**Équation différentielle**

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

# Index



## Prérequis

- Bien comprendre ce qu'est une fonction numérique réelle.

$x$ et $t$ sont des réels. Faites-vous une différence entre $t \mapsto tx^2$ et $x \mapsto tx^2$? La réponse est OUI

- Toutes (sans exceptions) les formules de dérivation

## I- Que veut dire " Résoudre une équation différentielle "

### *I-- 1 Analyse du vocabulaire*

**Équation**: proposition contenant une égalité qui peut être vraie ou fausse
**Différentielle**: cette équation met en relation une fonction est ses dérivées

**Résoudre**: chercher toutes les solutions

**Solution**: en remplaçant l'inconnue par la solution, l'égalité est vraie (sinon, ce n'est pas une solution)

Dans une équation différentielle, **les solutions sont des fonctions**.
L'inconnue est souvent notée $y$.

### *I-2- Un exemple*

$x$ est un réel, on considère l'équation différentielle (E): $x^2y'' - 4y' - 2y - 6 = 0$ *(je vous rassure: la résolution est hors programme du lycée)*
Les fonctions suivantes sont-elles solutions de (E)?

$f : x \mapsto x^2 + 2x + 4$ (Pour tout $x$ réel, $f(x) = x^2 + 2x + 4$)

$g : x \mapsto x^2 - 4x + 5$

$h : x \mapsto x - 5$

$k : x \mapsto 2x^2 - 8x + 13$

***Méthode***: On exprime la dérivée première, la dérivée seconde, on remplace dans (E), on réduit et …. , on conclut.
Pour tout $x$ réel, $f(x) = x^2 + 2x + 4$, $f'(x) = 2x + 2$, $f''(x) = 2$
Pour tout $x$ réel, $2\times x^2 - 4(2x + 2) - 2(x^2 + 2x + 4) - 6 = \dots = -12x - 22$
Cette expression n'est pas nulle pour tout réel, d'où, $f$ n'est pas une solution de (E).

Pour tout $x$ réel, $g(x) = x^2 - 4x + 5$, $g'(x) = 2x - 4$ , $g''(x) = 2$
Pour tout $x$ réel, $2\times x^2 - 4(2x - 4) - 2(x^2 - 4x + 5) - 6 = \dots = 0$
Cette expression est nulle pour tout réel, d'où, $g$ est une solution de (E).

Pour tout $x$ réel, $h(x) = x - 5$, $h'(x) = 1$ , $h''(x) = 0$
Pour tout $x$ réel, $0\times x^2 - 4\times 1 - 2(x - 5) - 6 = \dots = -2x$
Cette expression n'est pas nulle pour tout réel, d'où, $h$ n'est pas une solution de (E).

Pour tout $x$ réel, $k(x) = 2x^2 - 8x + 13$, $k'(x) = 4x - 8$ , $k''(x) = 4$
Pour tout $x$ réel, $4\times x^2 - 4(4x - 8) - 2(2x^2 - 8x + 13) - 6 = \dots = 0$
Cette expression est nulle pour tout réel, d'où, $k$ est une solution de (E).

### *I-3- Comme M. Jourdain: des équations différentielles que vous savez résoudre sans le savoir*

#### I-3-1- La dérivée première est nulle

On cherche toutes les fonctions $f$ telles que $f' = 0$

Les solutions sont: $x \mapsto C$ où $C \in \mathbb{R}$.

#### I-3-2- La dérivée première est constante

On cherche toutes les fonctions $f$ telles que $f' = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Les solutions sont: $x \mapsto ax + b$ où $b \in \mathbb{R}$.

## II- Les équations différentielles actuellement au programme de TS ...

### *II- 1- Équation de la forme: $y' = ay$ $(a \in \mathbb{R}^*)$*

Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.

### *II-2- Équation de la forme: $y' = ay + b$ $(a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R})$*

Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$.

