un des côtés connaissant les deux autres.

II- Démontrer une propriété

II-1- Forme de l'énoncé: Si ... alors ...

Une propriété mathématique peut s'énoncer sous la forme: Si (hypothèses ou conditions suffisanteses) alors (conclusion ou conditions nécessaires)

II-2- Pour démontrer la propriété:

on pose les conditions suffisantes ou hypothèses de la propriété(on considère qu'elles sont vraies)

et on amène les conditions nécessaires par des opérations, des enchaînements logiques, par l'utilisation de propriétés déjà prouvées.

II-3- Trois exemples:

II-3-1- Propriété de Pythagore:

Énoncé

Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Une preuve (méthode utilisée par Euclide)

On se donne un triangle ABC rectangle en A

On cherche dans ce cas à représenter BC^2, AB^2, AC^2.

Recherche

Géométriquement, on sait que ce sont les mesures des aires de carrés. (Voir construction)

On découpe les carrés de façon à montrer que la somme des aires des carrés construits sur [AB] et sur [AC] est égale à l'aire du carré construit sur [BC].

Le carré $BCIH$ est partagé en deux rectangles $BJKH$ et $JCIK$.

$EBCM$ et $ABHL$ sont des parallélogrammes (L'aire d'un parallélogramme est égale à $b\times h$ où b est une mesure d'une base et *h* la mesure de la hauteur relative à cette base.(largeur de la bande).

Montrons que l'aire du carré *ABED* est égale à l'aire du rectangle *BJKH*.

L'aire du carré *ABED* est égale à $EB \times BA$

L'aire du parallélogramme *EBCM* est égale à $EB \times BA$ et est égale au double de l'aire du triangle *EBC*.

L'aire du rectangle *BJKH* est égale à $BH \times BJ$

L'aire du parallélogramme *ABHL* est égale à $BH \times BJ$ et est égale au double de l'aire du triangle *ABH*.

Les triangles *EBC* et *ABH* sont isométriques, car, $EB = AB$, $\widehat{EBC} = \widehat{ABH} = 90° + \overrightarrow{ABC}$, $BC = BH$.

Rédaction:

La lettre $\mathscr{A}$ désigne l'aire du polygone.

On sait: $EB = AB$, $\widehat{EBC} = \widehat{ABH} = 90° + \overrightarrow{ABC}$, $BC = BH$ donc les triangles *EBC* et *ABH* sont isométriques.

Par conséquent: $\mathscr{A}(EBC) = \mathscr{A}(ABH)$ (1)

$\mathscr{A}(ABED) = EB \times BA = \mathscr{A}(EBCM)$

Or, $\mathscr{A}(EBCM) = 2\times \mathscr{A}(EBC)$, d'où, $\mathscr{A}(ABED) = 2\times \mathscr{A}(EBC)$ (2)

$\mathscr{A}(BJKH) = BH\times BJ = \mathscr{A}(ABHL)$

Or, $\mathscr{A}(ABHL) = 2\times \mathscr{A}(ABH)$ (3)

