Activité sans calculatrice.

Objectif: Comment démontrer que deux nombres (ou deux expressions) sont égaux?
Travailler le raisonnement

Préliminaires:

*** En tapant $\sqrt{2}$, la calculatrice affiche 1,41421.... et en tapant $\frac{9899501}{7000000}$, elle affiche 1,41421...

A-t-on l'égalité: $\sqrt{2} = \frac{9899501}{7000000}$?

Non, car, $\sqrt{2}$ est un réel non rationnel et $\frac{9899501}{7000000}$ est un rationnel.
Les deux nombres ne sont pas de même nature.
Ils ne peuvent pas être égaux.

*** Soit $f(x) = (x-2)(x+5)$ et $g(x) = 2x^2 + 2x - 10$
Calculer $f(0)$ et $g(0)$, calculer $f(1)$ et $g(1)$.
$f(0) = -10$ et $g(0) = -10$
$f(1) = -6$ et $g(1) = -6$.
Peut-on conclure, pour **tout** x, $f(x) = g(x)$?
Non, il n'y a aucune raison pour que les autres images soient égales.
Choisir une autre valeur pour x et calculer la valeur correspondante des expressions.
Par exemple: $f(2) = 0$ et $g(2) = 2$

Première méthode: Partir de l'un des membres de l'égalité pour obtenir l'autre.

Démontrer que a) $\frac{0{,}6\times10^3}{1200}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$

$$\frac{0{,}6\times10^3}{1200}+\frac{2}{3} = \frac{6000}{1200}+\frac{2}{3} = \frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

b) $\sqrt{2}+1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$$\sqrt{2}+1 = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

Retenir: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$

c) pour tout nombre réel x, $(2x-3)(x+5) = 2x^2 + 7x - 15$

En développant le premier membre
$(2x-3)(x+5) = 2x^2 + 10x - 3x - 15$
$= 2x^2 + 7x - 15$

d) pour tout nombre réel x différent de 2, $\frac{5x-1}{x-2}=5+\frac{9}{x-2}$

En mettant au même dénominateur le second membre:

$$5+\frac{9}{x-2} = \frac{5(x-2)+9}{x-2} = \frac{5x-1}{x-2}$$

Retenir:

Pour démontrer une égalité de la forme $X = Y$, on peut transformer par étapes successives un membre de l'égalité pour obtenir l'autre.
$X = ...$
$X = ...$
.....
$X = Y$

Deuxième méthode: Montrer que les deux nombres sont égaux à un même troisième.

Démontrer que a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{4\times 3} = \frac{1}{12}$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Conclusion: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

b) $(\sqrt{2} - 1)(10\sqrt{2} + 14) = (\sqrt{2}+2)^2$

$(\sqrt{2} - 1)(10\sqrt{2} + 14) = 10\times 2 + 14\sqrt{2} - 10\sqrt{2} - 14 = 6 + 4\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}+2)^2 = 2 + 4\sqrt{2} + 4 = 6 + 4\sqrt{2}$

Conclusion: $(\sqrt{2} - 1)(10\sqrt{2} + 14) = (\sqrt{2}+2)^2$

c) pour tout nombre réel x, $(x-3)(x+2) - x^2 + x(x-4) = (x-6)(x+1)$

$(x-3)(x+2) - x^2 + x(x-4) = x^2 + 2x - 3x - 6 - x^2 + x^2 - 4x = x^2 - 5x - 6$

$(x-6)(x+1) = x^2 + x - 6x - 6 = x^2 - 5x - 6$

Conclusion: $(x-3)(x+2) - x^2 + x(x-4) = (x-6)(x+1)$

Retenir:

Pour démontrer une égalité de la forme $X = Y$, on peut transformer X et Y et montrer qu'ils sont égaux à un même troisième Z.

$X = ...$	et	$Y = ...$	
$X = ...$	et	$Y = ...$	
.....		....	
$X = Z$	et	$Y = Z$	, donc, $X = Y$

Troisième méthode:
Montrer que la différence des deux expressions est nulle.