$a$ , $b$ et $C$ sont des constantes réelles (c-à-d: indépendantes de la variable)

# III- ... et les autres équations différentielles au lycée

## III-1 – Équation de la forme $y' = ay + \phi(x)$

Évidemment, $\phi(x)$ n'est pas une constante, donc, la propriété du II-2- ne s'applique pas
alors, on vous guidera …
Dans un premier temps, on vous demandera de trouver une **solution particulière** $g$.
Puis, on vous fera démontrer l'**équivalence** suivante:
$f$ est une solution de l'équation (E): $y' = ay + \phi(x)$ si et seulement si $f - g$ est une solution de l'équation (E '): $y' = ay$
Et **comme vous connaissez bien le cours**, vous remarquez que le § II-1 s'applique
Finalement, vous connaissez $f - g$ et vous connaissez $g$, vous pouvez donc donner $f$ (qui ne l'oubliez pas) représente n'importe quelle solution de l'équation (E): $y' = ay + \phi(x)$
Des " modèles " sont traités en classe

## III-2- et d'autres encore …

À première vue, cela ne ressemble pas aux équations vues en cours , mais, là aussi, on vous guidera …
Un cas fréquent: on fait un **changement de variable**,
c'est-à-dire: on pose $y$ = (autre fonction) …. (somme de ... ou produit de … ou composée de … ou inverse de … ou ...)
on dérive pour avoir $y'$ et on remplace dans l'équation proposée et tout s'illumine …
La nouvelle équation est une forme connue (et reconnue). On applique donc le cours et on n'oublie pas de " remonter " le calcul pour trouver la fonction initiale.

Rien n'empêche de combiner les § III-1 et III-2

## III-3- Un exemple

On considère l'équation différentielle (E): $2y' + y(1 + 2yx^2) = 0$ ($y$ est une fonction $x \mapsto y(x)$ dérivable sur un ensemble $I$ de réels et qui ne s'annule pas sur $I$)

****** Changement de variable:***

on pose $u = \dfrac{1}{y}$ (donc $u$ ne s'annule pas sur $I$ et on peut écrire $y = \dfrac{1}{u}$).

Puisque $y$ est une fonction dérivable ne s'annulant pas sur $I$, $u$ est dérivable sur $I$.

On a les relations suivantes: $y = \dfrac{1}{u}$ et $y' = \dfrac{-u'}{u^2}$ (ou $u = \dfrac{1}{y}$ et $u' = \dfrac{-y'}{y^2}$ )

En remplaçant dans (E), on obtient la nouvelle équation différentielle équivalente à (E):

$(E_1)$: $2\left(\dfrac{-u'}{u^2}\right) + \dfrac{1}{u}(1 + 2\times\dfrac{1}{u}\times x^2) = 0$

Comme $u \neq 0$, en multipliant tous les membres par $u^2$, il vient:

$-2u' + u + 2x^2 = 0$, soit (en réorganisant): $u' = \dfrac{1}{2}u + x^2$ $(E_2)$

Cette équation $(E_2)$ est de celle dont on parle au §III-1.

### **** Une solution particulière de ($E_2$) :*

Étant donné la forme de ($E_2$), on cherche une fonction $f$ du second degré.
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, d'où, $f'(x) = 2ax + b$.
Comme $f$ est solution de ($E_2$), on a l'**égalité** suivante:

$$2ax + b = \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c) + x^2 = \left(\frac{1}{2}a + 1\right)x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}c.$$

Par identification des coefficients: $\begin{cases} \frac{1}{2}a+1=0 \\ \frac{1}{2}b=2a \\ \frac{1}{2}c=b \end{cases}$ , donc $\begin{cases} a=-2 \\ b=-8 \\ c=-16 \end{cases}$.

Le polynôme $-2x^2 - 8x - 16$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, car, $\Delta = \ldots = -64$

**La fonction $f : x \mapsto -2x^2 - 8x - 16$ est une solution particulière de ($E_2$)**

(on peut contrôler en dérivant et en remplaçant …)

### **** Les solutions générales de ($E_2$) :*

Soit $g$ une solution quelconque de ($E_2$)

On sait déjà: $f' = \frac{1}{2}f + x^2$ car, $f$ est solution de ($E_2$)

**Une implication:**

Si $g$ est solution de ($E_2$) alors $g' = \frac{1}{2}g + x^2$

En soustrayant membre-à-membre, on obtient: $g' - f' = \frac{1}{2}(g - f)$

En posant $h = g - f$, on a: $h' = g' - f' = \frac{1}{2}h$

L'équation ($E_3$): $h' = \frac{1}{2}h$ est de la forme $y' = ay$ (équation connue voir §II-1)

On a montré : " Si $g$ est solution de ($E_2$) " alors " $h = g - f$ est solution de ($E_3$) : $y' = \frac{1}{2}y$ "

**et sa réciproque:**

Si $h = g - f$ est solution de ($E_3$) alors $h' = \frac{1}{2}h$

On a donc: $h' = g' - f' = \frac{1}{2}(g - f)$ Or, $f' = \frac{1}{2}f + x^2$

En ajoutant membre à membre, on obtient: $g' = \frac{1}{2}g + x^2$ , soit, $g$ est solution de ($E_2$).