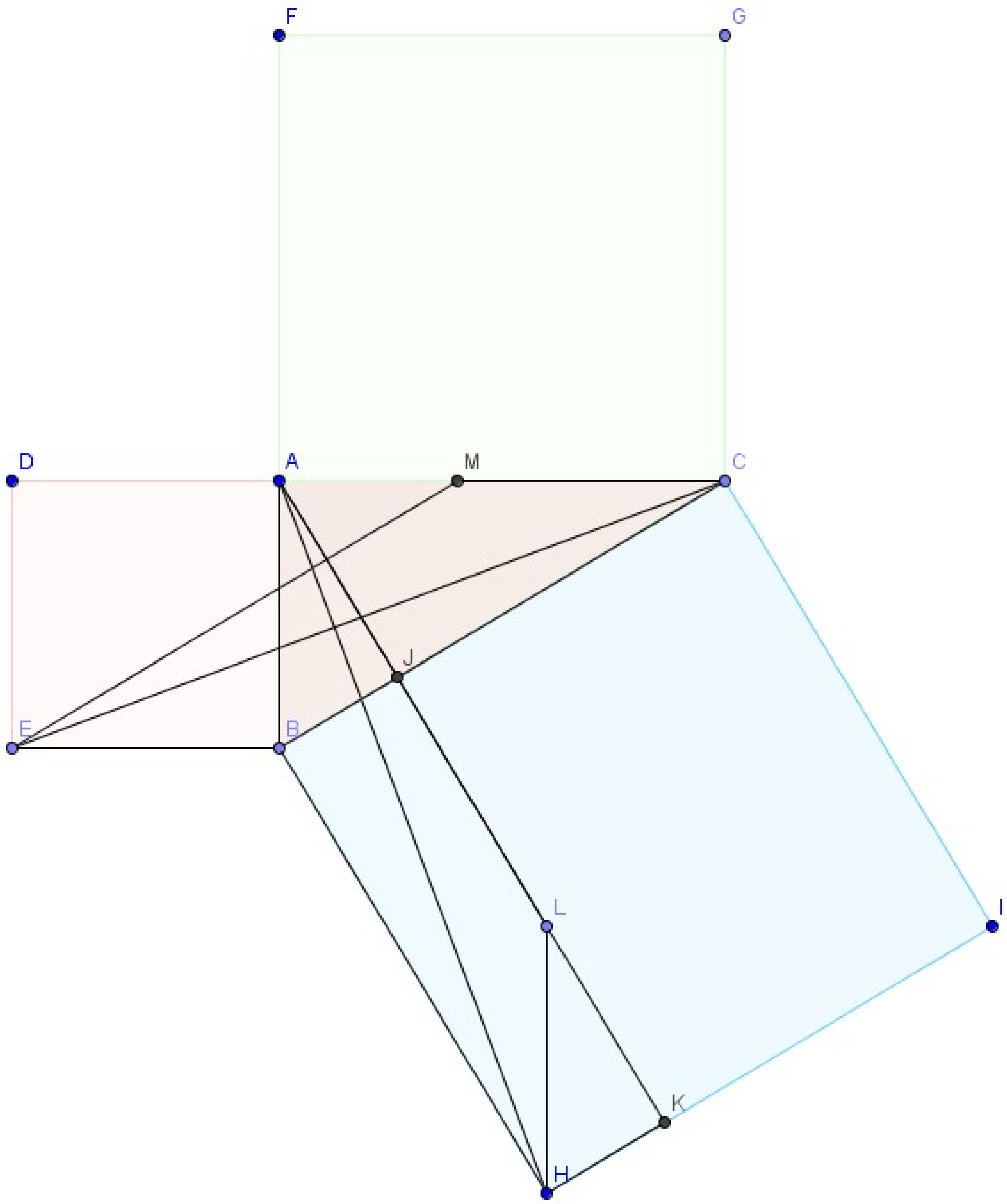
Les égalités (1), (2), (3) montrent que $\mathscr{A}(ABED) = \mathscr{A}(BJKH)$

Donc, $\mathscr{A}(BJKH) = AB^2$

On peut remarquer que le découpage ne dépend pas du nom des points et que la situation est analogue pour le carré *ACGF* et le rectangle *CJKI*.

Donc, $\mathscr{A}(CJKI) = AC^2$.

Comme $\mathscr{A}(BJKH) + \mathscr{A}(CJKI) = \mathscr{A}(BCIH) = BC^2$, le théorème est prouvé.



II-3-2- Démontrer qu'une fonction est strictement croissante sur un intervalle *I*.

Énoncé de la définition:

On dit qu'une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si, pour tout a de I et pour tout b de I tels que $a < b$ alors $f(a) < f(b)$

Une démonstration

Démontrer que la fonction définie par $x \mapsto x^2 + 1$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

On prend deux réels (quelconques) a et b dans $[0; +\infty[$ et on les ordonne. On a donc en hypothèse: $0 \leqslant a < b$.

On calcule $f(a) = a^2 + 1$ et $f(b) = b^2 + 1$

On cherche à classer $f(a)$ et $f(b)$ à partir de l'hypothèse et des règles déjà prouvées sur les inégalités.

