Distance d'un point à une droite.	Distance d'un point à un plan.
Soit une droite $\mathscr{D}$ d'un plan. Soit un point A dans ce plan. La distance de A à $\mathscr{D}$ est définie comme la plus courte de toutes les distances de A à un point M de $\mathscr{D}$. C'est aussi la distance de A à H où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$. On a donc selon les points de vue des méthodes qui en découlent. Si, et c'est le luxe, les objets sont dans un repère orthonormal, on obtient une formule .... ***Premier point de vue:*** On arrive à exprimer la distance AM en fonction d'un réel t qui varie avec M. On a donc : $AM = f(t)$ où t donne la position de M sur $\mathscr{D}$. Il reste à étudier f et à déterminer son minimum. ***Deuxième point de vue:*** On sait déterminer le projeté orthogonal H et on a une configuration qui permet de calculer AH. (Par exemple, AH est la hauteur d'un triangle dont on peut calculer l'aire et la base relative à cette hauteur) ***Troisième point de vue:*** Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal. On pose $A(x_A; y_A)$, $H(x_H; y_H)$ Une équation de $\mathscr{D}$: $ax + by + c = 0$, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$. On calcule $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$ de deux façons différentes (c'est tout l'intérêt du produit scalaire) ***Façon 1: (avec les coordonnées)*** $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H - x_A\\y_H - y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A)$	Soit un plan $\mathscr{P}$. Soit un point A. La distance de A à $\mathscr{P}$ est définie comme la plus courte de toutes les distances de A à un point M de $\mathscr{P}$. C'est aussi la distance de A à H où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. On a donc selon les points de vue des méthodes qui en découlent. Si, et c'est le luxe, les objets sont dans un repère orthonormal, on obtient une formule .... ***Premier point de vue:*** On arrive à exprimer la distance AM en fonction d'un réel t qui varie avec M. On a donc : $AM = f(t)$ où t donne la position de M dans $\mathscr{P}$. Il reste à étudier f et à déterminer son minimum. ***Deuxième point de vue:*** On sait déterminer le projeté orthogonal H et on a une configuration qui permet de calculer AH. (Par exemple, AH est la hauteur d'un tétraèdre dont on peut calculer le volume et l'aire de la base relative à cette hauteur) ***Troisième point de vue:*** Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal. On pose $A(x_A; y_A; z_A)$, $H(x_H; y_H; z_H)$ Une équation de $\mathscr{P}$: $ax + by + cz + d = 0$, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$. On calcule $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$ de deux façons différentes (c'est tout l'intérêt du produit scalaire) ***Façon 1: (avec les coordonnées)*** $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H - x_A\\y_H - y_A\\z_H - z_A\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A)$

$= ax_H - ax_A + by_H - by_A$ (1)

et, comme on n'a pas oublié que H était sur $\mathscr{D}$, on a: $ax_H + by_H + c = 0$,
soit: $ax_H + by_H = -c$.
ce qui mène en remplaçant dans (1) à:
$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = -ax_A - by_A - c$

Façon 2: (avec les projetés orthogonaux)

On a (par construction), $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ colinéaires .... (ils sont tous les deux orthogonaux à $\mathscr{D}$)

$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = \begin{cases} -\|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{n}\| \\ \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{n}\| \end{cases}$ selon que $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont de sens opposés on non.

Conclusion:

En prenant, $|\overrightarrow{AH} . \vec{n}| = \|\overrightarrow{AH}\| . \|\vec{n}\|$, on tire $AH = \|\overrightarrow{AH}\|$ de l'égalité:
$\|\overrightarrow{AH}\| . \|\vec{n}\| = |-ax_A - by_A - c| = |ax_A + by_A + c|$

Comme $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2}$,

on obtient: $AH = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= ax_H - ax_A + by_H - by_A + cz_H - cz_A$ (1)

et, comme on n'a pas oublié que H était dans $\mathscr{P}$, on a: $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$,
soit: $ax_H + by_H + cz_H = -d$.
ce qui mène en remplaçant dans (1) à:
$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = -ax_A - by_A - cz_A - d$

Façon 2: (avec les projetés orthogonaux)

On a (par construction), $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ colinéaires .... (ils sont tous les deux orthogonaux à $\mathscr{P}$)

$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = \begin{cases} -\|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{n}\| \\ \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\vec{n}\| \end{cases}$ selon que $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont de sens opposés on non.

Conclusion:

En prenant, $|\overrightarrow{AH} . \vec{n}| = \|\overrightarrow{AH}\| . \|\vec{n}\|$, on tire $AH = \|\overrightarrow{AH}\|$ de l'égalité:
$\|\overrightarrow{AH}\| . \|\vec{n}\| = |-ax_A - by_A - cz_A - d| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$

Comme $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$,

on obtient: $AH = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Exemple 1/

Dans le triangle ABC rectangle en A avec $AB = 3$, $AC = 4$, calculer ***la distance du point A à la droite (BC).***
Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Aire du triangle: $\dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{BC \times AH}{2}$

Aire de ABC: $\mathscr{A} = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6$

Calcul de BC: Théorème de Pythagore: $BC^2 = ... = 25$, d'où, $BC = 5$

$AH = \dfrac{6 \times 2}{5} = 2{,}4$

Exemple 2/

$ABCD$ est un rectangle avec $AB = 4$ et $AD = 3$.
E est le point défini par $\overrightarrow{AE} = 5\ \overrightarrow{AC}$

Calculer la distance de E à la droite (BD).
On se place par exemple dans le repère orthonormal tel que $A(0; 0)$, $B(4; 0)$; $C(4; 3)$ et $D(0; 3)$
On a donc: $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à (DB) est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.
Pour tout point $M(x; y)$ de (DB), on a: $\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n} = 0$, d'où: $3(x-4)+4(y-0)=0$ est une équation de (BD).
$3x+4y-12=0$ est une équation de (BD).
Or, $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, d'où, $E(20; 15)$
La distance $d(E, (BD)) = \dfrac{|3\times 20+4\times 15-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{108}{5}$

Exemple 3

Exercices dans l'espace ...