On a montré: " Si $h = g - f$ est solution de ($E_3$) " alors " $g$ est solution de ($E_2$) "

On a l'**équivalence** suivante:
" $g$ est solution de ($E_2$) " équivaut à " $g - f$ est solution de ($E_3$) "

****** Bilan:***

On sait résoudre ($E_3$), donc, on connaît $g-f$ $\quad g-f : x \mapsto C\ e^{\frac{1}{2}x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Comme on connaît $f$, on en déduit:

$$g : x \mapsto C\ e^{\frac{1}{2}x} - 2x^2 - 8x - 16 \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$ (Ce sont toutes les solutions de ($E_2$))

Mais, comme vous n'avez pas oublié que les solutions de (E) étaient les inverses de celles de ($E_2$) *(Mais si, vous avez bien dit* $y = \dfrac{1}{u}$ *pour trouver l'équation ($E_2$))*

on peut conclure: (après avoir remarqué que $g$ ne s'annulait pas sur $\mathbb{R}$)

les solutions de (E) sont les fonctions: $\phi : x \mapsto \dfrac{1}{Ce^{\frac{1}{2}x} - 2x^2 - 8x - 16}$ où $C \in \mathbb{R}$.

### *III-4 Conditions initiales*

Reprenons l'exemple du §III-3.

Dans le cas d'un phénomène naturel qui amène une équation différentielle, il existe des conditions initiales.

Prenons par exemple : pour $x = 0$, $y(0) = 1$ (On considère qu'à l'instant initial, la valeur prise par le " phénomène " étudié est l'unité.

En ce cas, $\phi(0) = 1$ (conditions initiales) et $\phi(0) = \dfrac{1}{Ce^{\frac{1}{2}\times 0} - 2\times 0^3 - 8\times 0 - 16} = \dfrac{1}{C-16}$

On en déduit: $\dfrac{1}{C-16} = 1$, soit: $C = 17$

L'unique fonction solution de (E) et vérifiant $y(0) = 1$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{17\times e^{\frac{1}{2}x} - 2x^2 - 8x - 16}$

## IV- Approximation par la méthode d'Euler

La méthode d'Euler s'appuie sur l'approximation affine

$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h\times f'(x_0)$ *pour $h$* suffisamment petit.

Reprenons l'exemple des §III-3 et III-4

On sait: $2y' + y(1 + 2yx^2) = 0$, soit: $y' = -\dfrac{1}{2}y(1 + yx^2)$ et $y(0) = 1$

On calcule pas-à-pas les valeurs approchées de $y$.

Dans le tableau ci-dessous, on peut comparer les valeurs approchées (colonne B) avec les valeurs théoriques (colonne D). Lorsqu'on reste au voisinage de x = 0, y = 1, les valeurs sont très proches, puis, s'écartent de plus en plus.