Par exemple: $0 \leqslant a < b$ En multipliant par a positif tous les membres de l'inégalité, il vient:
$0 \leqslant a^2 < a\,b$ (1)

$0 \leqslant a < b$ En multipliant par b positif tous les membres de l'inégalité, il vient:
$0 \leqslant a\,b < b^2$ (2)

Par comparaison de (1) et (2): $0 \leqslant a^2 < a\,b < b^2$
Soit: $a^2 < b^2$ et en ajoutant 1 aux deux membres de l'inégalité, on obtient:
$a^2 + 1 < b^2 + 1$, c'est-à-dire: $f(a) < f(b)$

Conclusion:
On a montré:
Si $0 \leqslant a < b$ alors $f(a) < f(b)$
La fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

II-3-3- Une démonstration par l'absurde (et disjonction des cas)

Démonstration par l'absurde

On suppose que la conclusion de la propriété (condition nécessaire) n'est pas vérifiée et on montre qu'alors il y a une contradiction avec une des hypothèses (conditions suffisantes).

Disjonction des cas

Dans des situations ou cas différents, certaines opérations (par exemples: diviser par 0, nombre négatif, nombre positif, ...), certaines considérations géométriques (par exemples: alignement de points, parallélisme, points confondus, ...) mènent à distinguer plusieurs cas.

Plusieurs cas disjoints sont traités de façon à prendre en compte toutes les situations possibles

Énoncé: Théorème du toit

Si trois plans (P), (Q) et (R) de l'espace sont sécants deux à deux alors les trois droites d'intersection sont concourantes ou parallèles.

Preuve:

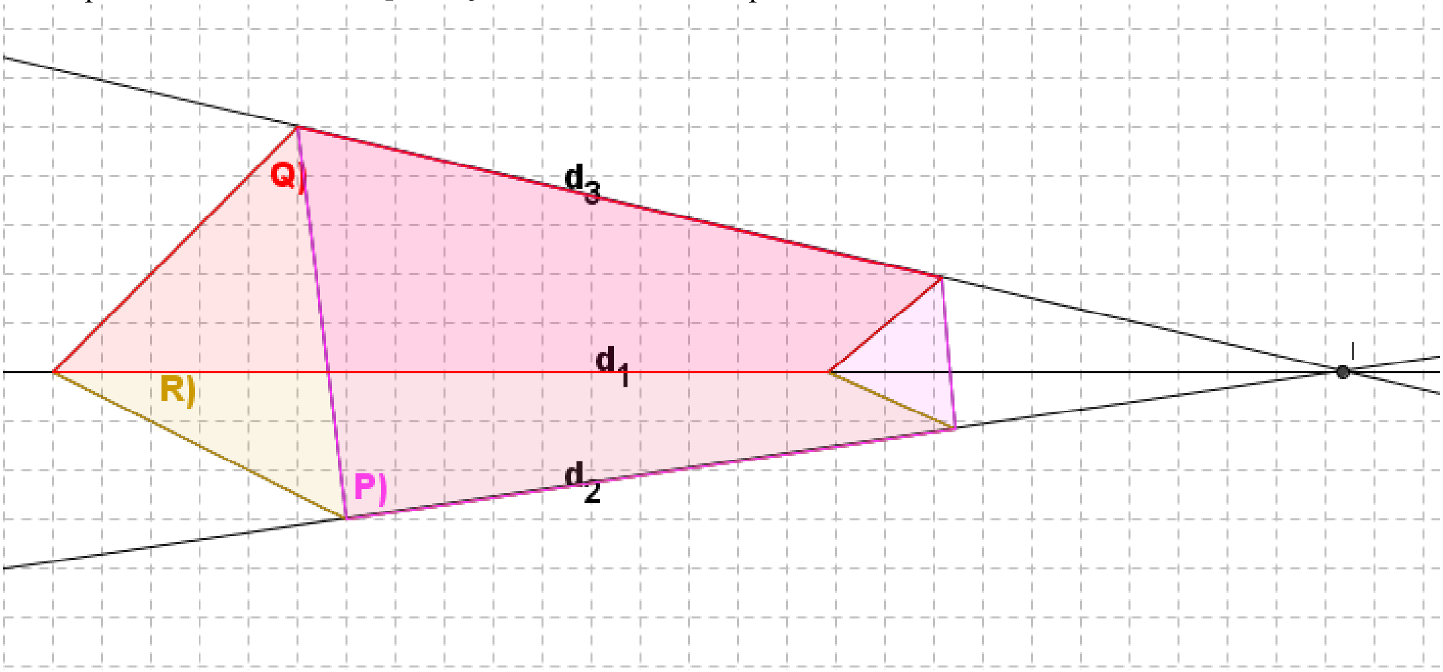
On appelle d_1 la droite d'intersection de P et Q ($d_1 = P \cap Q$)
et d_2 la droite d'intersection de P et R ($d_2 = P \cap R$)
et d_3 la droite d'intersection de Q et R ($d_3 = Q \cap R$)

