Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Index

Objectif: 1
Préliminaires: 1
I- Première méthode: X = ... = Y....... 1
Retenir:....... 1
II- Deuxième méthode: X = ... = Z et Y = ... = Z....... 1
Retenir: 2
III- Troisième méthode: X – Y = 0....... 2
Retenir: 2
IV- Exercices: 2

Activité sans calculatrice.

Objectif:

Comment démontrer que deux nombres (ou deux expressions) sont égaux?

Il s'agit de donner quelques méthodes où la consigne est : Montrer que $X = Y$.

Travailler le raisonnement

0- Préliminaires:

*** En tapant $\sqrt{2}$, la calculatrice affiche 1,41421.... et en tapant $\dfrac{9899501}{7000000}$, elle affiche 1,41421...

A-t-on l'égalité: $\sqrt{2} = \dfrac{9899501}{7000000}$? Pourquoi ?

*** Soit $f(x) = (x-2)(x+5)$ et $g(x) = 2x^2 + 2x - 10$

Calculer $f(0)$ et $g(0)$, calculer $f(1)$ et $g(1)$. Peut-on conclure, pour **tout** x, $f(x) = g(x)$?

Choisir une autre valeur pour x et calculer la valeur correspondante des expressions. Que conclure ?

I- Première méthode: *X* = ... = *Y*

Méthode :

On pose un des membres de l'égalité, on développe, réduit, ... , et, on obtient l'autre membre de l'égalité

Démontrer que

a) $\dfrac{0{,}6\times 10^3}{1200}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{6}$

b) $\sqrt{2}+1=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ (*Aide : multiplier par* $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$ *le membre de gauche*).

c) pour tout nombre réel x, $(2x-3)(x+5) = 2x^2 + 7x - 15$

d) pour tout nombre réel x différent de 2, $\dfrac{5x-1}{x-2}=5+\dfrac{9}{x-2}$

Retenir:

Pour démontrer une égalité de la forme $X = Y$, **on peut transformer par étapes successives** un membre de l'égalité pour obtenir l'autre.

$X =$ .....

$X =$ .....

.....

$X = Y$

II- Deuxième méthode: *X* = ... = *Z* et *Y* = ... = *Z*

Méthode :

On traite séparément les deux membres de l'égalité, on développe, réduit, ... , et, on obtient une troisième expression.

Démontrer que

a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$

b) $(\sqrt{2} - 1)(10\sqrt{2} + 14) = (\sqrt{2}+2)^2$

c) pour tout nombre réel x, $(x-3)(x+2) - x^2 + x(x-4) = (x-6)(x+1)$

Retenir:

Pour démontrer une égalité de la forme $X = Y$, **on peut transformer X et Y** et montrer **qu'ils sont égaux à un même troisième Z.**

$X = ...$ et $Y = ...$

$X = ...$ et $Y = ...$

....

$\boldsymbol{X = Z}$ **et** $\boldsymbol{Y = Z}$ **, donc,** $\boldsymbol{X = Y}$

III- Troisième méthode: $X - Y = 0$

Méthode :

On pose la différence des deux membres, on développe, réduit, ... , et, on montre que cette différence est nulle.

Démontrer que

a) pour tout nombre réel x différents de -1 et de 2, $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \frac{x+3}{x+1}$

b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Retenir:

Pour démontrer une égalité de la forme $X = Y$, on peut poser la différence $X - Y$
et montrer par le calcul que cette différence est nulle.

$X - Y = ...$

$X - Y = ...$

....

$X - Y = 0$ donc, $X = Y$

IV- Exercices:

I- En choisissant la méthode qui paraît la plus adaptée, démontrer les égalités suivantes:

1) Pour tout réel x, $x^2 - 12x + 35 = (x-5)(x-7)$

2) Pour tout x différent de -1, $2 + \frac{x^2-2}{x+1} = x + 1 - \frac{1}{x+1}$

3) Pour tout x différent de 2, $3x + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{3x^2-5x-3}{x-2}$

4) Pour tout x, $\sqrt{x^2+3} - x = \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$

5) Pour tous nombres réels a, b, c, d, $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

II- Les égalités suivantes sont-elles vraies?

1) Pour tout x réel, $(2x+1)(x-1) = x^2 - 2x + 1$

2) Pour tous nombres réels a et b, $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4a\,b$