Le premier tableau est avec un pas de 0,1

Le second tableau avec un pas de 0,01

| A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | y | y' | f(x) | | | |
| -1,8 | 533608801386,51 | -9,23E+023 | -0,86 | | h= | 0,1 |
| -1,7 | 1358820,19 | -5336074425663,23 | -1,09 | | | |
| -1,6 | 2301,84 | -13565183,5 | -1,47 | | | |
| -1,5 | 98,84 | -22029,97 | -2,13 | | | |
| -1,4 | 19,94 | -789,02 | -3,6 | | | |
| -1,3 | 8,19 | -117,46 | -9,5 | | | |
| -1,2 | 4,73 | -34,59 | 20,08 | | | |
| -1,1 | 3,27 | -14,59 | 5,31 | | | |
| -1 | 2,51 | -7,58 | 3,22 | | | |
| -0,9 | 2,07 | -4,49 | 2,38 | | | |
| -0,8 | 1,77 | -2,9 | 1,94 | | | |
| -0,7 | 1,57 | -2 | 1,67 | | | |
| -0,6 | 1,43 | -1,45 | 1,48 | | | |
| -0,5 | 1,32 | -1,1 | 1,35 | | | |
| -0,4 | 1,23 | -0,86 | 1,25 | | | |
| -0,3 | 1,16 | -0,7 | 1,17 | | | |
| -0,2 | 1,1 | -0,6 | 1,11 | | | |
| -0,1 | 1,05 | -0,54 | 1,05 | | | |
| 0 | 1 | -0,5 | 1 | | | |
| 0,1 | 0,95 | -0,48 | 0,95 | | | |
| 0,2 | 0,9 | -0,48 | 0,9 | | | |
| 0,3 | 0,85 | -0,49 | 0,85 | | | |
| 0,4 | 0,8 | -0,51 | 0,8 | | | |
| 0,5 | 0,75 | -0,52 | 0,75 | | | |
| 0,6 | 0,7 | -0,53 | 0,7 | | | |
| 0,7 | 0,65 | -0,53 | 0,65 | | | |
| 0,8 | 0,6 | -0,53 | 0,59 | | | |
| 0,9 | 0,54 | -0,51 | 0,54 | | | |
| 1 | 0,49 | -0,49 | 0,49 | | | |
| 1,1 | 0,44 | -0,46 | 0,45 | | | |
| 1,2 | 0,4 | -0,43 | 0,4 | | | |
| 1,3 | 0,35 | -0,39 | 0,36 | | | |
| 1,4 | 0,32 | -0,35 | 0,32 | | | |
| 1,5 | 0,28 | -0,32 | 0,29 | | | |
| 1,6 | 0,25 | -0,28 | 0,26 | | | |
| 1,7 | 0,22 | -0,25 | 0,23 | | | |
| 1,8 | 0,2 | -0,22 | 0,2 | | | |
| 1,9 | 0,17 | -0,19 | 0,18 | | | |
| 2 | 0,15 | -0,17 | 0,16 | | | |
| 2,1 | 0,14 | -0,15 | 0,14 | | | |
| 2,2 | 0,12 | -0,13 | 0,13 | | | |
| 2,3 | 0,11 | -0,12 | 0,11 | | | |
| 2,4 | 0,1 | -0,1 | 0,1 | | | |
| 2,5 | 0,09 | -0,09 | 0,09 | | | |
| 2,6 | 0,08 | -0,08 | 0,08 | | | |
| 2,7 | 0,07 | -0,07 | 0,07 | | | |
| 2,8 | 0,06 | -0,06 | 0,07 | | | |
| 2,9 | 0,06 | -0,05 | 0,06 | | | |
| 3 | 0,05 | -0,05 | 0,05 | | | |
| 3,1 | 0,05 | -0,04 | 0,05 | | | |
| 3,2 | 0,04 | -0,04 | 0,05 | | | |
| 3,3 | 0,04 | -0,03 | 0,04 | | | |
| 3,4 | 0,03 | -0,03 | 0,04 | | | |
| 3,5 | 0,03 | -0,03 | 0,03 | | | |
| 3,6 | 0,03 | -0,02 | 0,03 | | | |
| 3,7 | 0,03 | -0,02 | 0,03 | | | |
| 3,8 | 0,02 | -0,02 | 0,03 | | | |
| 3,9 | 0,02 | -0,02 | 0,02 | | | |

le pas

Les conditions initiales : quand x = 0, y(0) = 1

on rentre la formule donnée par l'équa diff

$y' = -0{,}5y(1+yx^2)$

=-0,5*(B20*(1+2*B20*A20*A20))