Deux cas disjoints:

* d_2 et d_3 sécantes en un point I.
** d_2 et d_3 parallèles

Premier cas:

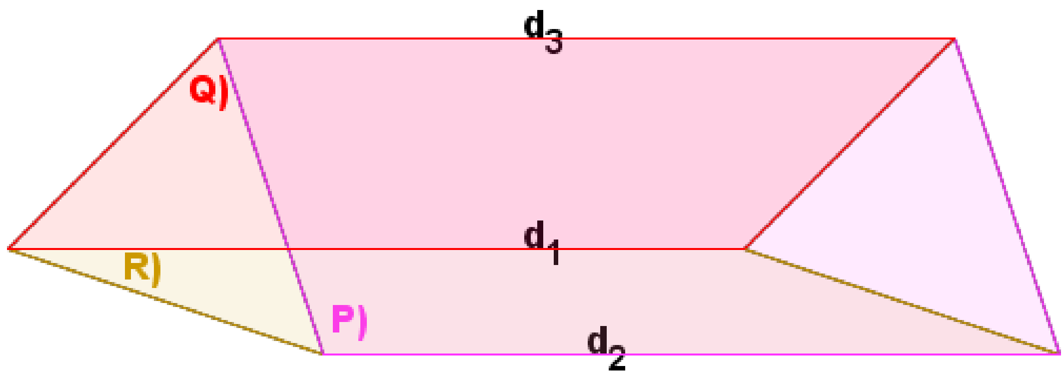
On se place dans le cas où d_2 et d_3 sont sécantes en un point *I*.



On a : $I \in d_2$ donc $I \in (P)$ (car $d_2 \subset (P)$)
et $I \in d_3$ donc $I \in (Q)$ (car $d_3 \subset (Q)$).
I est donc un point commun à (*P*) et à (*Q*).
Par conséquent, *I* appartient à la droite d_3 intersection de (*P*) et (*Q*).
Conclusion du premier cas: Les droites d_1 , d_2 et d_3 sont concourantes en *I*.

Deuxième cas:

On se place dans le cas où d_2 et d_3 parallèles.



Raisonnement par l'absurde

On suppose que d_1 et d_2 sont sécantes en un point *J*.

On a : $J \in d_1$ donc $J \in (Q)$ (car $d_1 \subset (Q)$)
et $J \in d_2$ donc $J \in (R)$ (car $d_2 \subset (R)$).
J est donc un point commun à (Q) et à (R).
J est un point de d_3 intersection des plans (Q) et (R).
En introduisant l'hypothèse: d_1 et d_2 sont sécantes en un point J, on arrive à la conclusion d_2 et d_3 sont sécantes en J, ce qui contredit la donnée: d_2 et d_3 parallèles.
d_1 et d_2 sont par conséquent parallèles

III- Apprendre une propriété

III-1 Quand peut-on dire qu'on connaît la propriété?

Une propriété est bien apprise lorsqu'on est capable de dire:

- les conditions dans lesquelles elle peut s'appliquer

- ce qu'elle permet de prouver

III-2- les exemples

Dans l'exemple de la propriété de Pythagore:

Elle s'applique lorsqu'on sait que le triangle est rectangle

Elle permet de calculer une longueur connaissant les deux autres

Dans l'exemple d'une fonction strictement croissante

On l'applique quand on connaît la variation d'une fonction sur un **intervalle** et lorsqu'on a deux nombres **ordonnés** dans **cet intervalle**

Elle permet d'ordonner leurs images par cette fonction

Dans l'exemple du théorème du toit

On l'applique quand on connaît trois plans sécants deux à deux

Elle permet de donner la position relative de droites de l'espace, de montrer l'alignement de points

