Index

Définition de fonction composée

u est une fonction définie sur I prenant ses valeurs dans J.
v est une fonction définie sur J *(ou sur un ensemble contenant J)*.
On peut dans ce cas définir la fonction $f = v \circ u$ par:
pour tout $x \in I, f(x) = v[u(x)]$

Exemples:

1) $u : x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $]0; +\infty[$

et $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $]0; +\infty[$

$f = v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

2) $u: x \mapsto x^2 - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $[-1; +\infty[$

et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$

Pour définir $f = v \circ u$, on doit réduire la fonction u de façon à prendre des valeurs images dans $[0; +\infty[$.
On peut prendre: $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$
La fonction $f = v \circ u$ est définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par: $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$

Dérivabilité de fonction composée

u est une fonction définie et **dérivable sur un intervalle** I prenant ses valeurs dans un intervalle J.
v est une fonction définie et **dérivable sur l'intervalle** J.
La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et
pour tout $x \in I, f'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$
ou encore, la fonction f' est définie sur I par $f' = u' \times v' \circ u$.

Retour aux exemples:

1) Dans l'exemple 1, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $]0; +\infty[$, d'où, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et,

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x \times \frac{-1}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

2) Dans l'exemple 2, u est dérivable sur $]-\infty; -1]$
MAIS v est dérivable sur $]0; +\infty[$, d'où, f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ **(–1 est exclu)**

Pour tout x de $]-\infty; -1[, f'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

La même démarche s'applique pour une étude de dérivabilité de f sur $[1; +\infty[$
On obtient: f est dérivable sur $]1; +\infty[$ **(1 est exclu)**

Pour tout x de $]1; +\infty[$, $f'(x) = \mathbf{2x} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Formulaire (voir livre)

Pour une animation graphique avec un fichier GéoGebra

Une interprétation graphique:

Préliminaire (composée de deux fonctions affines):

Soit u et v deux fonctions affines représentées par les droites D_u et D_v.

$u: x \mapsto m_1 x + p_1$ (Une équation de D_u est $y = m_1 x + p_1$)

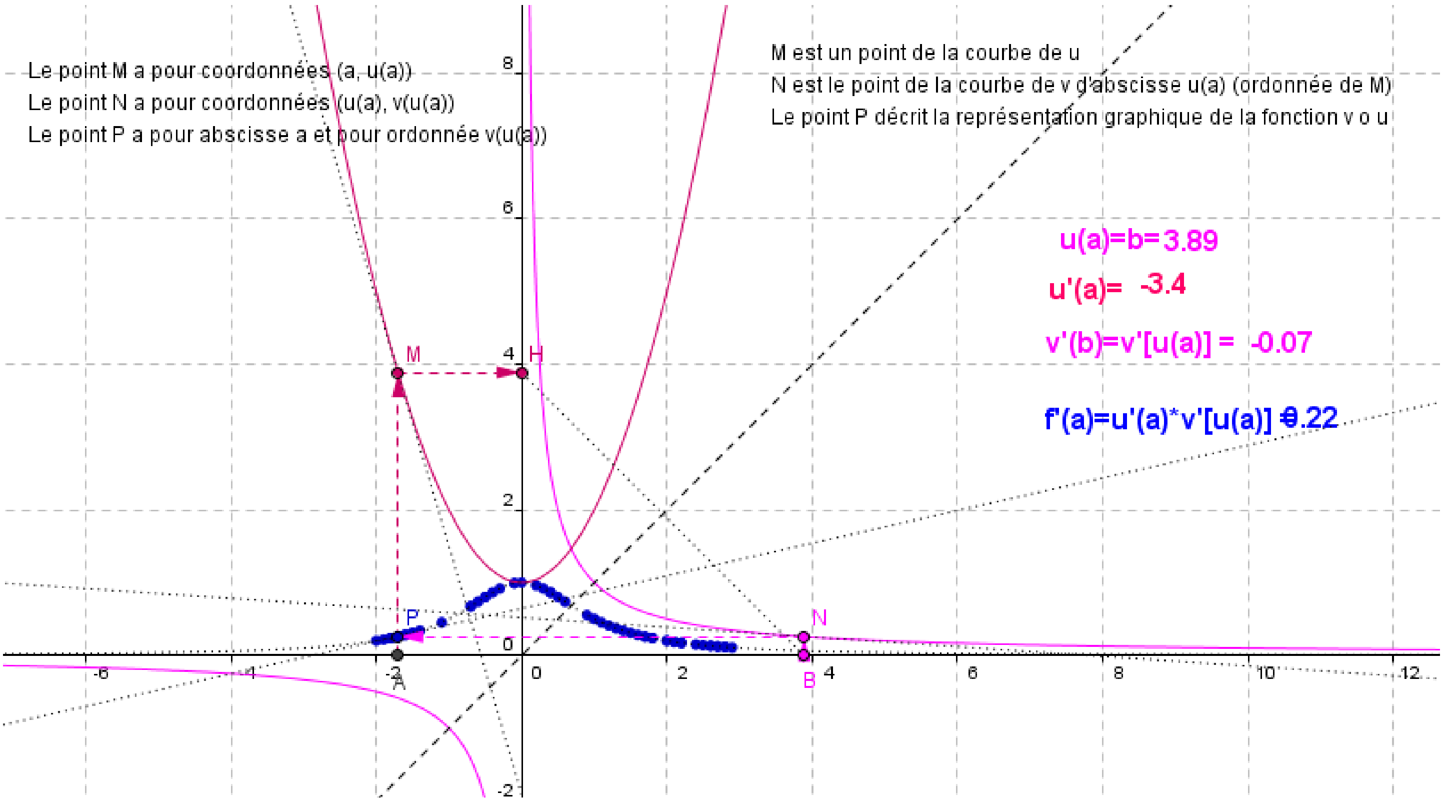
$v: x \mapsto m_2 x + p_2$ (Une équation de D_v est $y = m_2 x + p_2$)

La composée $f = v \circ u$ est la fonction définie par: $x \mapsto m_2(m_1 x + p_1) + p_2 = m_2 \times m_1 x + m_2 \times p_1 + p_2$.

Conclusion: f est une fonction affine représentée par la droite D_f d'équation $y = m_2 \times m_1 x + m_2 \times p_1 + p_2$

La composée de deux applications affines est une application affine et le coefficient directeur est le produit des coefficients directeurs.

Lecture graphique



On pose $u(a) = b$
La fonction u est représentée au voisinage de M par une courbe C_u infiniment proche de T_a de coefficient

directeur $u'(a)$.
La fonction v est représentée au voisinage de N par une courbe C_v infiniment proche de T_b de coefficient directeur $v'(b) = v'[u(a)]$.
La fonction $f = v \circ u$ est représentée au voisinage de P par une courbe C_f infiniment proche de la droite T de coefficient directeur le produit des coefficients directeurs: $u'(a) \times v'[u(a)]$.
Le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = u'(a) \times v'[u(a)]$.