on rentre la formule due à l'approximation affine

$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)$

=B20+$G$2*C20

On rentre la formule = $x_0$ + pas

=A20+$G$2

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | y | y' | f(x) |
| 2 | -0,51 | 1,35973575 | -1,16 | 1,36354873 |
| 3 | -0,5 | 1,34844773 | -1,13 | 1,35205787 |
| 4 | -0,49 | 1,33746547 | -1,1 | 1,34088313 |
| 5 | -0,48 | 1,32677578 | -1,07 | 1,33001072 |
| 6 | -0,47 | 1,31636615 | -1,04 | 1,31942755 |
| 7 | -0,46 | 1,30622466 | -1,01 | 1,30912115 |
| 8 | -0,45 | 1,29633995 | -0,99 | 1,29907969 |
| 9 | -0,44 | 1,28670120 | -0,96 | 1,28929187 |
| 10 | -0,43 | 1,27729809 | -0,94 | 1,27974695 |
| 11 | -0,42 | 1,26812074 | -0,92 | 1,27043465 |
| 12 | -0,41 | 1,25915974 | -0,9 | 1,26134520 |
| 13 | -0,4 | 1,25040609 | -0,88 | 1,25246924 |
| 14 | -0,39 | 1,24185116 | -0,86 | 1,24379782 |
| 15 | -0,38 | 1,23348669 | -0,84 | 1,23532240 |
| 16 | -0,37 | 1,22530479 | -0,82 | 1,22703478 |
| 17 | -0,36 | 1,21729787 | -0,8 | 1,21892712 |
| 18 | -0,35 | 1,20945866 | -0,78 | 1,21099190 |
| 19 | -0,34 | 1,20178017 | -0,77 | 1,20322192 |
| 20 | -0,33 | 1,19425571 | -0,75 | 1,19561024 |
| 21 | -0,32 | 1,18687883 | -0,74 | 1,18815023 |
| 22 | -0,31 | 1,17964333 | -0,72 | 1,18083549 |
| 23 | -0,3 | 1,17254324 | -0,71 | 1,17365988 |
| 24 | -0,29 | 1,16557282 | -0,7 | 1,16661750 |
| 25 | -0,28 | 1,15872656 | -0,68 | 1,15970265 |
| 26 | -0,27 | 1,15199910 | -0,67 | 1,15290986 |
| 27 | -0,26 | 1,14538533 | -0,66 | 1,14623385 |
| 28 | -0,25 | 1,13888027 | -0,65 | 1,13966953 |
| 29 | -0,24 | 1,13247915 | -0,64 | 1,13321199 |
| 30 | -0,23 | 1,12617735 | -0,63 | 1,12685649 |
| 31 | -0,22 | 1,11997040 | -0,62 | 1,12059847 |
| 32 | -0,21 | 1,11385399 | -0,61 | 1,11443350 |
| 33 | -0,2 | 1,10782396 | -0,6 | 1,10835733 |
| 34 | -0,19 | 1,10187628 | -0,59 | 1,10236582 |
| 35 | -0,18 | 1,09600704 | -0,59 | 1,09645498 |
| 36 | -0,17 | 1,09021249 | -0,58 | 1,09062097 |
| 37 | -0,16 | 1,08448896 | -0,57 | 1,08486004 |
| 38 | -0,15 | 1,07883292 | -0,57 | 1,07916860 |
| 39 | -0,14 | 1,07324095 | -0,56 | 1,07354314 |
| 40 | -0,13 | 1,06770974 | -0,55 | 1,06798028 |
| 41 | -0,12 | 1,06223608 | -0,55 | 1,06247674 |
| 42 | -0,11 | 1,05681686 | -0,54 | 1,05702936 |
| 43 | -0,1 | 1,05144906 | -0,54 | 1,05163505 |
| 44 | -0,09 | 1,04612976 | -0,53 | 1,04629085 |
| 45 | -0,08 | 1,04085614 | -0,53 | 1,04099385 |
| 46 | -0,07 | 1,03562546 | -0,52 | 1,03574128 |
| 47 | -0,06 | 1,03043506 | -0,52 | 1,03053042 |
| 48 | -0,05 | 1,02528237 | -0,52 | 1,02535865 |
| 49 | -0,04 | 1,02016490 | -0,51 | 1,02022343 |
| 50 | -0,03 | 1,01508022 | -0,51 | 1,01512230 |
| 51 | -0,02 | 1,01002601 | -0,51 | 1,01005288 |
| 52 | -0,01 | 1,00500000 | -0,5 | 1,00501286 |
| 53 | 0 | 1,00000000 | -0,5 | 1,00000000 |
| 53 | 0 | 1,00000000 | -0,5 | 1,00000000 |