IV- Utilisation d'une propriété

IV-1- Comment utiliser une propriété

On sait qu'on peut utiliser la propriété quand on sait que la conclusion de la propriété permettra de prouver le résultat demandé

On cherche alors si les conditions d'application (hypothèses ou conditions suffisantes) de la propriété sont vérifiées

et on démontre si nécessaire ces conditions

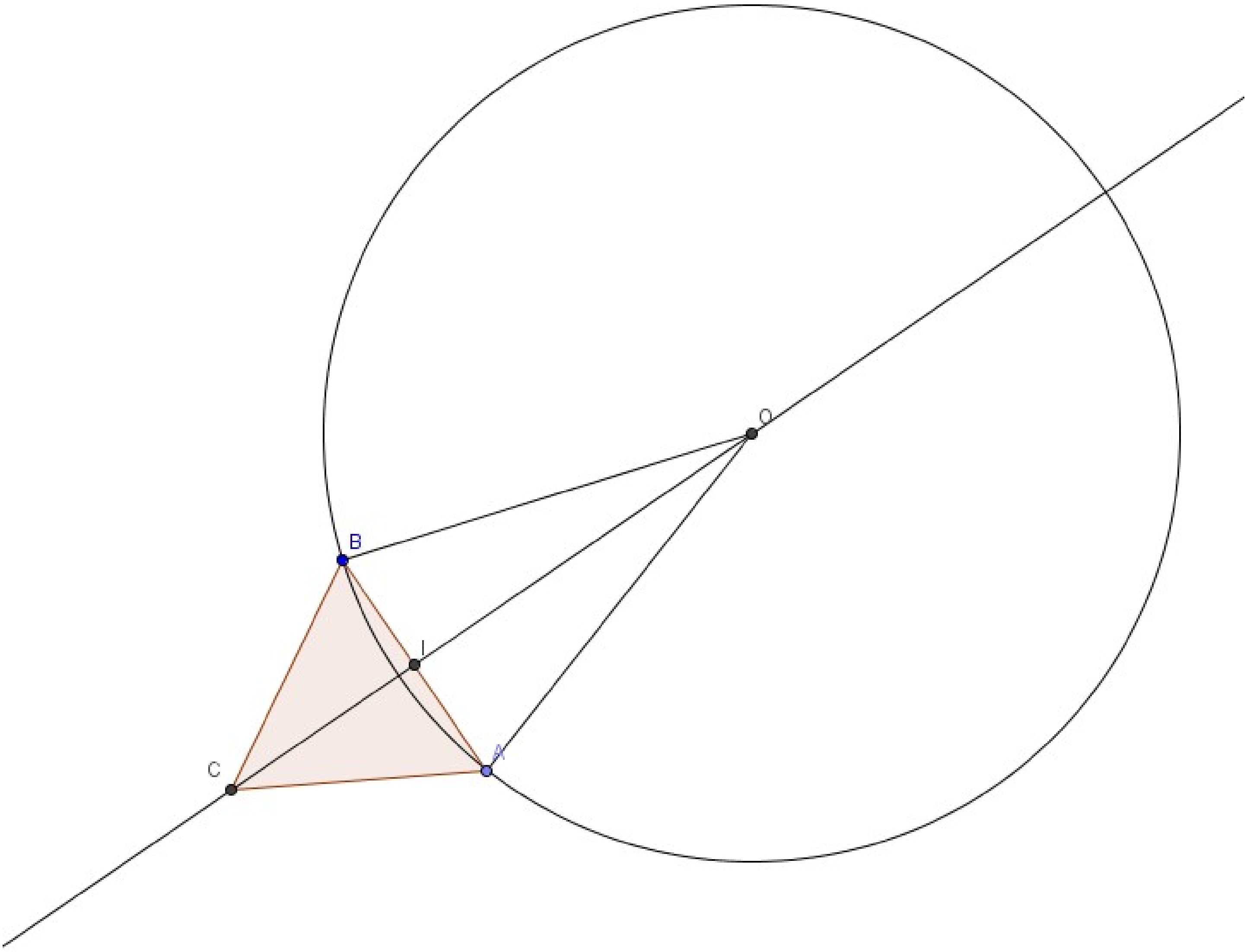
IV-2- Les exemples

Dans l'exemple de la propriété de Pythagore:

Dans la figure suivante, on sait que ABC est un triangle équilatéral de côté 3.