Démontrer que a) pour tout nombre réel x différents de -1 et de 2, $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \frac{x+3}{x+1}$

On pose la différence: $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} - \frac{x+3}{x+1}$

On met au même dénominateur:

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{(x^2+x-6)(x+1)-(x+3)(x^2-x-2)}{(x^2-x-2)(x+1)}$$

On développe le numérateur:

$(x^2 + x - 6)(x + 1) - (x + 3)(x^2 - x - 2) = x^3 + x^2 + x^2 + x - 6x - 6 - (x^3 - x^2 - 2x + 3x^2 - 3x - 6)$
$= x^3 + 2x^2 - 5x - x^3 + x^2 + 2x - 3x^2 + 3x + 6 = 0$

Comme la différence est nulle, les deux nombres sont égaux.

b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

On pose la différence: $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

On met au même dénominateur: $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$

$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{3})^2 = 5-2-3=0$

Comme la différence est nulle, les deux nombres sont égaux.

Retenir:

> Pour démontrer une égalité de la forme $X = Y$, on peut poser la différence $X - Y$ et montrer par le calcul que cette différence est nulle.
> $X - Y =$ ....
> $X - Y =$ ....
> ....
> $X - Y = 0$ donc, $X = Y$

Exercices:

I- En choisissant la méthode qui paraît la plus adaptée, démontrer les égalités suivantes:

1) Pour tout réel x, $x^2 - 12x + 35 = (x-5)(x-7)$

En développant $(x-5)(x-7) = x^2 - 7x - 5x + 35 = x^2 - 12x + 35$

Conclusion: Pour tout réel x, $x^2 - 12x + 35 = (x-5)(x-7)$

2) Pour tout x différent de -1, $2 + \dfrac{x^2-2}{x+1} = x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$

En mettant au même dénominateur le premier membre:

$2 + \dfrac{x^2-2}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+x^2-2}{x+1} = \dfrac{2x+x^2}{x+1}$

En mettant au même dénominateur le second membre:

$x + 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+1)^2-1}{x+1} = \dfrac{2x+x^2}{x+1}$

Conclusion: Pour tout x différent de -1, $2 + \dfrac{x^2-2}{x+1} = x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$

3) Pour tout x différent de 2, $3x + 1 - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{3x^2-5x-3}{x-2}$

En mettant au même dénominateur le premier membre:

$3x + 1 - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{(3x+1)(x-2)-1}{x-2} = \dfrac{3x^2-6x+x-2-1}{x-2} = \dfrac{3x^2-5x+x-3}{x-2}$

Conclusion: Pour tout x différent de 2, $3x + 1 - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{3x^2-5x+x-3}{x-2}$

4) Pour tout x, $\sqrt{x^2+3} - x = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$

On pose la différence $(\sqrt{x^2+3} - x) - \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$

On met au même dénominateur:

$(\sqrt{x^2+3} - x) - \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = \dfrac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)-3}{\sqrt{x^2+3}+x}$

On développe le numérateur

$(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)-3 = (x^2+3)-x^2-3 = 0$

Conclusion: Pour tout x , ($\sqrt{x^2+3} - x = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$

5) Pour tous nombres réels a, b, c, d, $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)\ (c^2+d^2)$

On développe le premier membre:

$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (ac)^2 + 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 - 2adbc + (bc)^2$

$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$

On développe le second membre:

$(a^2+b^2)\ (c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

Conclusion: Pour tous nombres réels a, b, c, d, $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)\ (c^2+d^2)$

II- Les égalités suivantes sont-elles vraies?

1) Pour tout x réel, $(2x + 1)(x - 1) = x^2 - 2x + 1$

L'égalité est **fausse**.

Contre-exemple: Si $x = 0$, $(2\times0 + 1)\ (0 - 1) = -1$ et $0^2 - 2\times0 + 1 = 1$

2) Pour tous nombres réels a et b, $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4a\,b$

L'égalité est **vraie**,

On développe le premier membre: $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$