| 54 | 0,01 | 0,99500000 | -0,5 | 0,99501215 |
| 55 | 0,02 | 0,99002401 | -0,5 | 0,99004721 |
| 56 | 0,03 | 0,98506997 | -0,49 | 0,98510317 |
| 57 | 0,04 | 0,98013589 | -0,49 | 0,98017807 |
| 58 | 0,05 | 0,97521984 | -0,49 | 0,97527003 |
| 59 | 0,06 | 0,97031996 | -0,49 | 0,97037722 |
| 60 | 0,07 | 0,96543447 | -0,49 | 0,96549789 |
| 61 | 0,08 | 0,96056162 | -0,49 | 0,96063033 |
| 62 | 0,09 | 0,95569976 | -0,49 | 0,95577293 |
| 63 | 0,1 | 0,95084728 | -0,48 | 0,95092410 |
| 64 | 0,11 | 0,94600263 | -0,48 | 0,94608234 |
| 65 | 0,12 | 0,94116434 | -0,48 | 0,94124620 |
| 66 | 0,13 | 0,93633096 | -0,48 | 0,93641427 |
| 67 | 0,14 | 0,93150114 | -0,48 | 0,93158524 |
| 68 | 0,15 | 0,92667357 | -0,48 | 0,92675781 |
| 69 | 0,16 | 0,92184699 | -0,48 | 0,92193076 |
| 70 | 0,17 | 0,91702020 | -0,48 | 0,91710294 |
| 71 | 0,18 | 0,91219207 | -0,48 | 0,91227323 |
| 72 | 0,19 | 0,90736151 | -0,48 | 0,90744057 |
| 73 | 0,2 | 0,90252749 | -0,48 | 0,90260397 |
| 74 | 0,21 | 0,89768903 | -0,48 | 0,89776247 |
| 75 | 0,22 | 0,89284521 | -0,49 | 0,89291518 |
| 76 | 0,23 | 0,88799515 | -0,49 | 0,88806126 |
| 77 | 0,24 | 0,88313804 | -0,49 | 0,88319992 |
| 78 | 0,25 | 0,87827311 | -0,49 | 0,87833042 |
| 79 | 0,26 | 0,87339964 | -0,49 | 0,87345207 |
| 80 | 0,27 | 0,86851697 | -0,49 | 0,86856423 |
| 81 | 0,28 | 0,86362449 | -0,49 | 0,86366632 |
| 82 | 0,29 | 0,85872162 | -0,49 | 0,85875779 |
| 83 | 0,3 | 0,85380786 | -0,49 | 0,85383817 |
| 84 | 0,31 | 0,84888273 | -0,49 | 0,84890700 |
| 85 | 0,32 | 0,84394582 | -0,49 | 0,84396390 |
| 86 | 0,33 | 0,83899675 | -0,5 | 0,83900851 |
| 87 | 0,34 | 0,83403520 | -0,5 | 0,83404055 |
| 88 | 0,35 | 0,82906090 | -0,5 | 0,82905975 |
| 89 | 0,36 | 0,82407360 | -0,5 | 0,82406591 |
| 90 | 0,37 | 0,81907312 | -0,5 | 0,81905886 |
| 91 | 0,38 | 0,81405932 | -0,5 | 0,81403848 |
| 92 | 0,39 | 0,80903209 | -0,5 | 0,80900469 |
| 93 | 0,4 | 0,80399139 | -0,51 | 0,80395747 |
| 94 | 0,41 | 0,79893719 | -0,51 | 0,79889682 |
| 95 | 0,42 | 0,79386952 | -0,51 | 0,79382278 |
| 96 | 0,43 | 0,78878845 | -0,51 | 0,78873544 |
| 97 | 0,44 | 0,78369408 | -0,51 | 0,78363493 |
| 98 | 0,45 | 0,77858656 | -0,51 | 0,77852142 |
| 99 | 0,46 | 0,77346608 | -0,51 | 0,77339510 |
| 100 | 0,47 | 0,76833286 | -0,51 | 0,76825623 |
| 101 | 0,48 | 0,76318714 | -0,52 | 0,76310506 |
| 102 | 0,49 | 0,75802923 | -0,52 | 0,75794191 |
| 103 | 0,5 | 0,75285945 | -0,52 | 0,75276712 |
| 104 | 0,51 | 0,74767816 | -0,52 | 0,74758108 |
| 105 | 0,52 | 0,74248575 | -0,52 | 0,74238417 |
| 106 | 0,53 | 0,73728265 | -0,52 | 0,73717685 |
| 107 | 0,54 | 0,73206930 | -0,52 | 0,73195958 |
| 108 | 0,55 | 0,72684620 | -0,52 | 0,72673285 |
| 109 | 0,56 | 0,72161384 | -0,52 | 0,72149718 |
| 110 | 0,57 | 0,71637277 | -0,52 | 0,71625312 |
| 111 | 0,58 | 0,71112355 | -0,53 | 0,71100125 |
| 112 | 0,59 | 0,70586677 | -0,53 | 0,70574215 |