On a construit le cercle de centre O, de rayon 5 passant par A et par B.

La droite (OC) coupe la droite (AB) en I. Calculer la longueur OI



Analyse: Il s'agit de calculer une longueur.

On connaît les longueurs $OA = OB = 5$ et les longueurs $AB = AC = BC = 3$

On peut penser à appliquer le théorème de Pythagore à condition de montrer qu'on a un triangle rectangle

Démonstration:

Comme $OA = OB$ et $CA = CB$, la droite (OC) est la médiatrice du segment [AB].

La droite (OC) coupe [AB] perpendiculairement en son milieu I.

On a donc: OAI est un triangle rectangle en I et $AI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3}{2}$.

On peut appliquer le théorème de Pythagore: $OA^2 = OI^2 + AI^2$

$OI^2 = OA^2 - AI^2 = 25 - \frac{9}{4} = \frac{91}{4}$

Conclusion: $OI = \frac{\sqrt{91}}{2}$

Dans l'exemple d'une fonction strictement croissante

On donne deux nombres $\alpha = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \sqrt{2} + 1$

Comparer les deux nombres $A = \alpha^2 + 3\alpha - 4$ et $B = \beta^2 + 3\beta - 4$

Analyse:

Il s'agit de comparer deux nombres A et B qui sont images de α et β par la fonction f: $x \mapsto x^2 + 3x - 4$

On peut penser à appliquer la variation de la fonction f à condition de déterminer les variations et de vérifier que les nombres α et β sont dans un intervalle où f est monotone (ne change pas de variations)

Démonstration: (niveau première)

La dérivée de f est $f'(x) = 2x + 3$

Comme $2x + 3 > 0$ si et seulement si $x > -\frac{3}{2}$, la fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

D'autre part, α et β sont deux réels strictement supérieurs à $-\frac{3}{2}$.

$A = f(\alpha)$ et $B = f(\beta)$ sont donc classés dans le même ordre que α et β.

Il reste à ordonner α et β.

La recherche des valeurs approchées montrent que $\alpha < \beta$.

Conclusion: $A < B$

Dans l'exemple du théorème du toit

Soit la pyramide $SABCD$ où $ABCD$ est un trapèze tel que $(AB) \parallel (CD)$.

1) Étudier les droites d'intersection des plans (SAB), (SCD) et (ABC)
2) Étudier les droites d'intersection des plans (SAC), (SBD) et (ABC)
3) Étudier les droites d'intersection des plans (SAD), (SBC) et (ABC)

Analyse:

Dans les trois cas, les plans sont sécants deux à deux par définition d'une pyramide.
Les droites d'intersection seront soit concourantes, soit parallèles d'après le théorème du toit.

Démonstration:

1) Il est évident que (SAB) et (ABC) ont pour intersection la droite (AB) et que (SCD) et (ABC) ont pour intersection la droite (CD).
Or, ces deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, d'où, la droite d'intersection de (SAB) et (SCD) est parallèle à (AB) et à (CD).
Comme S est commun aux plans (SAB) et (SCD), la droite d'intersection de ces deux plans est la parallèle à (AB) passant par S.

2) Il est évident que (SAC) et (ABC) ont pour intersection la droite (AC) et que (SBD) et (ABC) ont pour

intersection la droite (*BD*).
Or, ces deux droites (*AC*) et (*BD*) sont sécantes (diagonales du trapèze) en un point *I,* d'où, la droite d'intersection de (*SAC*) et (*SBD*) passe par le point *I.*
Comme *S* est commun aux plans (*SAC*) et (*SBD*), la droite d'intersection de ces deux plans est la droite (*SI*).

3) Il est évident que (*SAD*) et (*ABC*) ont pour intersection la droite (*AD*) et que (*SBC*) et (*ABC*) ont pour intersection la droite (*BC*).
Or, ces deux droites (*AD*) et (*BC*) sont sécantes (côtés non parallèles du trapèze) en un point *J,* d'où, la droite d'intersection de (*SAD*) et (*SBC*) passe par le point *J.*
Comme *S* est commun aux plans (*SAD*) et (*SBC*), la droite d'intersection de ces deux plans est la droite (*SJ*).